Математические структуры и моделирование
2009, вып. 20, с. 5–11

УДК 519.214.5

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ИБРАГИМОВА

А.Г. Гринь

В работе получен аналог известного неравенства И.А. Ибрагимова для моментов слабо зависимых случайных величин, использующий нормы более общего вида, чем в оригинальном неравенстве – так называемые нормы Орлича.

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\le n}$ и $\mathcal{F}_{\ge n}$ – σ -алгебры, порожденные семействами $\{\xi_i : i \le n\}$ и $\{\xi_i : i \ge n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)|}{\mathbf{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\le 0},\ B \in \mathcal{F}_{\ge n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ–перемешивания с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$ и пусть случайные величины ξ и η измеримы относительно $\mathcal{F}_{\le 0}$ и $\mathcal{F}_{\ge n}$ соответственно,

$$\|\xi\|_p = (\mathbf{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \|\eta\|_q < \infty, \quad p > 1,\ q > 1, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Тогда

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\,\mathbf{E}\eta| \le 2\varphi^{\frac{1}{p}}(n)\|\xi\|_p\|\eta\|_q. \tag{1}$$

Доказательство см., например, в [1, теорема 17.2.3].

Неравенство (1), полученное И.А. Ибрагимовым, является одним из основных инструментов при доказательстве предельных теорем для сумм слабо зависимых случайных величин. Ниже доказано обобщение неравенства (1), использующее нормы более общего вида, чем $\|\xi\|_p$ – так называемые нормы Орлича.

Приводимые ниже определения и доказательство соотношений (2)-(6) можно найти в [2].

Непрерывную выпуклую функцию $f(x),\ x \in (0, +\infty)$ назовем N-функцией, если

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty.$$

Омский государственный университет.
E-mail: griniran@gmail.com

Если $f(x)$ – N-функция, то сопряженная к ней функция

$$f^*(y) = \max_{x>0}(xy - f(x))$$

также является N-функцией и $(f^*)^* = f$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ – измеримая функция и $\mathbf{P}$– конечная мера на $\mathcal{F}$. Обозначим

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi = \mathbf{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega)$$

(индекс $\mathbf{P}$ будем опускать там, где это не вызовет путаницы).

Пусть $f(x)$ – N-функция. Нормой Орлича функции $\xi(\omega)$ относительно меры $\mathbf{P}$ назовем число

$$\|\xi\|_f = \|\xi\|_{f,\mathbf{P}} = \sup\{\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\xi\eta : \mathbf{E}_{\mathbf{P}} f^*(|\eta|) \le 1\},$$

а нормой Люксембурга –

$$\|\xi\|_{(f)} = \|\xi\|_{(f,\mathbf{P})} = \inf\left\{s > 0 : \mathbf{E}_{\mathbf{P}} f\left(\frac{|\xi|}{s}\right) \le 1\right\}.$$

Эти две нормы эквивалентны:

$$\|\xi\|_{(f)} \le \|\xi\|_f\| \le 2\xi\|_{(f)}. \tag{2}$$

Имеет место соотношение

$$\|\xi\|_{f,\mathbf{P}} \le \mathbf{E}_{\mathbf{P}} f(|\xi|) + 1. \tag{3}$$

Отметим формулу для нормы индикатора: если $\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$, то

$$\|\mathbf{1}_A(\omega)\|_{(f,\mathbf{P})} = \frac{1}{f^{-1}\left(\dfrac{1}{\mathbf{P}(A)}\right)}. \tag{4}$$

Имеют место неравенство Гельдера и усиленное неравенство Гельдера:

$$|\mathbf{E}\xi\eta| \le \|\xi\|_f \|\eta\|_{f^*}, \tag{5}$$

$$|\mathbf{E}\xi\eta| \le \|\xi\|_{(f)} \|\eta\|_{f^*}. \tag{6}$$

Говорят, что N-функция $f(x)$ удовлетворяет Δ'-условию, если существуют постоянные $a > 0$ и $x_0 > 0$ такие, что

$$f(xy) \le af(x)f(y), \quad x, y \ge x_0. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания, ξ и η измеримы соответственно относительно $\mathcal{F}_{\leq 0}$ и $\mathcal{F}_{\geq n}$, а $f(x)$ – N-функция, удовлетворяющая Δ'-условию. Если $\mathbf{E}f(|\xi|) < \infty$ и $\mathbf{E}f^*(|\eta|) < \infty$, то*

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\,\mathbf{E}\eta| \leq C\psi(n)\|\xi\|_f\|\eta\|_{f^*}, \quad \psi(n) = \frac{C}{f^{-1}\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)},$$

а константа C зависит только от f.

Замечание 1. Если $f(x) = p^{-1}x^p,\ p > 1$, то нетрудно подсчитать, что $f^*(x) = q^{-1}x^q,\ q > 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1,\ \|\xi\|_f = q^{1/q}\|\xi\|_p,\ \|\eta\|_{f^*} = p^{1/p}\|\eta\|_q$ (см., например, [2, с. 86]). Ясно, что $f(x)$ удовлетворяет Δ'-условию и $\psi(n) = Cp^{-1/p}\varphi^{1/p}(n)$. Мы видим, что в данном случае неравенство в теореме отличается от неравенства Ибрагимова лишь константой в правой части.

Доказательство. Докажем утверждение теоремы для величин $\xi \geq 0$ и $\eta \geq 0$ вида

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} u_i \mathbf{1}_{A_i},\ A_i \in \mathcal{F}_{\leq 0},\ i = 1, ..., k,\ A_iA_j = \varnothing, i \neq j,\ \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega,$$

$$\eta = \sum_{j=1}^{l} v_j \mathbf{1}_{B_j},\ B_j \in \mathcal{F}_{\geq n},\ j = 1, ..., l,\ B_iB_j = \varnothing, i \neq j,\ \bigcup_{j=1}^{l} B_j = \Omega. \tag{8}$$

С помощью неравенства Гельдера (5) получаем

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\,\mathbf{E}\eta| = |\mathbf{E}\xi(\mathbf{E}(\eta|\xi) - \mathbf{E}\eta)| \leq \|\xi\|_f\|\mathbf{E}(\eta|\xi) - \mathbf{E}\eta\|_g, \tag{9}$$

где $g = f^*$, а $\mathbf{E}(\eta|\xi) = \sum\limits_{i=1}^{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{l} v_j\mathbf{P}(B_j|A_i)\right)\mathbf{1}_{A_i}(\omega)$. При $\omega \in A_i$

$$|\mathbf{E}(\eta|\xi) - \mathbf{E}\eta| = \left|\sum_{j=1}^{l} v_j(\mathbf{P}(B_j|A_i) - \mathbf{P}(B_j))\right| = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_i^+}\eta + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_i^-}\eta, \tag{10}$$

где меры $\mathbf{Q}_i^+$ и $\mathbf{Q}_i^-$ определяются соотношениями

$$\mathbf{Q}_i^+(B_j) = (\mathbf{P}(B_j|A_i) - \mathbf{P}(B_j)) \vee 0,\ \mathbf{Q}_i^-(B_j) = (\mathbf{P}(B_j) - \mathbf{P}(B_j|A_i)) \vee 0,$$

$$a \vee b = \max(a, b), \quad \mathbf{Q}_i^{\pm}\left(\bigcup_j B_j\right) = \sum_j \mathbf{Q}_i^{\pm}(B_j).$$

Из усиленного неравенства Гельдера (6) следует

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_i^+}\eta + \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_i^-}\eta \leq \|1\|_{(f, \mathbf{Q}_i^+)}\|\eta\|_{g, \mathbf{Q}_i^+} + \|1\|_{(f, \mathbf{Q}_i^-)}\|\eta\|_{g, \mathbf{Q}_i^-}. \tag{11}$$

В силу (4)

$$\|1\|_{(f,\mathbf{Q}_i^+)} = \|\mathbf{1}_\Omega\|_{(f,\mathbf{Q}_i^+)} = \frac{1}{f^{-1}\left(\dfrac{1}{\mathbf{Q}_i^+(\Omega)}\right)},$$

$$\mathbf{Q}_i^+(\Omega) = \sum_{j=1}^{l} \mathbf{Q}_i^+(B_j) = \sum_j{}^{+} (\mathbf{P}(B_j|A_i) - \mathbf{P}(B_j)) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\bigcup_j{}^{+} B_j|A_i\right) - \mathbf{P}\left(\bigcup_j{}^{+} B_j\right) \le \varphi(n)$$

(здесь $\sum^+$ означает суммирование по положительным слагаемым, а в $\bigcup^+$) суммирование идет по тем же индексам, что и в $\sum^+$). Добавив к этому аналогичные рассуждения с $\mathbf{Q}_i^-$, получим

$$\|1\|_{(f,\mathbf{Q}_i^+)} \le \frac{1}{f^{-1}\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)}, \quad \|1\|_{(f,\mathbf{Q}_i^-)} \le \frac{1}{f^{-1}\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)}.$$

Вместе с (9), (10) и (11) это дает нам

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\,\mathbf{E}\eta| \le \frac{\|\xi\|_{f,\mathbf{P}}}{f^{-1}\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)} \left\| \sum_{i=1}^{k} \left(\|\eta\|_{g,\mathbf{Q}_i^+} + \|\eta\|_{g,\mathbf{Q}_i^-} \right) \mathbf{1}_{A_i} \right\|_{g,\mathbf{P}} \le$$

$$\le \frac{\|\xi\|_{f,\mathbf{P}}}{f^{-1}\left(\dfrac{1}{\varphi(n)}\right)} \left(S^+ + S^-\right), \quad S^\pm = \left\| \sum_{i=1}^{k} \|\eta\|_{g,\mathbf{Q}_i^\pm} \mathbf{1}_{A_i} \right\|_{g,\mathbf{P}}. \tag{12}$$

Оценим S^+, S^- оценивается аналогично. Согласно определению нормы Орлича, найдется функция $\zeta = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i \mathbf{1}_{A_i},\ y_i \ge 0$ такая, что

$$\mathbf{E}f(\zeta) = \sum_{i=1}^{k} f(y_i)\mathbf{P}(A_i) \le 1, \quad S^+ \le 2\sum_{i=1}^{k} y_i \|\eta\|_{g,\mathbf{Q}_i^+} \mathbf{P}(A_i), \tag{13}$$

и функции $\theta_i = \sum\limits_{j=1}^{l} x_{ij}\mathbf{1}_{B_j},\ x_{ij} \ge 0,\ i = 1, ..., k$ такие, что

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_i^+} f(\theta_i) = \sum_{j=1}^{l} f(x_{ij})\mathbf{Q}_i^+(B_j) \le 1, \quad \|\eta\|_{g,\mathbf{Q}_i^+} \le 2\sum_{j=1}^{l} v_j x_{ij} \mathbf{Q}_i^+(B_j). \tag{14}$$

Из (13) и (14) с помощью (6) получаем

$$S^+ \le 4\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=l}^{l} x_{ij} y_i v_j \mathbf{Q}_i^+(B_j)\mathbf{P}(A_i) = 4\mathbf{E}_{\mathbf{R}}\eta\zeta\theta \le 4\|\eta\|_{(g,\mathbf{R})}\|\zeta\theta\|_{f,\mathbf{R}}. \tag{15}$$

Здесь $\theta = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=l}^{l} x_{ij}\mathbf{1}_{A_iB_j}$, а мера $\mathbf{R}$ определяется следующим образом: $\mathbf{R}(A_iB_j) =$

$$= \mathbf{Q}_i^+(B_j)\mathbf{P}(A_i) = (\mathbf{P}(A_iB_j) - \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B_j)) \vee 0, \quad \mathbf{R}\left(\bigcup_{i,j} A_iB_j\right) = \sum_{i,j}\mathbf{R}(A_iB_j).$$

Ясно, что $\mathbf{R}(A_iB_j) \le \mathbf{P}(A_iB_j)$, откуда, учитывая (2), выводим

$$\|\eta\|_{(g,\mathbf{R})} \le \|\eta\|_{(g,\mathbf{P})} \le \|\eta\|_{g,\mathbf{P}}. \tag{16}$$

Далее, из (3) следует

$$\|\zeta\theta\|_{f,\mathbf{R}} \le 1 + \mathbf{E}_{\mathbf{R}} f(\zeta\theta) = 1 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=l}^{l} f(x_{ij}y_j)\mathbf{R}(A_iB_j) =$$

$$= 1 + \left(\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + \sum\nolimits_4\right) f(x_{ij}y_j)\mathbf{R}(A_iB_j), \tag{17}$$

где в $\sum_i,\ i = 1,2,3,4$ суммирование производится соответственно по

$$\{i,j : x_{ij} \le x_0,\ y_i \le x_0\}, \quad \{i,j : x_{ij} \le x_0,\ y_i > x_0\},$$

$$\{i,j : x_{ij} > x_0,\ y_i \le x_0\}, \quad \{i,j : x_{ij} > x_0,\ y_i > x_0\},$$

а x_0 – константа из Δ'-условия (7). Учитывая (13) и (14), получаем

$$\sum\nolimits_1 f(x_{ij}y_j)\mathbf{R}(A_iB_j) \le f(x_0^2), \quad \sum\nolimits_2 f(x_{ij}y_j)\mathbf{R}(A_iB_j) \le$$

$$\le \sum_{i,j} f(x_0y_j)\mathbf{R}(A_iB_j) \le af(x_0)\sum_{i=1}^{k} f(y_i)\mathbf{P}(A_i) \le af(x_0),$$

$$\sum\nolimits_3 f(x_{ij}y_j)\mathbf{R}(A_iB_j) \le af(x_0)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f(x_{ij})\mathbf{Q}_i^+(B_j)\mathbf{P}(A_i) \le af(x_0),$$

$$\sum\nolimits_4 f(x_{ij}y_j)\mathbf{R}(A_iB_j) \le a\sum_{i=1}^{k} f(y_i)\mathbf{P}(A_i)\sum_{j=1}^{l} f(x_{ij})\mathbf{Q}_i^+(B_j) \le a.$$

Таким образом, $\|\zeta\theta\|_{f,\mathbf{R}} \le C_1 = 1 + f(x_0) + a(1 + 2f(x_0))$, что вместе с (9), (12), (15) и (16) означает, что

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\,\mathbf{E}\eta| \le 8C_1\psi(n)\|\xi\|_f\|\eta\|_{f^*}, \tag{18}$$

где ξ и η функции вида (8).

Если $\xi \ge 0,\ \eta \ge 0$ измеримы соответственно относительно $\mathcal{F}_{\le 0}$ и $\mathcal{F}_{\ge n}$, то существуют последовательности функций $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ вида (8) и такие, что $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega),\ \eta_n(\omega) \uparrow \eta(\omega),\ n \to \infty$ при любом $\omega \in \Omega$. И если $\mathbf{E}f(|\xi|) < \infty$ и $\mathbf{E}f^*(|\eta|) < \infty$, то по теореме о мажорируемой сходимости $\mathbf{E}\xi_n \to \mathbf{E}\xi$,

$\mathbf{E}\eta_n \to \mathbf{E}\eta,\ \mathbf{E}\xi_n\eta_n \to \mathbf{E}\xi\eta,\ \|\xi_n\|_{f,\mathbf{P}}\| \to \xi\|_{f,\mathbf{P}},\ \|\eta_n\|_{f,\mathbf{P}} \to \|\eta\|_{f,\mathbf{P}},\ n \to \infty$, что вместе с доказанным выше означает, что (18) выполнено для данных $\xi \ge 0$ и $\eta \ge 0$.

Пусть, наконец, ξ и η – произвольные величины, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда $\xi = \xi^+ - \xi^-,\ \eta = \eta^+ - \eta^-,\ \xi^\pm = (\pm\xi) \vee 0,\ \eta^\pm = (\pm\eta) \vee 0$ и

$$|\mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\,\mathbf{E}\eta| \le |\mathbf{E}\xi^+\eta^+ - \mathbf{E}\xi^+\,\mathbf{E}\eta^+| + |\mathbf{E}\xi^+\eta^- - \mathbf{E}\xi^+\,\mathbf{E}\eta^-| +$$

$$+|\mathbf{E}\xi^-\eta^+ - \mathbf{E}\xi^-\,\mathbf{E}\eta^+| + |\mathbf{E}\xi^-\eta^- - \mathbf{E}\xi^-\,\mathbf{E}\eta^-|.$$

Применив к слагаемым в правой части последнего соотношения неравенство (18), получим утверждение теоремы с $C = 32C_1$. ■

Основное предназначение теоремы 1 – это использование техники, основанной на применении аналогов неравенств (1) в ситуациях, когда одна из величин ξ или η не имеет моментов порядка, большего 1 и, следовательно, нет возможности использовать соотношение (1). Однако если $\mathbf{E}|\xi| < \infty$, то можно построить N-функцию $f(x)$ такую, что $\mathbf{E}f(\xi) < \infty$ [2, с. 76]. Покажем один из возможных способов построения N-функции $f(x)$, удовлетворяющей Δ'-условию со сколь угодно медленным ростом $f(x)/x$.

Пусть функция $\varepsilon(t) > 0$ такова, что $\varepsilon(t) \downarrow 0,\ t \to +\infty$, и при некотором $c > 0$

$$\varepsilon(t) + \varepsilon^2(t) + t\varepsilon'(t) \ge 0,\ t \ge c, \quad \int_c^\infty \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = \infty. \tag{19}$$

Можно взять, например, в качестве $\varepsilon(t)$ медленно меняющуюся функцию, в этом случае $t\varepsilon'(t) = o(\varepsilon(t)),\ t \to \infty$ [3, с. 15] и, следовательно, выполняется первое соотношение в (19). При этом $\varepsilon(t)$ можно подобрать так, чтобы обеспечить сколь угодно медленный рост $\int_c^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt$. Положим $f(x) = x\exp\left\{\int_c^x \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt\right\}, x \ge c$. То, что $f(x)$ является N-функцией, проверяется без труда. Поясним лишь доказательство Δ'-условия. При $x, y \ge c \ge 1$ имеем

$$\int_x^{cx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt \le \varepsilon(x)\int_x^{cx} \frac{dt}{t} = o(1),\ x \to \infty,$$

так что

$$\int_c^{xy} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = \int_c^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt + \int_x^{cx} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt + \int_{cx}^{xy} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt \le \int_c^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt + \int_c^{y} \frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt + o(1),$$

откуда следует Δ'-условие для функции $f(x)$.

Литература

1. Ибрагимов, И.А. Независимые и стационарно связанные величины / И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник. – М.: Наука, 1965.
2. Красносельский, М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М.А. Красносельский, Я.Б Рутицкий. – М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1958.
3. Сенета, Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. – М.: Наука, 1985.