

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

Выпуск 18

Омск 2008

Журнал «Математические структуры и моделирование». – Омск,
2008. – Вып. 18. – 126 с.

ISBN

Редакционная коллегия

Главный редактор

А.К. Гуц

д-р физ.-мат. наук, профессор

Н.Ф. Богаченко

к-т физ.-мат. наук

Д.Н. Лавров

к-т техн. наук

Е.В. Палешева

к-т физ.-мат. наук

Художественное оформление

В.В. Коробицын

Адрес научной редакции

Россия, 644053, Омск - 53, ул. Грозненская, 11

Омский государственный университет

факультет компьютерных наук

E-mail: guts@omsu.ru

msm@cmm.univer.omsk.su

ISBN

© Омский госуниверситет, 2008

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике и размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества.

Публикуются также статьи по информационным технологиям, компьютерным наукам, защите информации, философии и истории математики.

Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Журнал является реферируемым. Рефераты статей публикуются в «Реферативном журнале» и в журналах «Zentralblatt für Mathematik» (Германия) и «Mathematical Reviews» (США).

Электронная версия журнала представлена в сети «Интернет» по адресу:

<http://cmm.univer.omsk.su>

Журнал издается на коммерческие средства факультета компьютерных наук Омского государственного университета.

Наш E-mail:

msm@cmm.univer.omsk.su

Подробную информацию можно найти на Web-сервере:

<http://cmm.univer.omsk.su>

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика

А.Г. Гринь. *О минимальных условиях слабой зависимости в предельных теоремах для максимумов с нелинейной нормировкой* 5

И.А. Фирдман. *Алгебраическая классификация физических структур больших рангов* 9

Прикладная математика и моделирование

В.В. Коробицын, Ю.В. Фролова. *Математическая модель развития этнических групп* ... 31

М.В. Кузин. *Особенности моделирования движения плотных групп транспортных средств с учетом изменения поперечного сечения дороги* 43

М.В. Кузин. *Программное обеспечение для имитационного моделирования координированного управления транспортными потоками* 46

В.М. Семенюк, М.Б. Елендо, А.В. Артюхов, А.К. Гуц. *Биомеханический анализ зуба, служащего совместно с имплантантом опорой для мостовидного протеза* 51

Теоретическая физика

С.В. Белим. *Определение значения параметра дальнего действия на основе экспериментальных значений критических индексов* 58

С.В. Белим. *Критическое поведение изотропных трехмерных систем с диполь-дипольным взаимодействием в однопетлевом приближении* 63

А.К. Гуц. *Многовариантность физической реальности, сопутствующая зрению* 71

Р.С. Курманов, Г.Б. Тодер. *Вариационное уравнение для симметричной формы деформированного ядра в модели жидкой капли* 75

продолжение на след. странице



Математическая социология и экономика

Н.А. Букаринова, А.К. Гуц. *Формализация теории борьбы за научный авторитет* 84

Е.В. Ренжина. *Мультиагентное моделирование поведения работников на рынке труда города Омска* 90

Компьютерные науки и защита информации

С.В. Белим, С.Ю. Белим. *Шифрование сообщений на основе собственных функций операторов* 95

С.В. Белим, С.Ю. Белим. *Объектно-ориентированная модель компьютерной системы* 98

Н.Ф. Богаченко. *Шифры замены как примеры дискретных автоматов* 102

Е.В. Венедиктова, Д.Н. Лавров. *Идентификация диктора по фиксированному набору частот с помощью линейного классификатора* . . 108

Информационные технологии

Н.С. Иванова. *Сравнительные характеристики систем электронного документооборота для промышленных предприятий города Омска* 116

О МИНИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ МАКСИМУМОВ С НЕЛИНЕЙНОЙ НОРМИРОВКОЙ

А.Г. Гринь

In this article suggests a minimal in a certain sense conditions of weak dependence, which provided convergence of distributions of maximum random variables to a nondegenerate limit laws.

Пусть $\{\xi_n\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $X_n = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$, $F_n(x) = \mathbf{P}\{X_n < x\}$. Символ $F_n \Rightarrow F$ обозначает, что $\{F_n\}$ слабо сходится к F .

Если $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных величин, то в качестве предельных (в смысле слабой сходимости) функций распределения для $F_n(a_n + xb_n)$ при некотором выборе нормирующих констант a_n и b_n могут выступать лишь три типа распределений со следующими представителями:

- 1 тип: $\exp\{-x^{-\rho}\}, x > 0, \rho > 0$,
- 2 тип: $\exp\{-(-x)^{\rho}\}, x \leq 0, \rho > 0$,
- 3 тип: $\exp\{-e^{-x}\}, x > 0$.

Это классические результаты Б.В. Гнеденко (см., напр. [1]).

В статье [2] получены минимальные в некотором смысле условия слабой зависимости для стационарных последовательностей, обеспечивающие сходимость $F_n(a_n + xb_n)$ к распределению первого типа. Для распределения второго типа такие же условия легко получаются аналогичными рассуждениями.

Вместе с тем, если в качестве нормирующих преобразований вместо линейных функций $a_n + xb_n$ использовать суперпозиции специально подобранных монотонных функций, то все типы предельных распределений можно свести лишь к одному, третьему закону [3, гл.5].

В данной работе как раз и изучаются предельные теоремы для величин $Z_n = G_n^{-1}(X_n)$, где нормирующие преобразования G_n – это последовательность функций, относительно которых мы будем делать предположения, использующиеся в предельных теоремах в схеме обобщенного суммирования, излагаемых

в [3, гл.5]. Предполагается что $G_n(x)$ - последовательность непрерывных строго возрастающих функций на $(0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям (условия (G)):

G1. Для любого $0 < \theta \leq 1$ и любого $x > 0$ существует предел

$$\Xi_\theta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{m_n}^{-1}(G_n(x)),$$

если только $m_n/n \rightarrow \theta$, $n \rightarrow \infty$.

G2. Функция $\Xi_\theta(x)$ при заданном x и разных θ принимает различные значения.

Доказывается следующее утверждение [3, лемма 5.3.1]:

Функция $\Xi_\theta(x)$ при любых $x > 0$, $u, v \in (0, 1)$ является решением функционального уравнения $\Xi_u(\Xi_v(x)) = \Xi_{uv}(x)$ и имеет вид $\Xi_\theta(x) = h^{-1}(h(x) - \ln \theta)$, где $h(x)$ - непрерывная и строго возрастающая функция, областью значений которой является некоторый интервал (c, ∞) , $c = h(0) \geq -\infty$.

Пусть $\mathbf{P}\{\xi_1 < x\} < 1$, $x > 0$. Из теоремы 5.3.5 в [3] следует, что

$$\mathbf{P}\{G_n^{-1}(X_n) < x\} = F_n(G_n(x)) \Rightarrow H(x), \quad (1)$$

($H(x)$ - функция распределения невырожденной случайной величины) тогда и только тогда, когда при $x \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\} = L(h(x)) \exp\{-h(x)\}, \quad (2)$$

где $L(x)$ - медленно меняющаяся функция при $x \rightarrow \infty$. Если выполнено (2), то $H(x) = \exp\{-\exp\{-h(x)\}\}$, а в качестве нормирующих преобразований можно взять

$$G_n(x) = h^{-1}(h(x) + \ln(nL(\ln n))). \quad (3)$$

Как и в [2], символ $n + m \rightarrow \infty$ в каком-либо соотношении будет означать, что указанное соотношение выполняется при $n \rightarrow \infty$ и при любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ - стационарная последовательность, для которой выполнено (2) и пусть нормирующие преобразования определяются соотношением (3). Для того чтобы $F_n(G_n(x)) \Rightarrow \exp\{-\exp\{-h(x)\}\}$, $n \rightarrow \infty$, $x > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения:

а)

$$F_{n+m}(G_{n+m}(x)) - F_n(G_{n+m}(x))F_m(G_{n+m}(x)) \rightarrow 0, \quad n + m \rightarrow \infty; \quad (R_1)$$

б) при любом $x > 0$ и при любой достаточно медленно растущей последовательности $k = k(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{X_n \geq G_{nk}(x)\} \sim n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq G_{nk}(x)\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (R_2)$$

Замечание 1. Теорему 1 можно интерпретировать так: условия (R_1) и (R_2) являются минимальными условиями слабой зависимости, при которых выполняются предельные теоремы о сходимости к распределениям третьего типа с той же нормировкой, что и в предельных теоремах для независимых величин.

Замечание 2. Достаточные условия для выполнения (R_1) и (R_2) в терминах «традиционных» условий слабой зависимости приведены в [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1.

Необходимость. Пусть $F_n(G_n(x)) \Rightarrow \exp\{-\exp\{-h(x)\}\}$, $n \rightarrow \infty$. Функция $\exp\{-h(x)\}$ непрерывна при $x > 0$, поэтому слабая сходимость равносильна поточечной: $F_n(G_n(x)) \rightarrow \exp\{-\exp\{-h(x)\}\}$, $x > 0$. Пусть $m = m(n)$ – произвольная последовательность натуральных чисел. При $x > 0$ обозначим

$$\Delta(n) = |F_{n+m}(G_{n+m}(x)) - F_n(G_{n+m}(x))F_m(G_{n+m}(x))|.$$

Для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leq \theta \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$\frac{n_2}{n_2 + m_2} \rightarrow \theta, \quad \frac{m_2}{n_2 + m_2} \rightarrow 1 - \theta, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Пусть сначала $0 < \theta < 1$. В силу свойства $G1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n_2}(G_{n_2+m_2}(x)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{G_{n_2+m_2}^{-1}(X_{n_2}) < x\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{G_{n_2}^{-1}(X_{n_2}) < G_{n_2}^{-1}(G_{n_2+m_2}(x))\} = H(\Xi_\theta(x)) = \\ &= H(h^{-1}(h(x) - \ln \theta)) = \exp\{-\theta \exp\{-h(x)\}\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{m_2}(G_{n_2+m_2}(x)) = \exp\{-(1 - \theta) \exp\{-h(x)\}\}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Если Y_n и Z_n – последовательности случайных величин и $Z_n \rightarrow 0$ по вероятности, то при $x > 0$

$$0 \leq \mathbf{P}\{Y_n < x\} - \mathbf{P}\{\max\{Y_n, Z_n\} < x\} \leq \mathbf{P}\{Z_n \geq x\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Пусть $\theta = 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$, $x > 0$ $F_{n_2}(G_{n_2+m_2}(x)) \rightarrow 1$, $(G_{n_2+m_2}^{-1}(X_{n_2}) \rightarrow 0$ по вероятности) и в силу (6)

$$F_{m_2}(G_{n_2+m_2}(x)) - F_{n_2+m_2}(G_{n_2+m_2}(x)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть снова $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Аналогично рассматривается случай $\theta = 1$. Все сказанное означает, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность $\{\Delta(n_2)\}$. Следовательно, $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ и мы показали, что выполнено условие (R_1) .

Докажем (R₂). В силу (3)

$$h(G_n(x)) = h(x) + \ln n + \ln L(\ln n). \quad (7)$$

Медленно меняющаяся функция $L(x)$ обладает свойством $\ln L(x)/\ln x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ [4, с.48], так что из (7) следует $h(G_n(x)) \sim \ln n$, $n \rightarrow \infty$, а из (3) –

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \geq G_n(x)\} \sim L(\ln n) \exp\{-h(x) - \ln n - \ln L(\ln n)\} = n^{-1} \exp\{-h(x)\}. \quad (8)$$

Если $k = k(n) \rightarrow \infty$ растет достаточно медленно, то в силу (1), (R₁) и (8)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_n \geq G_{nk}(x)\} &= 1 - F_{nk}^{\frac{1}{k}}(G_{nk}(x))(1 + o(1)) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{k}e^{-h(x)}\right\}(1 + o(1)) = \\ &= \frac{1}{k} \exp\{-h(x)\}(1 + o(1)) = n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq G_{nk}(x)\}(1 + o(1)). \end{aligned} \quad (9)$$

(R₂) доказано.

Достаточность.

Пусть выполнены условия (R₁) и (R₂), $k = k(n) \rightarrow \infty$, $n = km + r$, $0 \leq r < m$. С помощью (6) и условия (R₁) при k растущем достаточно медленно получаем

$$F_n(G_n(x)) = F_m^k(G_n(x)) + o_n(1) = (1 - \mathbf{P}\{X_m > G_n(x)\})^k + o_n(1). \quad (10)$$

Так как $n^{-1}km \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, то $G_n(x) \sim G_{mk}(x)$, $n \rightarrow \infty$ и из условия (R₂) и (9) вытекает

$$\mathbf{P}\{X_m > G_n(x)\} = \mathbf{P}\{X_m > G_{mk}(x)\}(1 + o_n(1)) = \frac{1}{k} \exp\{-h(x)\}(1 + o_n(1)). \quad (11)$$

Из (10) и (11) выводим

$$F_n(G_n(x)) = \left(1 - \frac{1}{k} \exp\{-h(x)\}(1 + o_n(1))\right)^k + o_n(1) \rightarrow \exp\{-\exp\{-h(x)\}\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Галамбош Я. Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.
2. Гринь А.Г. Минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для максимумов // Математические структуры и моделирование. 2006. Вып. 16. С. 21-25.
3. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986. 415 с.
4. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР БОЛЬШИХ РАНГОВ

И.А. Фирдман

В статье задается алгебраическая аксиоматика физических структур и доказывается классификационная теорема для структур ранга, большего $(3, 3)$.

Введение

Принцип феноменологической симметрии был введен в 1960-х годах Ю. И. Кулаковым [5–8] как новый аксиоматический подход в физике и геометрии (теория физических структур). Говоря в максимальной общности, физической структурой называется многоосновная алгебраическая система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle \rangle)$, где $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, R — множества произвольной природы (возможно, с заданной на них дополнительной структурой), $\langle \rangle$ — отображение $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow R$. Предполагается также наличие пары натуральных чисел m , n (говорят о физической структуре ранга $(n+1, m+1)$), таких, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ обладают в некотором смысле размерностью m и n соответственно над R , и наборы из mn комбинаций n -ок элементов из $\mathcal{M}$ и m -ок элементов из $\mathcal{N}$ посредством биформы $\langle \rangle$ зависимы в определенном смысле. Кулаковым была построена развитая затем Г.Г. Михайличенко аналитическая интерпретация принципа феноменологической симметрии и даны его применения в физике и геометрии [5–8, 10–12, 14]. Множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ при этом понимались (в случае физической интерпретации) как множества физических объектов, в качестве R рассматривалось множество вещественных чисел — доступный измерению результат взаимодействия пар объектов из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Михайличенко был доказан ряд классификационных теорем [9, 13] для аналитических физических структур, позволяющих определять конкретный вид биформы $\langle \rangle$ из достаточно общих условий феноменологической симметрии ее действия, что можно было в некоторой перспективе интерпретировать как возможность выводить точные формулы физических законов, исходя из некоторых достаточно общих сведений об их структуре на уровне метаязыка.

Между тем для формулировки основных идей и результатов ранней теории физических структур не требовалась, по сути, аналитичность функции и даже наличие аналитической структуры в множестве R . Это наблюдение послужило

толчком к развитию алгебраической ветви теории физических структур, рассматривавшей в качестве R произвольное множество и отказывавшейся, таким образом, от требований аналитичности. Первая алгебраическая аксиоматика теории физических структур была дана в 1990-м году В. К. Иониным в работе [3] (для физических структур ранга $(2,2)$ с отождествлением $\mathcal{M} = R = \mathcal{N}$). Им было показано, для ранга $(2,2)$ наличие на R бинарной операции, согласующейся некоторым естественным образом с $\langle \rangle$ (и описывающей ее действие) и задающей на R структуру группы. Тем самым была, с одной стороны, дана аксиоматика абстрактной группы на основе феноменологической симметрии, с другой стороны, построена классификация алгебраических (абстрактных) физических структур ранга $(2,2)$ (в предложенной аксиоматике). В работе [4] Иониным была сформулирована аксиоматика теории физических структур в большой степени общности и указана возможность получения из нее, в частности, алгебраической аксиоматики.

Отталкиваясь от работ Ионина, А.А. Симонов [15, 16] построил алгебраическую аксиоматику бинарной физической структуры произвольного ранга, некоторым образом конкретизирующую аксиоматику [4]. На ее основе им было доказано (для структур ранга $(n+1, 2)$ при произвольном $n \geq 2$) существование согласованных с действием $\langle \rangle$ бинарных операций $\cdot$ и $\oplus$ на R , определяющих на R , при дополнительных предположениях, структуру почти кольца, и указаны возможности применения соответствующего результата к классификации физических структур соответствующих рангов. В работе [17] идеи феноменологической симметрии структуры ранга $(3, 2)$ были использованы Симоновым для построения связи между точно дважды транзитивными группами и алгебраическими системами, близкими к почти области.

В работах автора [18, 19] исследуются алгебраические аспекты феноменологической симметрии для физических структур более высоких рангов в аксиоматике, родственной аксиоматике Симонова, с дополнительным условием наличия вырожденных элементов (нулей) в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, а также (в [19]) наделенных топологией. В [18] проводится их классификация, позволяющая, в частности, дать основанную на принципе феноменологической симметрии аксиоматику пары векторных пространств над телом R , связанную невырожденной билинейной формой (не задавая при этом явным образом структуры тела на R).

Данная работа обобщает работы [18, 19] автора на случай отсутствия нулей в $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, упрощая тем самым аксиоматику и позволяя расширить класс объектов, определяемых посредством феноменологической симметрии.

1. Алгебраическая классификация физических структур

1.1. Некоторые факты из теории билинейных форм

Приведем для полноты изложения некоторые факты из теории билинейных форм, на которые мы будем опираться в этом разделе. Все факты, даются по [2].

Далее в этом пункте F — тело, V — левое линейное пространство над F , W — правое линейное пространство над F , $\Phi : V \times W \rightarrow F$ — билинейная форма.

Теорема 1. Пусть V и W конечномерны над F . Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. Φ невырождена слева;
2. Φ невырождена справа;
3. Φ невырождена.

Теорема 2. Пусть V, W конечномерны над F , билинейная форма Φ , определенная над ними, невырождена. Тогда $\dim V = \dim W$, и для всякого базиса (e_k) пространства V существует такой базис (f_l) пространства W , что $\Phi(e_k, f_l) = \delta_{kl}$ ($k, l = 1, \dots, \dim V$, δ_{kl} — символ Кронекера).

Базисы $(e_k), (f_l)$, описанные в теореме 2, будем называть дуальными базисами пространств V, W .

Лемма 1. Пусть $(e_k), (f_l)$ — дуальные базисы конечномерных пространств V, W соответственно, форма Φ невырождена. Тогда для любых $x \in V, y \in W$

$$\Phi(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad (1)$$

где $n = \dim V = \dim W$, $x_k = \Phi(x, f_k)$, $y_k = \Phi(e_k, y)$, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Пусть $x = \sum_{k=1}^n x'_k \cdot e_k$ — разложение x по базису e_k . Тогда для произвольного $k = 1, \dots, n$ $x_k = \Phi(x, f_k) = \sum_{l=1}^n x'_l \cdot \Phi(e_l, f_k) = x'_k$. Таким образом, $x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot e_k$ и аналогично $y = \sum_{k=1}^n f_k \cdot y_k$. Теперь, расписывая $\Phi(x, y)$ по билинейности и пользуясь тождеством $\Phi(e_k, f_l) = \delta_{kl}$, сразу получаем (1). ■

1.2. Система аксиом и формулировка основной теоремы

1.2.1. Базовая система аксиом

Пусть дана (многоосновная) алгебраическая система $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle, \rangle)$, где $\mathcal{M}, \mathcal{N}, R$ — произвольные множества (R содержит более одного элемента), $\langle, \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow R$ — некоторое отображение, называемое *биформой* и удовлетворяющее условию *невырожденности*:

для любых $i, i' \in \mathcal{M}$, $i \neq i'$ найдется $\alpha \in \mathcal{N}$, такой, что $\langle i, \alpha \rangle \neq \langle i', \alpha \rangle$,

для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, $\alpha \neq \alpha'$ найдется $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \alpha \rangle \neq \langle i, \alpha' \rangle$.

(то есть элементы $\mathcal{M}$ и, соответственно, $\mathcal{N}$ считаются равными, если $\langle, \rangle$ действует на них одинаково).

Мы считаем заданными также целые положительные числа n и m ; пару $(n+1, m+1)$ будем называть *рангом* данной системы.

В дальнейшем мы будем использовать следующую сокращенную форму записи: для $i_1, \dots, i_k, i \in \mathcal{M}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha \in \mathcal{N}$ мы можем обозначить $(i_1, \dots, i_k) =$

$I \in \mathcal{M}^k$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^l$. В этом случае будем под $\langle I, \alpha \rangle$ понимать вектор (здесь и далее мы, допуская некоторую вольность в употреблении терминов, называем так упорядоченные наборы элементов R , не подразумевая этим наличия линейной структуры) $(\langle i_1, \alpha \rangle, \dots, \langle i_k, \alpha \rangle) \in R^k$, под $\langle i, \mathfrak{A} \rangle$ — вектор $(\langle i, \alpha_1 \rangle, \dots, \langle i, \alpha_l \rangle) \in R^l$, под $\langle I, \mathfrak{A} \rangle$ — матрицу

$$\langle I, \mathfrak{A} \rangle = \begin{pmatrix} \langle i_1, \alpha_1 \rangle & \dots & \langle i_1, \alpha_l \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle i_k, \alpha_1 \rangle & \dots & \langle i_k, \alpha_l \rangle \end{pmatrix} \in R^{kl}.$$

Мы будем часто иметь дело с отображениями $\langle I, \cdot \rangle : \mathcal{N} \rightarrow R^k$, $I \in \mathcal{M}^k$, определенными по правилу $\langle I, \cdot \rangle : \alpha \mapsto \langle I, \alpha \rangle$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Будем в случаях, когда сочтем это удобным, обозначать такие отображения как $\pi_I : \mathcal{N} \rightarrow R^k$. Аналогично определенные отображения $\langle \cdot, \mathfrak{A} \rangle : \mathcal{M} \rightarrow R^k$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$ будем обозначать $\pi_{\mathfrak{A}} : \mathcal{M} \rightarrow R^k$.

Пусть заданы некоторые упорядоченные наборы $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{M}^n$ и $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathcal{N}^m$; мы будем далее называть их базами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно.

Пусть выполняются следующие аксиомы на $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (будем называть их базовым набором аксиом).

Аксиома А1 Пусть $I' \in \mathcal{M}^n$, $i, i' \in \mathcal{M}$, $\mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^m$, $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$. Пусть $\langle Z, \mathfrak{A}' \rangle = \langle I', \Omega \rangle$, $\langle i', \Omega \rangle = \langle i, \mathfrak{A}' \rangle$, $\langle Z, \alpha' \rangle = \langle I', \alpha \rangle$. Тогда $\langle i', \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$.

Аксиома А2 Для любого $r \in R^n$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \alpha \rangle = r$; для любого $r \in R^m$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \Omega \rangle = r$.

Введем на $\mathcal{M}$ следующее отношение *зависимости*. Будем говорить, что $i \in \mathcal{M}$ зависит от системы элементов $(i_1, \dots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, если для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$

$$\langle I, \alpha \rangle = \langle I, \alpha' \rangle \text{ влечет } \langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle.$$

Совокупность всех элементов $\mathcal{M}$, зависящих от $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$, будем обозначать $[i_1, \dots, i_k]$. Будем называть систему элементов $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$ *независимой*, если она не зависит ни от какой меньшей системы элементов $\mathcal{M}$, то есть не существует таких $i'_1, \dots, i'_{k-1} \in \mathcal{M}$, что $i_1, \dots, i_k \in [i'_1, \dots, i'_{k-1}]$. В случае $k = 1$ независимость элемента i означает, что $i \notin [\emptyset]$. Значение зависимости такого рода будет детально рассмотрено позже.

Аналогично определяется отношение зависимости на $\mathcal{N}$ и вытекающие из него понятия.

Будем предполагать выполненной следующую аксиому.

Аксиома А3 Пусть $k \in \{1, 2, 3\}$, $(i_1, \dots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$ независимы. Тогда для любого вектора $r \in R^k$ найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle I, \alpha \rangle = r$. Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$ независимы. Тогда для любого $r \in R^k$ найдется такой $i \in \mathcal{M}$, что $\langle i, \mathfrak{A} \rangle = r$.

Определение 1. Многоосновную алгебраическую систему $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle, \rangle)$, удовлетворяющую указанным выше условиям (R содержит более одного элемента, биформа невырождена, выполняются аксиомы A1, A2, A3), будем называть (абстрактной) физической структурой ранга $(n + 1, m + 1)$.

Определение 2. Две физические структуры $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle, \rangle)$ и $(\mathcal{M}', \mathcal{N}', R', \langle, \rangle')$ ранга $(n + 1, m + 1)$ будем называть сильно эквивалентными, если найдутся такие биективные отображения $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$, $\nu : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$, что для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ будет выполнено

$$\langle \mu(i), \nu(\alpha) \rangle' = \langle i, \alpha \rangle.$$

1.2.2. Дополнительные аксиомы

Как было показано в [18], из базовых аксиом A1–A3 получаются следующие утверждения (которые мы будем называть аксиомами A4–A6; вся совокупность аксиом A1–A6 при этом, конечно, может быть (и будет) зависима).

Аксиома A6 Если $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, то из $\langle Z, \alpha \rangle = \langle Z, \alpha' \rangle$ следует $\alpha = \alpha'$. Если $i, i' \in \mathcal{M}$, то из $\langle i, \Omega \rangle = \langle i', \Omega \rangle$ следует $i = i'$.

Нами получена, с учетом аксиомы A2, биективность отображений π_Z и π_Ω (будем называть их координатизирующими отображениями). Для произвольного элемента $i \in \mathcal{M}$ будем теперь называть вектор $\langle i, \mathfrak{A} \rangle \in R^m$ дуальными координатами i (в базе Ω); аналогично для $\alpha \in \mathcal{N}$ будем называть $\langle I, \alpha \rangle \in R^n$ дуальными координатами α (в базе Z).

Определим для каждого элемента $i \in \mathcal{M}$ функцию $U[i] : R^n \rightarrow R$ следующим равенством:

$$U[i](\langle Z, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle \text{ для всех } \alpha \in \mathcal{N}.$$

Определение корректно в силу аксиомы A6; функции определены на всем R^n в силу аксиомы A2. Пусть теперь

$$U_{\mathcal{M}}^n = \{U[i] \mid i \in \mathcal{M}\}.$$

Для $k = 0, \dots, n$ определим $U_{\mathcal{M}}^k$ как подмножество функций из $U_{\mathcal{M}}^n$, постоянных на последних $n - k$ координатах (и рассматриваемых лишь на первых k — элементы $U_{\mathcal{M}}^k$ являются функциями $R^k \rightarrow R$). Обозначим $U_{\mathcal{M}} = \bigsqcup_{k=0}^n U_{\mathcal{M}}^k$. Заметим, что оператор $U : \mathcal{M} \rightarrow U_{\mathcal{M}}^n$ не только сюръективен, но и инъективен. Действительно, пусть $i, i' \in \mathcal{M}$, $U[i] = U[i']$. Тогда $\langle i, \alpha \rangle = U[i](\langle Z, \alpha \rangle) = \langle i', \alpha \rangle$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$, откуда, ввиду невырожденности биформы, $i = i'$. Таким образом, оператор U обратим. Далее мы будем обозначать за $V : U_{\mathcal{M}}^n \rightarrow \mathcal{M}$ обратный оператор, сопоставляющий каждой функции из $U_{\mathcal{M}}^n$ элемент $\mathcal{M}$, которым она задана.

Аналогично с помощью базы Ω определяется набор функций $U_{\mathcal{N}}$ и операторы $U : \mathcal{N} \rightarrow U_{\mathcal{N}}^m$ и $V : U_{\mathcal{N}}^m \rightarrow \mathcal{N}$.

Введем для удобства обозначений следующие операторы: $L_k : U_{\mathcal{M}}^k \rightarrow U_{\mathcal{M}}^n$, $P_k : U_{\mathcal{M}}^n \rightarrow U_{\mathcal{M}}^k$, $L_l^k : U_{\mathcal{M}}^l \rightarrow U_{\mathcal{M}}^k$, $P_l^k : U_{\mathcal{M}}^k \rightarrow U_{\mathcal{M}}^l$, $k, l = 0, \dots, n$, $l \leq k$. P_k —

это оператор, сопоставляющий функции из $U_{\mathcal{M}}^n$ постоянной на последних $n - k$ координатах, соответствующую функцию из $U_{\mathcal{M}}^k$ (ее ограничение на первые k координат). На других функциях из $U_{\mathcal{M}}^n$ P_k не определяется. L_k — это оператор, обратный к P_k . Он определен на всем $U_{\mathcal{M}}^k$, согласно определению $U_{\mathcal{M}}^k$. По определению полагаем $L_l^k = P_k \circ L_l$, $P_l^k = L_l \circ P_k$. Аналогично действующие операторы вводятся и для функций из $U_{\mathcal{N}}$. Обозначать мы их будем так же — область определения всякий раз будет очевидна из контекста.

Отметим некоторые свойства $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$.

Аксиома А4 Множества функций $U_{\mathcal{M}}$, $U_{\mathcal{N}}$ замкнуты относительно взятия суперпозиции (в которой участвуют функции лишь из одного множества).

Аксиома А5 Пусть $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{M}^k$, $u \in U_{\mathcal{M}}^k$. Тогда найдется такой элемент $i \in [i_1, \dots, i_k]$, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle I, \alpha \rangle)$. Аналогичное утверждение справедливо для $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathcal{N}$, $u \in U_{\mathcal{N}}^k$.

Как показано в [18], аксиомы А4 и А5 эквивалентны при выполнении аксиом А1, А2, А6.

Мы можем теперь ввести для каждого набора $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{M}^k$ оператор $V_I[u] : U_{\mathcal{M}}^k \rightarrow [i_1, \dots, i_k] \subseteq \mathcal{M}$, определенный на всем $U_{\mathcal{M}}^k$, следующим образом: для $u \in U_{\mathcal{M}}^k$ полагаем $V_I[u] = i \in [i_1, \dots, i_k]$, такому, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle I, \alpha \rangle)$.

Мы определим также обратные операторы $U_I : [i_1, \dots, i_k] \rightarrow R^{R^k}$, сопоставляющие каждому элементу $i \in [i_1, \dots, i_k]$ функцию $u : R^k \rightarrow R$ (не обязательно лежащую в $U_{\mathcal{M}}^k$), такую, что для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle I, \alpha \rangle)$.

Аналогично вводятся операторы $V_{\mathfrak{A}}$, $U_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^k$.

1.2.3. Формулировка классификационной теоремы

Пусть F — произвольное тело. Далее нам понадобятся обозначения для следующих множеств функций n переменных над F .

$$\begin{aligned} L_n^l(F) &= \{f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n \mid a_1, \dots, a_n \in F\}; \\ L_n^{l,a}(F) &= \{f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n + a_{n+1} \mid a_1, \dots, a_{n+1} \in F\}; \\ L_n^{l,s}(F) &= \{f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n \mid \\ &\quad a_1, \dots, a_n \in F, a_1 + \dots + a_n = e\}; \\ L_n^{l,s,a}(F) &= \{f(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n + a_{n+1} \mid \\ &\quad a_1, \dots, a_{n+1} \in F, a_1 + \dots + a_n = e\}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, но с домножением переменных $x_1, \dots, x_n$ на $a_1, \dots, a_n$ справа определяются множества функций $L_n^r(F)$, $L_n^{r,a}(F)$, $L_n^{r,s}(F)$, $L_n^{r,s,a}(F)$.

Теорема 3. Пусть для системы $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, R, \langle, \rangle)$ ранга $(n + 1, t + 1)$, такого, что $t, n \geq 2$, $(n + 1, t + 1) \neq (3, 3)$, выполнена следующая совокупность аксиом: А2, А3, одно из следующих трех сочетаний: А1; А4 и А6; А5 и А6, а также невырожденность биформы и наличие в R более, чем одного элемента.

Тогда

1. Мы можем выбрать элементы $O, e \in R$ (при этом в качестве e можно взять произвольный элемент R , не равный O) и задать на R бинарные операции $+$ и $\cdot$ так, что $(R, +, \cdot, O, e)$ будет телом.
2. $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются, соответственно, левым m -мерным и правым n -мерным линейными пространствами над телом R , определенным в предыдущем пункте.
3. $m = n$, $m = n + 1$ или $m = n - 1$.
4. Можно выбрать такие наборы элементов $(z'_1, \dots, z'_n) = Z' \in \mathcal{M}^n$, $(\omega'_1, \dots, \omega'_m) = \Omega' \in \mathcal{N}^m$, что отображения $\langle Z', \cdot \rangle : \mathcal{N} \rightarrow R^n$ и $\langle \cdot, \Omega' \rangle : \mathcal{M} \rightarrow R^m$ биективны и для любых $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$ биформа $\langle \cdot, \cdot \rangle$ представляется в одном из следующих видов (в первом и последнем случаях $m = n$, во втором — $m = n + 1$, в третьем — $m = n - 1$):

$$\langle i, \alpha \rangle = x_1 \cdot \xi_1 + \dots + x_n \cdot \xi_n; \quad (2)$$

$$\langle i, \alpha \rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \dots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1}; \quad (3)$$

$$\langle i, \alpha \rangle = x_1 \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \dots + x_{n-1} \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + \xi_n; \quad (4)$$

$$\langle i, \alpha \rangle = (x_1 - x_n) \cdot (\xi_1 - \xi_n) + \dots + (x_{n-1} - x_n) \cdot (\xi_{n-1} - \xi_n) + x_n + \xi_n, \quad (5)$$

где $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \dots, x_m)$, $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $+$ и $\cdot$ — операции в теле R .

5. Наборы функций $U_{\mathcal{M}}^n$ и $U_{\mathcal{N}}^m$, определенных в аксиомах A4 и A5, имеют следующий вид, в зависимости от того, какой из формул (2)–(5) задана $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$(2) : U_{\mathcal{M}}^n = L_n^l(R), U_{\mathcal{N}}^m = L_n^r(R);$$

$$(3) : U_{\mathcal{M}}^n = L_n^{l,a}(R), U_{\mathcal{N}}^m = L_{n+1}^{r,s}(R);$$

$$(4) : U_{\mathcal{M}}^n = L_n^{l,s}(R), U_{\mathcal{N}}^m = L_{n-1}^{r,a}(R);$$

$$(5) : U_{\mathcal{M}}^n = L_n^{l,s,a}(R), U_{\mathcal{N}}^m = L_n^{r,s,a}(R).$$

Замечание 1. Теорема классифицирует физические структуры соответствующего ранга с точностью до сильной эквивалентности. Отметим, что примеры структур, для которых выполняются приведенные теоремы формулы, нетрудно построить на основе пространств строк (см. [20]), и, таким образом, теорема является содержательной.

Отметим, что формула (5) для биформы появлялась ранее как пример в работе А.А. Симонова [17].

Как было отмечено выше, вариант аксиоматики A2, A3, A4 (или A5), A6 является слабейшим из рассматриваемых в условии, поэтому нам достаточно доказать теорему только для него, причем мы можем считать выполненными сразу обе аксиомы A4, A5 как эквивалентные по модулю остальных.

1.3. Доказательство теорем

Мы предполагаем далее выполненными утверждения аксиом А2, А3, А4, А5, А6 (которые выполняются в любом из вариантов аксиоматики теоремы 3). Аксиома А1 прямо использоваться не будет.

1.3.1. Предварительные леммы

Отметим, что пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в условиях доказываемой теоремы симметричны. Поэтому, помимо каждого из сформулированных здесь утверждений, будет подразумеваться выполненным также и утверждение, получаемое из него перестановкой множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ролями (мы не будем формулировать их отдельно). Иногда мы будем называть такие утверждения дуальными.

В этом пункте не будет использоваться аксиома А3.

Далее всюду, где не оговорено противного, k предполагается произвольным целым числом от 1 до n .

Напомним сначала следующие утверждения, доказанные в [18] (при их доказательстве использовались лишь аксиомы А1-А6 и не использовалась определенная в [18] дополнительная аксиома А0).

Лемма 2. *Набор $U_{\mathcal{M}}^k$ содержит все функции $u_t : R^k \rightarrow R$, такие, что $\rho_t(r_1, \dots, r_k) = r_t$ для любых $r_1, \dots, r_k \in R$, $t = 1, \dots, k$. Будем называть такие функции координатными.*

Далее мы закрепим обозначение ρ_t (t — целое) для координатных функций $R^k \rightarrow R$ (всюду, где это будет неочевидно, мы будем явно указывать k).

Лемма 3. *Пусть $\tau : R^k \rightarrow R^k$ — некоторая перестановка координат в декартовом произведении: для любых $r_1, \dots, r_k \in R^k$ полагаем $\tau(r_1, \dots, r_k) = (r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(k)})$, где $\sigma \in S_k$. Пусть $u \in U_{\mathcal{M}}^k$. Тогда $u \circ \tau \in U_{\mathcal{M}}^k$.*

Следующее утверждение (формулирующееся несколько более общим образом) показывает, что функции из наборов $U_{\mathcal{M}}$ и $U_{\mathcal{N}}$ коммутируют между собой, при надлежащем понимании их суперпозиции.

Предложение 1. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий.*

1. $(i_1, \dots, i_k) = I \in \mathcal{M}^k$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = \mathfrak{A} \in \mathcal{N}^l$, $a_{pq} = \langle i_p, \alpha_q \rangle$, $p = 1, \dots, k$, $q = 1, \dots, l$, и заданы некоторые функции: $u^* \in U_{\mathcal{N}}^l$; $u : R^k \rightarrow R$, определенная как $u = U_I[i]$ для некоторого $i \in [i_1, \dots, i_k]$.
2. a_{pq} , $p = 1, \dots, k$, $q = 1, \dots, l$ — произвольные элементы R , $u \in U_{\mathcal{M}}^k$, $u^* \in U_{\mathcal{N}}^l$.

Тогда

$$\begin{aligned} u(u^*(a_{11}, \dots, a_{1l}), \dots, u^*(a_{k1}, \dots, a_{kl})) = \\ = u^*(u(a_{11}, \dots, a_{k1}), \dots, u(a_{1l}, \dots, a_{kl})). \end{aligned}$$

Сформулируем еще следующие два тривиальных утверждения, связанных с понятием зависимости.

Лемма 4. Если $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$, $i'_1, \dots, i'_l \in [i_1, \dots, i_k]$, то $[i'_1, \dots, i'_l] \subseteq [i_1, \dots, i_k]$.

Лемма 5. $[z_1, \dots, z_n] = \mathcal{M}$.

Следующие два утверждения связывают понятие зависимости с функциями из $U_{\mathcal{M}}$ на уровне дуальных координат.

Лемма 6. Пусть элементы $i_1, \dots, i_k, i \in \mathcal{M}$ имеют в базе Ω дуальные координаты $(a_1^1, \dots, a_1^m), \dots, (a_k^1, \dots, a_k^m), (a^1, \dots, a^m)$ соответственно, и существует такая $u \in U_{\mathcal{M}}^k$, что $a^t = u(a_1^t, \dots, a_k^t)$, $t = 1, \dots, m$. Тогда $i = V_I[u] \in [i_1, \dots, i_k]$, где $I = (i_1, \dots, i_k)$.

Отметим, что некоторые из исходных посылок следующих двух утверждений носят искусственный характер, но будут доказаны в дальнейшем при малых k .

Лемма 7. Предположим, что для $I = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{M}^k$ область значений оператора U_I лежит в $U_{\mathcal{M}}^k$. Пусть элементы $i_1, \dots, i_k, i \in \mathcal{M}$ имеют в базе Ω дуальные координаты $(a_1^1, \dots, a_1^m), \dots, (a_k^1, \dots, a_k^m), (a^1, \dots, a^m)$ соответственно, и при этом $i \in [i_1, \dots, i_k]$. Тогда существует такая $u \in U_{\mathcal{M}}^k$, что $a^t = u(a_1^t, \dots, a_k^t)$, $t = 1, \dots, m$ (причем $u = U_I[i]$).

Доказательство. Если $i \in [i_1, \dots, i_k]$, то для $u = U_I[i] \in U_{\mathcal{M}}^k$ выполнено $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle i_1, \alpha \rangle, \dots, \langle i_k, \alpha \rangle)$ (для всех $\alpha \in \mathcal{N}$). Подставляя сюда $\alpha = \omega_1, \dots, \omega_m$, получаем требуемое. ■

Дополнительное предположение, при котором будет выполняться следующее предложение 2, удобно будет сформулировать отдельно. Отметим, что это будет фактически несколько различных предположений, могущих быть сформулированными отдельно для каждого интересующего нас значения k .

Условие У1 Фиксируем k . Пусть $(i'_1, \dots, i'_k) = I' \in \mathcal{M}^k$, $i_1, \dots, i_k \in [i'_1, \dots, i'_k] \subseteq \mathcal{M}$ независимы, $u_1 = U_{I'}[i_1], \dots, u_k = U_{I'}[i_k]$. Тогда отображение $(u_1, \dots, u_k) : R^k \rightarrow R^k$ (декартово произведение k отображений $R^k \rightarrow R$) биективно, и найдутся такие $u'_1, \dots, u'_k \in U_{\mathcal{M}}^k$, что отображение $(u'_1, \dots, u'_k) : R^k \rightarrow R^k$ является обратным к отображению $(u_1, \dots, u_k)$.

Предложение 2. Фиксируем k , для которого выполняется условие У1. Пусть $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$ независимы, $i'_1, \dots, i'_k \in \mathcal{M}$, $i_1, \dots, i_k \in [i'_1, \dots, i'_k]$. Тогда $[i_1, \dots, i_k] = [i'_1, \dots, i'_k]$.

Доказательство. Обозначим $(i'_1, \dots, i'_k) = I'$, $u_1 = U_{I'}[i_1], \dots, u_k = U_{I'}[i_k]$. Тогда по условию У1 найдутся такие $u'_1, \dots, u'_k \in U_{\mathcal{M}}^k$, что $(u_1, \dots, u_k) \circ (u'_1, \dots, u'_k) = \text{id}$. Отсюда для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ получаем $\langle i'_p, \alpha \rangle = u'_p(u_1(\langle I', \alpha \rangle), \dots, u_k(\langle I', \alpha \rangle)) = u'_p(\langle i_1, \alpha \rangle, \dots, \langle i_k, \alpha \rangle)$, $p = 1, \dots, k$, что дает $i'_1, \dots, i'_k \in [i_1, \dots, i_k]$. Отсюда следует, согласно лемме 4, $[i'_1, \dots, i'_k] \subseteq [i_1, \dots, i_k]$, а из условия предложения и той же леммы — обратное включение. ■

Следствие 3.1. Пусть для фиксированного k выполняется условие $U1$. Пусть $i_1, \dots, i_k \in \mathcal{M}$ независимы, $i \in \mathcal{M}$, $i_1, \dots, i_k, i$ — зависимы. Тогда $i \in [i_1, \dots, i_k]$.

Доказательство. Из зависимости $i_1, \dots, i_k, i$ следует, что $i_1, \dots, i_k, i \in [i'_1, \dots, i'_k]$ для некоторых $i'_1, \dots, i'_k \in \mathcal{M}$. Тогда ввиду предложения 2 $[i_1, \dots, i_k] = [i'_1, \dots, i'_k]$, откуда и следует $i \in [i_1, \dots, i_k]$. ■

Для дальнейших рассуждений важным будет понятие нулей в множествах (далее для удобства восприятия мы будем также называть их пространствами, подразумевая этим наличие определяемой биформой структуры) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Будем называть элемент $i \in \mathcal{M}$ нулевым, вырожденным, или же просто нулем пространства $\mathcal{M}$, если $i \in [\emptyset]$, то есть, если для любых $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$. Иными словами, нулевой элемент i пространства $\mathcal{M}$ — такой элемент, для которого функция $\langle i, \cdot \rangle : \mathcal{N} \rightarrow R$ постоянна (очевидно, постоянной в этом случае будет и функция $U[i]$). Аналогично определяются нулевые элементы пространства $\mathcal{N}$.

Отметим, что как в $\mathcal{M}$, так и в $\mathcal{N}$ может быть несколько различных нулевых элементов или не быть вовсе. Ненулевые элементы этих пространств будем называть также невырожденными. Заметим, что все элементы баз Z и Ω являются невырожденными — в противном случае утверждение аксиомы A2, очевидно, не выполнялось бы.

Пусть далее z_0 — некоторый нулевой элемент пространства $\mathcal{M}$, такой, что для всех $\alpha \in \mathcal{N}$ $\langle z_0, \alpha \rangle = O$, где O — некоторый элемент R . Условия утверждений, сформулированных далее в этом пункте, предполагают наличие такого элемента.

Очевидно из определения, что $U[z_0]$ есть функция, тождественно равная нулевому элементу R .

Отсюда легко вытекает следующее утверждение.

Лемма 8. Пусть $u \in U_{\mathcal{M}}^k$ (здесь и далее этой записью подразумевается $0 \leq k \leq n$). Определим функцию $u' : R^l \rightarrow R$, $l \leq k$ следующим равенством: $u'(r_1, \dots, r_l) = u(r_1, \dots, r_l, O, \dots, O)$ для всех $r_1, \dots, r_l \in R$. Тогда $u' \in U_{\mathcal{M}}^l$.

Доказательство. $u' = u(P_l(U[z_1]), \dots, P_l(U[z_k]), P_l(U[z_0]), \dots, P_l(U[z_0]))$. Таким образом, $u' \in U_{\mathcal{M}}^l$, ввиду аксиомы A4. ■

Мы можем теперь ввести операторы $O_l^k : U_{\mathcal{M}}^k \rightarrow U_{\mathcal{M}}^l$, $0 \leq l \leq k \leq n$, сопоставляющие каждой $u \in U_{\mathcal{M}}^k$ функцию $u' \in U_{\mathcal{M}}^l$, определенную как в лемме 8.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определений нулевого элемента R и набора $U_{\mathcal{N}}$.

Лемма 9. Пусть $u = U_{\mathfrak{A}}[a]$ для некоторых $\mathfrak{A} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathcal{N}^k$, $\alpha \in [\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ (в частности, $u \in U_{\mathcal{N}}^k$). Тогда $u(O, \dots, O) = O$.

Доказательство. По определению зависимости для всех $i \in \mathcal{M}$ выполняется $\langle i, \alpha \rangle = u(\langle i, \alpha_1 \rangle, \dots, \langle i, \alpha_k \rangle)$. Подставляя сюда $i = z_0$, получаем требуемое. ■

Для дальнейшего хода доказательства имеет принципиальное значение наличие или отсутствие нулей в пространствах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Мы получаем, таким образом, следующие четыре случая: «в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ есть нули», «в $\mathcal{M}$ есть нуль, в $\mathcal{N}$ нет нулей», «в $\mathcal{M}$ нет нулей, в $\mathcal{N}$ есть нуль», «в $\mathcal{M}$ и в $\mathcal{N}$ нет нулей».

Отметим, что второй и третий из этих случаев получаются друг из друга, если поменять ролями пространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, поэтому нам далее достаточно будет подробно рассмотреть только один из них. Первый случай соответствует выполнению аксиомы A0 [18] и полностью разобран в [18]. Поэтому необходимо рассмотреть только два оставшихся случая. Для краткости изложения рассмотрим здесь только случай наличия нуля в одном из пространств и отсутствия в другом. Случай отсутствия нуля в обоих пространствах решается в аналогичной технике и разобран в препринте автора [20].

Относительно случая, когда $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ содержат нули, напомним утверждение из [?], которое будет полезно для нас в дальнейшем.

Предложение 3. *Определенное нами в аксиоматике физической структуры понятие зависимости отвечает линейной зависимости (принадлежности линейной оболочке) в векторных пространствах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.*

1.3.2. В $\mathcal{M}$ есть нуль, в $\mathcal{N}$ нет нуля

Обозначим нулевой элемент $\mathcal{M}$ как z_0 , $\langle z_0, \Omega \rangle = (O, \dots, O)$. Согласно аксиоме A2, в $\mathcal{N}$ найдется такой элемент $\omega_0 \in \mathcal{N}$, что $\langle Z, \omega_0 \rangle = (O, \dots, O)$. Мы будем ссылаться на него в дальнейшем. Отметим, что, поскольку в $\mathcal{N}$ нет нулей, элемент ω_0 будет невырожденным.

В дальнейших рассуждениях фиксируем произвольный элемент $e \in R$, $e \neq O$. Во всех доказываемых далее утверждениях неявно используется условие наличие нуля в $\mathcal{M}$ и отсутствия в $\mathcal{N}$.

Предложение 4. *Для любого $r \in R$ существует (очевидно, единственная) функция $u \in U_{\mathcal{M}}^0$, тождественно равная r .*

Доказательство. Фиксируем $r \in R$. Согласно аксиоме A3, существует элемент $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \omega_0 \rangle = r$. Возьмем $u = O_0^n(U[i])$. Поскольку $U[i](O, \dots, O) = U[i](\langle Z, \omega_0 \rangle) = \langle i, \omega_0 \rangle = r$, функция u будет тождественно равна r . ■

Предложение 5. *Пусть $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$, $\alpha' \in [\alpha]$. Тогда $\alpha' = \alpha$.*

Доказательство. Пусть функция $v : R \rightarrow R$ такова, что для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha' \rangle = v(\langle i, \alpha \rangle)$. Фиксируем i . Обозначим за u' постоянную функцию из $U_{\mathcal{M}}^1$, равную $\langle i, \alpha \rangle$ (мы можем поднять соответствующую функцию из $U_{\mathcal{M}}^0$ до функции из $U_{\mathcal{M}}^1$ оператором L_0^1). Тогда, в силу предложения 1, $\langle i, \alpha' \rangle = v(\langle i, \alpha \rangle) = v(u'(\langle i, \alpha \rangle)) = u'(\langle i, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle$. Поскольку это выполняется для любого i , отсюда следует $\alpha = \alpha'$. ■

Следствие 3.2. *Тождественная функция является единственной функцией, лежащей в $U_{\mathcal{N}}^1$.*

Доказательство. Согласно предложению 5, $[\omega_1] = \{\omega_1\}$. Требуемое утверждение получается теперь непосредственно из определения $U_{\mathcal{N}}^1$. ■

Предложение 6. Для любых $a_1, a_2, r_1, r_2 \in R$, $a_1 \neq a_2$ существует единственная $u \in U_{\mathcal{M}}^1$, такая, что $u(a_1) = r_1$, $u(a_2) = r_2$.

Доказательство. Покажем существование. Возьмем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, O, \dots, O)$, $(a_2, O, \dots, O)$ соответственно. Ввиду предложения 5, если найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha]$, то $\alpha_1 = \alpha = \alpha_2$ — противоречие. Поэтому α_1, α_2 независимы. Возьмем, пользуясь аксиомой АЗ, $i \in \mathcal{M}$, такой, что $\langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2 \rangle = r_2$. Возьмем $u = O_1^n(U[i])$. Тогда $u(a_1) = U[i](a_1, O, \dots, O) = U[i](\langle Z, \alpha_1 \rangle) = \langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$ и аналогично $u(a_2) = r_2$.

Пусть нашлись две функции $u, u' \in U_{\mathcal{M}}^1$, удовлетворяющие требованиям второго утверждения предложения. Возьмем $j \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, a_2, a_2, \dots, a_2)$. Поскольку $a_1 \neq a_2$, $\langle j, \omega_1 \rangle \neq \langle j, \omega_2 \rangle$ и j невырожден. Обозначим $i = V_{(j)}[u]$, $i' = V_{(j)}[u']$. Тогда $\langle i, \Omega \rangle = (r_1, r_2, r_2, \dots, r_2) = \langle i', \Omega \rangle$, откуда, ввиду предложения 2, $i = i'$. Теперь $u(\langle j, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle = \langle i', \alpha \rangle = u'(\langle j, \alpha \rangle)$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$, и поскольку, ввиду аксиомы АЗ, $\langle j, \alpha \rangle$ может принимать любые значения из R , $u = u'$. ■

Предложение 7. Для любых $a_1, a_2, r \in R$, $a_1 \neq a_2$ существует единственная функция $u \in U_{\mathcal{N}}^2$, для которой $u(a_1, a_2) = r$.

Доказательство. Докажем существование. Возьмем $i \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(a_1, a_2, a_2, \dots, a_2)$. Поскольку $a_1 \neq a_2$, он невырожден. Тогда найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle i, \alpha \rangle = r$. Пусть теперь $u = U[\alpha] \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2, \dots, \rho_2)$, где $\rho_1, \rho_2 \in U_{\mathcal{N}}^2$ — координатные функции (см. предложение 7). Как суперпозиция функции из $U_{\mathcal{N}}^m$ с t функциями из $U_{\mathcal{N}}^2$, она будет, согласно аксиоме А4, принадлежать $U_{\mathcal{N}}^2$. При этом $u(a_1, a_2) = U[\alpha](a_1, a_2, \dots, a_2) = \langle i, \alpha \rangle = r$, поэтому функция u удовлетворяет требуемым нами условиям.

Для доказательства единственности рассмотрим $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(a_1, \dots, a_1)$, $(a_2, \dots, a_2)$ соответственно. β_1, β_2 не равны, и значит, согласно предложению 5, независимы. Пусть $u, u' \in U_{\mathcal{N}}^2$ удовлетворяют условиям предложения. Обозначим $\alpha = V_{(\beta_1, \beta_2)}[u]$, $\alpha' = V_{(\beta_1, \beta_2)}[u']$. Тогда $\langle Z, \alpha \rangle = (r, \dots, r) = \langle Z, \alpha' \rangle$, $\alpha = \alpha'$, откуда, как и раньше, когда мы доказывали единственность, $u = u'$. ■

Предложение 8. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $j \in [i]$. Тогда найдется такая $u \in U_{\mathcal{M}}^1$, что $j = V_{(i)}[u]$.

Доказательство. Обозначим $\langle i, \Omega \rangle = (a_1, \dots, a_m)$, $\langle j, \Omega \rangle = (b_1, \dots, b_m)$. В силу леммы 6 нам достаточно найти функцию $u \in U_{\mathcal{M}}^1$, такую, что $u(a_q) = b_q$, $q = 1, \dots, m$.

Предположим сначала, что i невырожден, то есть не все $a_1, \dots, a_m$ равны друг другу. Пусть s таково, что $a_s \neq a_1$. Тогда, согласно предложению 7, для $q = 2, \dots, s, \dots, m$ найдутся такие функции $u^q \in U_{\mathcal{N}}^2$, что $a_q = u^q(a_1, a_s)$. Пусть $v = U_{(i)}[j]$, то есть $\langle j, \alpha \rangle = v(\langle i, \alpha \rangle)$ для всех $\alpha \in \mathcal{N}$. Тогда при подстановке

на место α элементов $\omega_1, \dots, \omega_m$ получаем $b^t = v(a_t)$, $t = 1, \dots, m$. Пользуясь предложением 1, получим теперь $b_q = v(a_q) = v(u^q(a_1, a_s)) = u^q(v(a_1), v(a_s)) = u^q(b_1, b_s)$, $q = 2, \dots, \hat{s}, \dots, m$.

В качестве u возьмем функцию из $U_{\mathcal{M}}^1$, удовлетворяющую условиям $u(a_1) = b_1$, $u(a_s) = b_s$. Для $q = 2, \dots, \hat{s}, \dots, m$ теперь имеем в силу ранее доказанного : $u(a_q) = u(u^q(a_1, a_s)) = u^q(u(a_1), u(a_s)) = u^q(b_1, b_s) = b_q$, что нам и требовалось.

В случае вырожденного i элемент $j \in [i]$, очевидно, тоже вырожден, и в качестве u можно взять постоянную функцию. ■

Лемма 10. Пусть $i' \in \mathcal{M}$, $i \in [i'] \subseteq \mathcal{M}$ невырожден, и $u = U_{(i')}[i]$ ($u \in U_{\mathcal{M}}^1$ по предложению 8). Тогда найдется такая $u' \in U_{\mathcal{M}}^1$, что $u \circ u' = \text{id} : R \rightarrow R$. Иными словами, для $k = 1$ и пространства $\mathcal{M}$ выполняется условие У1.

Доказательство. Обозначим $u(\langle i', \omega_q \rangle) = a_q$, $q = 1, \dots, m$. Тогда $(a_1, \dots, a_m) = (u(\langle i', \omega_1 \rangle), \dots, \langle i', \omega_m \rangle)) = \langle i, \Omega \rangle$. Поскольку i невырожден, найдется такой индекс s , что $a_s \neq a_1$. Тогда, согласно предложению 6, можно построить функцию $u' \in U_{\mathcal{M}}^1$, такую, что $u'(a_1) = \langle i', \omega_1 \rangle$, $u'(a_s) = \langle i', \omega_s \rangle$. Покажем, что u' удовлетворяет условиям леммы. Обозначим $u \circ u' = v$. Согласно аксиоме А4, $v \in U_{\mathcal{M}}^1$. При этом $v(a_1) = a_1$, $v(a_s) = a_s$, что, ввиду утверждения единственности предложения 6, дает требуемое $v = \text{id}$. ■

Следствие 3.3. Пусть $u \in U_{\mathcal{M}}^1$ и не является тождественной функцией. Тогда u обратима, и обратная ей функция также лежит в $U_{\mathcal{M}}^1$.

Доказательство. Беря $i' = z_1$ (он невырожден, например, в силу аксиомы А2), $i = V_{(z_1)}[u]$, мы получаем, что $u = U_{(i')}[i]$ и элементы i, i' удовлетворяют условиям леммы. Требуемое нам утверждение теперь следует из утверждения леммы. ■

Предложение 9. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Пусть $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Тогда найдется такая $u \in U_{\mathcal{N}}^2$, что $\alpha = V_{(\alpha_1, \alpha_2)}[u]$.

Доказательство. Обозначим $\langle Z, \alpha \rangle = (b_1, \dots, b_n)$, $\langle Z, \alpha_p \rangle = (a_{p1}, \dots, a_{pn})$, $p = 1, 2$. Поскольку $\alpha_1 \neq \alpha_2$, найдется такой индекс s , что $a_{1s} \neq a_{2s}$. Обозначим за $u_q \in U_{\mathcal{M}}^1$, $q = 1, \dots, \hat{s}, \dots, n$ функции, заданные следующими соотношениями: $u_q(a_{1s}) = a_{1q}$, $u_q(a_{2s}) = a_{2q}$. Если $v = U_{(\alpha_1, \alpha_2)}[\alpha]$, то есть $\langle i, \alpha \rangle = v(\langle i, \alpha_1 \rangle, \langle i, \alpha_2 \rangle)$, для всех $i \in \mathcal{M}$, то при подстановке на место i элементов $z_1, \dots, z_n$ получаем $b_t = v(a_{1t}, a_{2t})$, $t = 1, \dots, n$. Тогда $b_q = v((a_{1q}, a_{2q}) = v(u_q(a_{1s}), u_q(a_{2s})) = u_q(v(a_{1s}, a_{2s})) = u_q(b_s)$, $q = 1, \dots, \hat{s}, \dots, n$. Беря в качестве u функцию из $U_{\mathcal{N}}^2$, для которой $u(a_{1s}, a_{2s}) = b_s$, получаем теперь для $q \neq s$: $u(a_{1q}, a_{2q}) = u(u_q(a_{1s}), u_q(a_{2s})) = u_q(u(a_{1s}, a_{2s})) = u_q(b_s) = b_q$, что, с учетом леммы 6, и дает нам требуемое. ■

Лемма 11. Пусть $(\alpha'_1, \alpha'_2) = \mathfrak{A}' \in \mathcal{N}^k$, $\alpha_1, \alpha_2 \in [\alpha'_1, \alpha'_2] \subseteq \mathcal{N}$ независимы, $u_1 = U_{\mathfrak{A}'}[\alpha_1]$, $u_2 = U_{\mathfrak{A}'}[\alpha_2]$ ($u_1, u_2 \in U_{\mathcal{N}}^2$ по предложению 9). Тогда отображение $(u_1, u_2) : R^2 \rightarrow R^2$ (декартово произведение двух отображений $R^2 \rightarrow R$) биективно, и найдутся такие $u'_1, u'_2 \in U_{\mathcal{N}}^2$, что отображение $(u'_1, u'_2) : R^2 \rightarrow R^2$ является обратным к отображению (u_1, u_2) . Иными словами, для $k = 2$ и пространства $\mathcal{N}$ выполняется условие У1.

Доказательство. Обозначим $(u_1, u_2)(\langle z_q, \mathfrak{A}' \rangle) = (a_{1q}, a_{2q})$, $q = 1, \dots, n$. Тогда $(a_{p1}, \dots, a_{pn}) = (u_p(\langle z_1, \mathfrak{A}' \rangle), \dots, u_p(\langle z_n, \mathfrak{A}' \rangle)) = (\langle z_1, \alpha_p \rangle, \dots, \langle z_n, \alpha_p \rangle) = \langle Z, \alpha_p \rangle$, $p = 1, 2$.

Поскольку α_1, α_2 независимы, найдется такой индекс s , что $a_{1s} \neq a_{2s}$. Определим $u'_p \in U_{\mathcal{N}}^2$ равенством $u'_p(a_{1s}, a_{2s}) = \langle z_s, \alpha'_p \rangle$, $p = 1, 2$. Согласно аксиоме А4 $(u_1, u_2) \circ (u'_1, u'_2) = (v_1, v_2) : R^2 \rightarrow R^2$ для некоторых $v_1, v_2 \in U_{\mathcal{N}}^2$. Покажем, что v_1, v_2 являются координатными функциями. Действительно, $v_p(a_{1s}, a_{2s}) = u_p(u'_1(a_{1s}, a_{2s}), u'_2(a_{1s}, a_{2s})) = u_p(\langle z_s, \alpha'_1 \rangle, \langle z_s, \alpha'_2 \rangle) = a_{ps}$, $p = 1, 2$, по построению функций v_p . Поскольку координатные функции лежат в $U_{\mathcal{N}}^2$, отсюда следует, в силу единственности, что функции v_1, v_2 являются координатными и, значит, отображение (v_1, v_2) тождественно. ■

Лемма 12. Пусть элементы $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ имеют дуальные координаты $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$ соответственно. Тогда система $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима.

Доказательство. Покажем, что $\omega_0 \notin [\alpha_1, \alpha_2]$. Действительно, в противном случае согласно лемме 7 (условие У1 выполняется ввиду леммы 11) нашлась бы такая функция $u \in U_{\mathcal{N}}^2$, что $u(e, O) = O$, $u(O, e) = O$. Но из первого из этих условий, в силу утверждения единственности предложения 7, следует, что u совпадает со второй координатной функцией (поскольку координатные функции лежат в $U_{\mathcal{N}}^2$ и для второй координатной функции ρ_2 также выполнено $\rho_2(e, O) = O$). Аналогично из условия $u(O, e) = O$ следует, что u совпадает с первой координатной функцией — противоречие. Поскольку, ввиду предложения 5, α_1 и α_2 независимы, отсюда следует, согласно следствию 3.1 предложения 2, что система элементов $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. ■

Предложение 10. $m \geq 3$.

Доказательство. Предположим противное — $m = 2$. Тогда, согласно предложению 5, $\mathcal{N} = [\omega_1, \omega_2]$. Рассмотрим элементы $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$, имеющие дуальные координаты $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$, соответственно. Согласно лемме 12, система $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. Но $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0 \in [\omega_1, \omega_2]$ — противоречие. ■

Предложение 11. Для любых $r_1, r_2, r_3 \in R$ существует единственная функция $u \in U_{\mathcal{M}}^2$, такая, что $u(e, O) = r_1$, $u(O, e) = r_2$, $u(O, O) = r_3$.

Доказательство. Покажем существование. Возьмем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$ соответственно. Согласно лемме 12, система элементов $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ независима. Тогда мы можем выбрать $i \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\langle i, \alpha_1 \rangle = r_1$, $\langle i, \alpha_2 \rangle = r_2$, $\langle i, \omega_0 \rangle = r_3$. Функция $u = O_2^n(U[i])$, легко видеть, будет удовлетворять нашим требованиям.

Для доказательства единственности возьмем $j_1, j_2 \in \mathcal{M}$ с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$ соответственно. Очевидно, j_2 невырожден. Заметим, что $j_1 \notin [j_2]$, так как в противном случае нашлась бы, согласно предложению 8 и лемме 7 (мы пользуемся также доказанным $m \geq 3$), такая функция $v \in U_{\mathcal{M}}^1$, что $v(O) = e$, $v(e) = O$, $v(O) = O$ — противоречие. Теперь ввиду следствия 3.1 предложения 2 (условие У1 выполнено по лемме 10),

получаем, что j_1 и j_2 независимы. Если теперь $u, u' \in U_{\mathcal{M}}^2$ удовлетворяют условиям предложения, то для элементов $i = V_{(j_1, j_2)}[u]$, $i' = V_{(j_1, j_2)}[u']$ получаем $\langle i, \Omega \rangle = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_3) = \langle i', \Omega \rangle$, откуда $i = i'$, и, применяя для j_1, j_2 , аксиому АЗ, как и в других доказательствах единственности, получаем $u = u'$. ■

Предложение 12. Для любых $r_1, r_2 \in R$ существует единственная функция $u \in U_{\mathcal{N}}^3$, такая, что $u(e, O, O) = r_1$, $u(O, e, O) = r_2$.

Доказательство. Докажем существование. Возьмем $i_1, i_2 \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\langle i_1, \Omega \rangle = (e, O, \dots, O)$, $\langle i_2, \Omega \rangle = (O, e, O, \dots, O)$. Как мы показали при доказательстве предложения 11, они независимы. Тогда найдется такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle i_1, \alpha \rangle = r_1$, $\langle i_2, \alpha \rangle = r_2$. Возьмем $u = U[\alpha] \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_3, \dots, \rho_3) \in U_{\mathcal{N}}^3$, где $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in U_{\mathcal{N}}^3$ — координатные функции. Как и в предыдущих случаях, легко проверяется, что она удовлетворяет нашим требованиям.

Для доказательства единственности рассмотрим элементы $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{N}$ с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$ соответственно. Для $u, u' \in U_{\mathcal{N}}^3$, удовлетворяющих условиям предложения, обозначаем $\alpha = V_{(\alpha_1, \alpha_2, \omega_0)}[u]$, $\alpha' = V_{(\alpha_1, \alpha_2, \omega_0)}[u']$ и, применяя обычные рассуждения, получаем, что $i = i'$ и, ввиду независимости $\alpha_1, \alpha_2, \omega_0$ (лемма 12), $u = u'$. ■

Отметим, что выше нами было доказано выполнение условия У1 для пространства $\mathcal{M}$ при $k = 1$ (лемма 10) и для пространства $\mathcal{N}$ при $k = 1, 2$ (следствие 3.2, лемма 11). Поэтому далее мы будем свободно ссылаться в соответствующих ситуациях на предложение 2 и его следствие 3.1.

Введем на R операцию умножения $\cdot$ следующим образом. Пусть $a, b \in R$. По предложению 6 найдется единственная функция $\varphi_a \in U_{\mathcal{M}}^1$, такая, что $\varphi_a(e) = a$, $\varphi_a(O) = O$. Умножение в R определяется по отношению к функции φ_a так же, как и в случае наличия нулей в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$$a \cdot b := \varphi_a(b), \quad \varphi_a \in U_{\mathcal{M}}^1 : \varphi_a(e) = a, \quad \varphi_a(O) = O.$$

Введем на R операцию сложения следующим образом. Пусть $f \in U_{\mathcal{M}}^2$ — функция, существующая ввиду предложения 11, такая, что $f(e, O) = e$, $f(O, e) = e$, $f(O, O) = O$. Для $a, b \in R$ положим

$$a + b := f(a, b).$$

Покажем, что умножение на R можно ввести двойственным образом с помощью функций из $U_{\mathcal{N}}$. Пусть $a, b \in R$. По предложению 7 найдется единственная функция $\varphi^b \in U_{\mathcal{N}}^2$, такая, что $\varphi^b(e, O) = a$. Покажем, что

$$a \cdot b = \varphi^b(a, O).$$

Действительно, согласно предложению 1, $\varphi^b(a, O) = \varphi^b(\varphi_a(e), \varphi_a(O)) = \varphi_a(\varphi^b(e, O)) = \varphi_a(b) = a \cdot b$.

Далее для произвольных $a, b \in R$ через φ_a, φ^b, f будут обозначаться определенные выше функции.

Предложение 13. Алгебраическая система $(R, + \cdot, O, e)$ является телом.

Доказательство. Покажем, что для всех $a \in R$ верно $e \cdot a = a \cdot e = a$. Ввиду утверждения единственности предложения 6, φ_e совпадает с тождественной функцией (очевидно, лежащей в $U_{\mathcal{M}}^1$), и потому $e \cdot a = \varphi_e(a) = a$. Что же касается функции $\varphi^e \in U_{\mathcal{N}}^2$, ввиду предложения 7 она совпадает с координатной функцией $\rho_1 \in U_{\mathcal{N}}^2$, для которой также $\rho_1(e, O) = e$, $\rho_1(O, O) = O$. Теперь вследствие двойственного определения умножения $a \cdot e = \varphi^e(a, O) = \rho_1(a, O) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Действительно, $a \cdot (b \cdot c) = \varphi_a(b \cdot c) = \varphi_a(\varphi_b(c)) = \varphi(c)$, где $\varphi = \varphi_a \circ \varphi_b \in U_{\mathcal{M}}^1$. При этом $\varphi(e) = \varphi_a(\varphi_b(e)) = \varphi_a(b) = a \cdot b$, $\varphi(O) = \varphi_a(\varphi_b(O)) = O$, откуда $\varphi = \varphi_{a \cdot b}$ и, по определению умножения, $\varphi(c) = (a \cdot b) \cdot c$, что нам и требовалось.

Покажем, что для всех $a \in R^*$ найдется единственный элемент $b \in R$, такой, что $a \cdot b = b \cdot a = e$. Функция φ_a обратима в $U_{\mathcal{M}}^1$ по следствию 3.3 леммы 10. Обозначим $\varphi_a^{-1} = \varphi$. Возьмем $b = \varphi(e)$. $\varphi(O) = O$ по построению, и из предложения 6 получаем $\varphi = \varphi_b$. Тогда $b \cdot a = \varphi(a) = e$.

Рассмотрим теперь такую (существующую, согласно предложению 7) функцию $\varphi' \in U_{\mathcal{N}}^2$, что $\varphi(a, O) = e$, $\varphi(O, O) = O$. Обозначим $\varphi(e, O) = b'$, тогда, по предложению 7, $\varphi = \varphi^{b'}$, и $a \cdot b' = \varphi(a, O) = e$. Равенство $b = b'$ и единственность обратного элемента следуют теперь из ранее доказанных ассоциативности и свойства единицы.

Покажем, что для любых $a, b \in R$ выполняется $a + b = b + a$. Пусть $\tau : R^2 \rightarrow R^2$ — перестановка координат. Согласно лемме 3, $f' = f \circ \tau \in U_{\mathcal{M}}^2$. При этом $f'(e, O) = f(O, e) = e$, $f'(O, e) = e$, $f'(O, O) = O$. Тогда в силу предложения 11 $f' = f$. При этом $b + a = f(b, a) = f'(a, b)$, и потому $b + a = a + b$.

Покажем, что для всех $a \in R$ верно $a + O = a$. Обозначим $f' = O_1^2(f) \in U_{\mathcal{M}}^1$. Тогда $f'(e) = e$, $f'(O) = O$, и f' является тождественной функцией. Теперь $a + O = f(a, O) = f'(a) = a$.

Покажем, что для любых $a, b, c \in R$ выполняется $(a + b) + c = a + (b + c)$. Мы можем далее считать a отличным от O — в противном случае сразу получаем из уже доказанного $(O + b) + c = b + c = O + (b + c)$. Пусть $\beta \in \mathcal{N}$ таково, что $\langle z_1, \beta \rangle = a$, $\langle z_2, \beta \rangle = c$. Рассмотрим функцию $\varphi \in U_{\mathcal{M}}^1$, такую, что $\varphi(a) = b$, $\varphi(O) = O$. Обозначим $j = V_{(z_1)}[\varphi] \in [z_1]$. Тогда $\langle j, \beta \rangle = \varphi(\langle z_1, \beta \rangle) = b$, $\langle j, \omega_0 \rangle = \varphi(\langle z_1, \omega_0 \rangle) = O$. Пусть $j_1 = V_{(z_1, j)}[f]$, $j_2 = V_{(j, z_2)}[f]$ — тогда $\langle j_1, \beta \rangle = a + b$, $\langle j_2, \beta \rangle = b + c$, $\langle j_1, \omega_0 \rangle = f(O, O) = O$, $\langle j_2, \omega_0 \rangle = O$. Наконец, пусть $i_1 = V_{(j_1, z_2)}[f]$, $i_2 = V_{(z_1, j_2)}[f]$. Тогда $\langle i_1, \omega_0 \rangle = \langle i_2, \omega_0 \rangle = O$,

$$\langle i_1, \beta \rangle = (a + b) + c, \quad \langle i_2, \beta \rangle = a + (b + c). \quad (6)$$

Отметим, что в силу леммы 4 и построения все элементы j, j_1, j_2, i_1, i_2 лежат в $[z_1, z_2]$. Рассмотрим элементы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathcal{E} \in \mathcal{N}^2$ с дуальными координатами $(e, O, \dots, O)$, $(O, e, O, \dots, O)$ соответственно. Обозначим $(\langle j, \mathcal{E} \rangle) = (x, y)$. По построению, $\langle i_1, \varepsilon_1 \rangle = f(\langle j_1, \varepsilon_1 \rangle, \langle z_2, \varepsilon_1 \rangle) = f(f(\langle z_1, \varepsilon_1 \rangle, \langle j, \varepsilon_1 \rangle), \langle z_2, \varepsilon_1 \rangle) = f(f(e, x), O) = f(e, x)$. Аналогично получаем $\langle i_1, \varepsilon_2 \rangle = f(f(O, y), e) = f(y, e)$, $\langle i_2, \varepsilon_1 \rangle = f(e, f(x, O)) = f(e, x)$, $\langle i_2, \varepsilon_2 \rangle = f(O, f(y, e)) = f(y, e)$. Таким образом, $\langle i_1, \mathcal{E} \rangle = \langle i_2, \mathcal{E} \rangle$. Обозначим $u_1 = U_{(z_1, z_2)}[i_1]$, $u_2 = U_{(z_1, z_2)}[i_2]$. Тогда

$u_1(e, O) = u_1(\langle z_1, \varepsilon_1 \rangle, \langle z_2, \varepsilon_1 \rangle) = \langle i_1, \varepsilon_1 \rangle = \langle i_2, \varepsilon_1 \rangle = u_2(e, O)$ и аналогично $u_1(O, e) = u_2(O, e)$. Кроме того, $u_1(O, O) = u_1(\langle z_1, \omega_0 \rangle, \langle z_2, \omega_0 \rangle) = \langle i_1, \omega_0 \rangle = O$ и аналогично $u_2(O, O) = O$. Тогда, в силу предложения 11, $u_1 = u_2$. Поэтому $\langle i_1, \beta \rangle = u_1(\langle z_1, \beta \rangle, \langle z_2, \beta \rangle) = u_2(\langle z_1, \beta \rangle, \langle z_2, \beta \rangle) = \langle i_2, \beta \rangle$, что, в силу равенств (6), и дает нам требуемую ассоциативность.

Покажем, что для каждого $a \in R$ найдется элемент $b \in R$, для которого $a + b = O$ (его единственность известным образом следует из ассоциативности и коммутативности сложения). Обозначим $z = V_{(z_1, z_2)}[f]$. Заметим, что z и z_1 независимы. Действительно, в противном случае, согласно следствию 3.1 предложения 2, либо $z \in [z_1]$, либо z_1 вырожден. Последняя возможность, очевидно, исключена (например, ввиду аксиомы A2). Пусть $z \in [z_1]$. Возьмем такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle z_1, \alpha \rangle = O$, $\langle z_2, \alpha \rangle = e$. Тогда $\langle z_1, \alpha \rangle = \langle z_1, \omega_0 \rangle$, откуда, согласно определению зависимости, $\langle z, \alpha \rangle = \langle z, \omega_0 \rangle$, и $e = f(O, e) = \langle z, \alpha \rangle = \langle z, \omega_0 \rangle = f(O, O) = O$ — противоречие, из которого следует, что z, z_1 независимы. Возьмем теперь такой $\alpha \in \mathcal{N}$, что $\langle z_1, \alpha \rangle = a$, $\langle z, \alpha \rangle = O$. Обозначим $\langle z_2, \alpha \rangle = b$. Тогда $a + b = f(a, b) = f(\langle z_1, \alpha \rangle, \langle z_2, \alpha \rangle) = \langle z, \alpha \rangle = O$, что нам и требовалось.

Покажем левую дистрибутивность. Пусть $a, b, c \in R$. $c \cdot (a + b) = \varphi_c(f(a, b))$. Обозначим $u = \varphi_c \circ f \in U_{\mathcal{M}}^2$. Тогда $u(e, O) = \varphi_c(e) = c$, $u(O, e) = c$, $u(O, O) = O$. С другой стороны, $c \cdot a + c \cdot b = f(\varphi_c(a), \varphi_c(b)) = u'(a, b)$ для некоторой $u' \in U_{\mathcal{M}}^2$. При этом $u'(e, O) = f(c, O) = c$, $u'(O, e) = c$, $u'(O, O) = O$. Таким образом, в силу предложения 11, $u = u'$, что дает левую дистрибутивность.

Покажем правую дистрибутивность. $(a + b) \cdot c = \varphi^c(f(a, b), O)$. Преобразуем далее, пользуясь предложением 1: $\varphi^c(f(a, b), O) = \varphi^c(f(a, b), f(O, O)) = f(\varphi^c(a, O), \varphi^c(b, O)) = a \cdot c + b \cdot c$ — правая дистрибутивность доказана. ■

Пусть $f^* \in U_{\mathcal{N}}^3$ — функция, существующая по предложению 12, такая, что $f^*(e, O, O) = e$, $f^*(O, e, O) = e$. Покажем, что для любых $a, b \in R$

$$a + b = f^*(a, b, O).$$

Прежде всего покажем, что $f^*(a, O, O) = a$. Пусть $f' = f \circ (\rho_1, \rho_2, \rho_2) \in U_{\mathcal{N}}^2$, где $\rho_1, \rho_2 \in U_{\mathcal{N}}^2$ — координатные функции. Тогда $f'(e, O) = f^*(e, O, O) = e$ и $f' = \varphi^e$ ввиду предложения 7. Отсюда $f^*(a, O, O) = \varphi^e(a, O) = a \cdot e = a$. Аналогично, с помощью функции $f'' = f \circ (\rho_2, \rho_1, \rho_2)$, показывается $f^*(O, b, O) = b$. Теперь, согласно предложению 1, $f^*(a, b, O) = f^*(f(a, O), f(O, b), f(O, O)) = f(f^*(a, O, O), f^*(O, b, O)) = f(a, b) = a + b$.

Зададим на $\mathcal{M}$ операции сложения и домножения на элемент из R . Пусть $i, j \in \mathcal{M}$. Положим по определению

$$i + j := V_{(i, j)}[f]; \quad a \cdot i := V_{(i)}[\varphi_a].$$

В качестве нуля $\mathcal{M}$ (в смысле заданной структуры) возьмем z_0 .

Для доказательства того, что введенные операции задают на $\mathcal{M}$ структуру векторного пространства, установим его изоморфизм (биекцию, сохраняющую операции и ноль) с левым векторным пространством строк длины t над R .

Согласно аксиомам A2 и A6, отображение $\pi^\Omega : \mathcal{M} \rightarrow R^m$ является биекцией. Очевидно, $\pi^\Omega(z_0) = (O, \dots, O)$. Покажем, что π^W сохраняет операции. Для $i, j \in \mathcal{M}$ имеем в силу определения оператора $V_{(i,j)}: \langle (i+j), \Omega \rangle = \langle V_{(i,j)}[f], \Omega \rangle = (f(\langle i, \alpha_1 \rangle, \langle j, \alpha_1 \rangle), \dots, f(\langle i, \alpha_n \rangle, \langle j, \alpha_n \rangle)) = \langle i, \Omega \rangle + \langle j, \Omega \rangle$. Далее, если $a \in R$, то $\langle a \cdot i, \Omega \rangle = (\varphi_a(\langle i, \alpha_1 \rangle), \dots, \varphi_a(\langle i, \alpha_n \rangle)) = a \cdot \langle i, \Omega \rangle$, что нам и требуется.

Зададим теперь операции сложения и умножения на скаляр в $\mathcal{N}$ следующим образом. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$, $a \in R$, $\varphi^a \in U_{\mathcal{N}}^1$ определена, как раньше. Положим

$$\alpha + \beta := V_{(\alpha, \beta, \omega_0)}[f]; \quad \alpha \cdot a := V_{(\alpha, \omega_0)}[\varphi^a]. \quad (7)$$

В качестве нуля $\mathcal{N}$ в смысле заданной структуры возьмем ω_0 . Тогда биективное отображение $\pi^Z : \mathcal{N} \rightarrow R^n$ на векторное пространство строк длины n будет сохранять нуль и операции сложения и домножения на скаляр, задавая тем самым изоморфизм векторных пространств. Покажем это. Для $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ имеем $\pi^Z(\alpha + \beta) = \langle Z, V_{(\alpha, \beta, \omega_0)}[f] \rangle = (f(\langle z_1, \alpha \rangle, \langle z_1, \beta \rangle, \langle z_1, \omega_0 \rangle), \dots, f(\langle z_n, \alpha \rangle, \langle z_n, \beta \rangle, \langle z_n, \omega_0 \rangle)) = \langle Z, \alpha \rangle + \langle Z, \beta \rangle$ по определению сложения и поскольку $\langle Z, \omega_0 \rangle = (O, \dots, O)$. Аналогично для $a \in R$ получаем $\pi^Z(\alpha \cdot a) = (\varphi^a(\langle z_1, \alpha \rangle, O), \dots, \varphi^a(\langle z_n, \alpha \rangle, O)) = \langle Z, \alpha \rangle \cdot a$. Сохранение нуля очевидно. Таким образом, доказано следующее.

Предложение 14. $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ с введенными операциями являются левым размерности m и правым размерности n соответственно, линейными пространствами над телом R (с нулями z_0 и ω_0 соответственно).

Лемма 13. Биформа $\langle, \rangle$ линейна слева на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Доказательство. Пусть $i, j \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $a \in R$, $\varphi_a \in U_{\mathcal{M}}^1$ такова, что $\varphi_a(e) = a$. Тогда $\langle i + j, \alpha \rangle = \langle V_{(i,j)}[f], \alpha \rangle = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle j, \alpha \rangle) = \langle i, \alpha \rangle + \langle j, \alpha \rangle$ и аналогично $\langle a \cdot i, \alpha \rangle = \varphi_a(\langle i, \alpha \rangle) = a \cdot \langle i, \alpha \rangle$. ■

Определим подмножество $\overline{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ следующим образом:

$$\overline{\mathcal{M}} = \{i \in \mathcal{M} : \langle i, \omega_0 \rangle = O\}.$$

Лемма 14. $\overline{\mathcal{M}}$ является линейным подпространством коразмерности 1 в $\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $i, j \in \overline{\mathcal{M}}$, $a \in R$. Тогда, согласно определению операций на $\mathcal{M}$ и определению зависимости, а также доказанной нами линейности биформы по первому аргументу $\langle a \cdot i, \omega_0 \rangle = \varphi_a(\langle i, \omega_0 \rangle) = \varphi_a(O) = O$, $\langle i + j, \omega_0 \rangle = f(\langle i, \omega_0 \rangle, \langle j, \omega_0 \rangle) = O$, откуда соответственно $a \cdot i \in \overline{\mathcal{M}}$ и $i + j \in \overline{\mathcal{M}}$. Мы показали, что $\overline{\mathcal{M}}$ является линейным подпространством.

Обозначим за z любой элемент $\mathcal{M}$, для которого $\langle z, \omega_0 \rangle = e$ (он найдется по аксиоме A3). Тогда $R \cdot z + \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. Действительно, пусть $i \in \mathcal{M}$. Обозначим $\langle i, \omega_0 \rangle = r$. Тогда $\langle i - r \cdot z, \omega_0 \rangle = \langle i, \omega_0 \rangle - r \cdot \langle z, \omega_0 \rangle = O$, откуда $i - r \cdot z \in \overline{\mathcal{M}}$, что и требовалось. Отсюда следует утверждение о коразмерности. ■

Лемма 15. Биформа билинейна и невырождена на множестве аргументов $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$.

Доказательство. Левая линейность доказана леммой 13. Покажем правую линейность. Пусть $i \in \overline{\mathcal{M}}$, $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$. Тогда $\langle i, \alpha + \beta \rangle = \langle i, V_{(\alpha, \beta, \omega_0)}[f] \rangle = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle i, \beta \rangle, \langle i, \omega_0 \rangle) = f(\langle i, \alpha \rangle, \langle i, \beta \rangle, O) = \langle i, \alpha \rangle + \langle i, \beta \rangle$ и аналогично с домножением на элемент из R .

Невырожденность биформы на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$ слева тривиально следует из аксиомы невырожденности. Согласно теореме 1, это дает ее (двустороннюю) невырожденность. ■

Невырожденность биформы на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$ доказана, и мы получаем из теоремы 2, что размерности $\overline{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{N}$ равны, то есть $m - 1 = n$.

Выберем теперь в $\overline{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{N}$ дуальные базисы $z'_1, \dots, z'_n$ и $\omega'_1, \dots, \omega'_n$ соответственно. Рассмотрим также элемент $z_e \in \mathcal{M} \setminus \overline{\mathcal{M}}$, такой, что $\langle z_e, \alpha \rangle = e$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$ (такой элемент найдется в силу предложения 4: $z_e = V[u]$ для функции $u \in U_{\mathcal{M}}^1$, тождественно равной e). Обозначим $(z'_1, \dots, z'_n) = Z'$, $(\omega'_1, \dots, \omega'_n, \omega_0) = \Omega'$. (Обозначаем также $\omega_0 = \omega'_{n+1}$).

Докажем выполнение формулы 3. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$. Обозначим $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Заметим, что

$$i = x_{n+1} \cdot z_e + i', \quad (8)$$

где $i' \in \overline{\mathcal{M}}$. Действительно, формула 8 означает просто, что $i' = i - x_{n+1} \cdot z_e$, и тогда $\langle i', \omega_0 \rangle = \langle i, \omega_0 \rangle - \langle x_{n+1} \cdot z_e, \omega_0 \rangle = x_{n+1} - x_{n+1} \cdot e = O$, откуда получаем нужное нам $i' \in \mathcal{M}$. Заметим, что для $k = 1, \dots, n$ $\langle i', \omega'_k \rangle = \langle i, \omega'_k \rangle - \langle x_{n+1} \cdot z_e, \omega'_k \rangle = x_k - x_{n+1}$. Поскольку $\langle \cdot, \cdot \rangle$ билинейна на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, мы получаем из леммы 1 $\langle i', \alpha \rangle = \langle i', \omega'_1 \rangle \cdot \langle z'_1, \alpha \rangle + \dots + \langle i', \omega'_n \rangle \cdot \langle z'_n, \alpha \rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \dots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n$.

Теперь получаем, пользуясь левой линейностью биформы: $\langle i, \alpha \rangle = \langle x_{n+1} \cdot z_e, \alpha \rangle + \langle i', \alpha \rangle = x_{n+1} + (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \dots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n$, что и требовалось.

Покажем оставшиеся утверждения доказываемой теоремы для рассматриваемого случая.

Предложение 15. *Отображения $\langle Z', \cdot \rangle : \mathcal{N} \rightarrow R^n$, $\langle \cdot, \Omega' \rangle : \mathcal{M} \rightarrow R^{n+1}$ биективны.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что, согласно определению операций линейного пространства в $\mathcal{M}$, любая линейная комбинация элементов $z'_1, \dots, z'_n$ лежит в $[z'_1, \dots, z'_n]$, а поскольку $z'_1, \dots, z'_n$ — линейный базис $\mathcal{M}$, то $[z'_1, \dots, z'_n] = \mathcal{M}$. Тогда если для $\alpha, \alpha' \in \mathcal{N}$ $\langle Z', \alpha \rangle = \langle Z', \alpha' \rangle$, то и для любого $i \in \mathcal{M}$ $\langle i, \alpha \rangle = \langle i, \alpha' \rangle$, откуда $\alpha = \alpha'$. Это означает инъективность отображения $\langle Z', \cdot \rangle$. Аналогично, $[\omega'_1, \dots, \omega'_n, \omega_0] = \mathcal{N}$, что дает инъективность отображения $\langle \cdot, \Omega' \rangle$.

Поскольку биформа линейна слева, то и отображение $\langle \cdot, \Omega' \rangle$ (действующее из $\mathcal{M}$ в линейное пространство строк длины $n + 1$) линейно. При этом образы элементов $z'_1, \dots, z'_n, z_e$, будучи строками вида $(e, O, \dots, O), \dots, (O, \dots, O, e, O), (e, \dots, e)$ соответственно, образуют базис пространства строк R^{n+1} , поэтому любая строка из R^{n+1} может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle \cdot, \Omega' \rangle$.

Поскольку биформа линейна справа на $\overline{\mathcal{M}} \times \mathcal{N}$, а все $z'_1, \dots, z'_n$ лежат в $\overline{\mathcal{M}}$, то и отображение $\langle Z', \cdot \rangle$ линейно. При этом образы элементов $\omega'_1, \dots, \omega'_n$ образуют канонический базис пространства строк R^n , поэтому любая строка из R^n может быть получена как образ некоторой линейной комбинации этих элементов. Отсюда следует сюръективность $\langle Z', \cdot \rangle$. ■

Предложение 16. $U_{\mathcal{M}}^n = L_n^{l,a}(R)$, $U_{\mathcal{N}}^m = L_{n+1}^{r,s}(R)$.

Доказательство. Рассмотрим множества $\bar{U}_{\mathcal{M}}^n = \{U_{Z'}[i] \mid i \in \mathcal{M}\}$, $\bar{U}_{\mathcal{N}}^m = \{U_{Z'}[i] \mid i \in \mathcal{M}\}$. Из аксиомы А5 следует $U_{\mathcal{M}}^n \subseteq \bar{U}_{\mathcal{M}}^n$, $U_{\mathcal{N}}^m \subseteq \bar{U}_{\mathcal{N}}^m$. Равенство $\bar{U}_{\mathcal{M}}^n = L_n^{l,a}(R)$ следует непосредственно из формулы 3 (в качестве коэффициентов функции $U_{Z'}[i]$ берутся $(x_1 - x_{n+1}), \dots, (x_n - x_{n+1}), x_{n+1}$). Покажем, что $\bar{U}_{\mathcal{N}}^m = L_{n+1}^{r,s}(R)$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, $\alpha \in \mathcal{N}$, $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Тогда $U_{\Omega'}[\alpha](x_1, \dots, x_{n+1}) = \langle i, \alpha \rangle = (x_1 - x_{n+1}) \cdot \xi_1 + \dots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \xi_n + x_{n+1} = x_1 \cdot \xi_1 + \dots + x_n \cdot \xi_n + x_{n+1}(-\xi_1 - \dots - \xi_n + e)$. При этом коэффициенты $\xi_1, \dots, \xi_n, (-\xi_1 - \dots - \xi_n + e)$ могут принимать любые значения, в сумме дающие e , откуда следует требуемое.

Мы получили $U_{\mathcal{M}}^n \subseteq L_n^{l,a}(R)$, $U_{\mathcal{N}}^m \subseteq L_{n+1}^{r,s}(R)$. Покажем, что справедливы обратные включения. Пусть $u \in L_{n+1}^{r,s}(R)$, $u(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1 \cdot a_1 + \dots + x_{n+1} \cdot a_{n+1}$. Рассмотрим элемент $\alpha \in \mathcal{N}$, такой, что $\langle Z', \alpha \rangle = (\sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_1, \omega_k \rangle \cdot a_k, \dots, \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_n, \omega_k \rangle \cdot a_k)$. Пусть $i \in \mathcal{M}$, обозначим $\langle i, \Omega' \rangle = (x_1, \dots, x_{n+1})$. Тогда, с учетом равенства $a_1 + \dots + a_{n+1} = e$, получаем

$$\begin{aligned} \langle i, \alpha \rangle &= \\ &= (x_1 - x_{n+1}) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_1, \omega_k \rangle \cdot a_k + \dots + (x_n - x_{n+1}) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \langle z'_n, \omega_k \rangle \cdot a_k + x_{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{l=1}^n (x_l - x_{n+1}) \cdot \langle z'_l, \omega_k \rangle + x_{n+1} \right) \cdot a_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1} \cdot a_k + x_{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \langle i, \omega_k \rangle \cdot a_k + O = u(\langle i, \Omega' \rangle), \end{aligned}$$

и мы получили, что $V[u] = \alpha$, что означает $u \in U_{\mathcal{N}}^m$. Таким образом, мы показали, что $L_{n+1}^{r,s}(R) \subseteq U_{\mathcal{N}}^m$.

Покажем теперь включение $L_n^{l,a}(R) \subseteq U_{\mathcal{M}}^n$. Пусть $u \in L_n^{l,a}(R)$, $u(x_1, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_n \cdot x_n + a_{n+1}$. Рассмотрим элемент $i \in \mathcal{M}$, такой, что

$$\langle i, \Omega' \rangle = \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z'_k, \omega'_1 \rangle + a_{n+1}, \dots, \sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z'_k, \omega'_{n+1} \rangle + a_{n+1} \right).$$

Пусть $\alpha \in \mathcal{N}$, обозначим $\langle Z', \alpha \rangle = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \langle i, \alpha \rangle &= \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z_k, \omega'_1 \rangle + a_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle - a_{n+1} \right) \cdot \xi_1 + \dots + \\
 &+ \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z_k, \omega'_n \rangle + a_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle - a_{n+1} \right) \cdot \xi_n + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle + a_{n+1} = \\
 &\sum_{k=1}^n a_k \cdot (\langle z_k, \omega'_1 \rangle - \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle) \cdot \xi_1 + \dots + \\
 &+ \sum_{k=1}^n a_k \cdot (\langle z_k, \omega'_n \rangle - \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle) \cdot \xi_n + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle + a_{n+1} = \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot \left(\sum_{l=1}^n (\langle z_k, \omega'_l \rangle - \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle) \cdot \xi_l + \langle z_k, \omega'_{n+1} \rangle \right) + a_{n+1} = \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k \cdot \langle z_k, \alpha \rangle + a_{n+1} = u(\langle Z, \alpha \rangle),
 \end{aligned}$$

и мы получаем, что $u \in U_{\mathcal{M}}^n$, как нам и требовалось. ■

Таким образом, все утверждения теоремы 3 в рассматриваемом случае доказаны.

Замечание 2. Из построения Z', Ω' следует, что для $k, l = 1, \dots, n$ $\langle z'_k, \omega'_l \rangle = e$, если $k = l$, и $\langle z'_k, \omega'_l \rangle = O$, если $k \neq l$. Кроме того, $\langle Z', \omega'_{n+1} \rangle = \langle Z', \omega_0 \rangle = (O, \dots, O)$.

Отметим теперь, что случай наличия нуля в $\mathcal{N}$ и отсутствия в $\mathcal{M}$ получается из только что рассмотренного лишь перестановкой пространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ ролями. Тогда равенство $m = n + 1$ переходит в $n = m + 1$, формула (3) — в формулу (4), а множества $U_{\mathcal{M}}^n$ и $U_{\mathcal{N}}^m$ переходят друг в друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.
2. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. М.: Физматгиз, 1966. 556 с.
3. Ионин В.К. Абстрактные группы как физические структуры. // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Новосибирск, 1990. Вып.135: Вычислительные системы. С. 40–43.
4. Ионин В.К. К определению физических структур. // Труды института математики. Новосибирск. 1992. Т. 21. С. 42–51.

5. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г.Г.). Новосибирск: НГУ, 1968.
6. Кулаков Ю.И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, N. 1. С. 72–75.
7. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур. // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, N. 5. С. 985–987.
8. Кулаков Ю.И. О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теорий феноменологического типа. // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, N. 3. С. 570–572.
9. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, N. 5. С. 1056–1058.
10. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, N. 4. С. 803–805.
11. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметрии в геометрии. // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, N. 2. С. 284–288.
12. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур). // Докл. АН СССР. 1985. Т. 24, N. 1. С. 39–41.
13. Михайличенко Г.Г. Двуметрические физические структуры ранга $(n+1,2)$. // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, N. 3. С. 132–143.
14. Михайличенко Г.Г. К вопросу о симметрии расстояния в геометрии. // Изв. вузов. Математика. 1994. N. 4. С. 21–23.
15. Симонов А.А. Физическая структура ранга $(3,2)$ на абстрактных множествах. // Материалы XXXV Междунар. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 22–24 апр. 1997 г.) Математика. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1997. С. 100–101.
16. Симонов А.А. Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур. // Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М., 2004. 847 с. Приложение: с. 675–707.
17. Симонов А.А. О соответствии между почтиобластями и группами. // Алгебра и логика. 2006. N. 2. С. 239–251.
18. Фирдман И.А. Алгебраическая классификация физических структур с нулем. I. // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, N. 4(24). С. 131–148.
19. Фирдман И.А. Алгебраическая классификация физических структур с нулем. II. Топологические аспекты. // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, N. 1(25). С. 135–146.
20. Фирдман И.А. Алгебраическая теория биформ. Случай больших рангов. Препринт N. ВМ07-01. Омск, 2007. 73 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ЭТНИЧЕСКИХ ГРУПП

В.В. Коробицын, Ю.В. Фролова

The mathematical model of evolution of ethnic group is presented. The model is described by stochastic process. The parameters of ethnos are changed in time and in space. The interaction of ethnic groups is realized on the network of landscapes. The mosaic structure of ethnos is presented as a combination of ethnic group that are united on base of ethnic nearness. The realization of various ethnic contacts is shown on the base of analysis of mathematical model.

1. Введение

Моделирование социальных систем получило интенсивное развитие в конце XX века, когда появилась возможность воспроизводить на компьютере поведение большого количества независимых элементов. В частности, подход агентно-базового моделирования позволил воспроизводить взаимодействие индивидов в группах. Исследованию социальных систем посвящено много научных публикаций и конференций по всему миру [4, 5]. Интерес к данной тематике обусловлен наличием уникального инструмента для изучения социальных процессов — компьютерного моделирования. Никакой другой метод изучения не позволяет исследовать динамику сложных социальных процессов и получать результаты о поведении групп индивидов в искусственной моделируемой среде, давая возможность неоднократно воспроизводить эксперимент, меняя параметры модели.

Данная статья посвящена одному из самых загадочных уровней социальной системы — этническому. Этнические процессы, протекающие в обществе, определяют степень интеграции общества, взаимодействия этноса и ландшафта, сосуществование разных этнических групп. Моделирование этнических процессов — область довольно новая и мало изученная, тем не менее, имеются публикации [1, 3, 6–15]. Эти работы затрагивают различные аспекты развития этнических систем. В данной же статье речь пойдет о моделировании процесса формирования (возникновения) этносов на основе развития и объединения этнических групп. Такая трактовка формирования этносов является авторской

и выдвигается в качестве гипотезы о возникновении этносов. Процесс возникновения этносов очень расплывчато и неоднозначно описан в литературе, нет единой точки зрения на описание этого процесса. Поэтому авторы предлагают свою формально (математически) описанную трактовку процесса возникновения этносов.

Предполагается, что этнос является мозаичной структурой, составленной из субэтносов, живущих каждый в своем ландшафте. Под ландшафтом понимается достаточно однородный участок территории. Субэтноты являются в данном случае некой уникальной единицей этнической структуры, объединяющей семьи людей, ведущих достаточно близкий образ жизни, схожий быт. Этноты формируются из субэтносов на основе понятия близости (комплиментарности) этнических групп. Таким образом, два субэтноса могут быть объединены в один этнос, если поведение и жизненный уклад индивидов этих субэтносов довольно схож. Получается, что объединение в этноты является понятием относительным, в том смысле, что два субэтноса объединяются в один этнос в противоположность к третьему субэтносу, члены которого значительно сильнее отличаются в поведении от членов двух предыдущих субэтносов. И кроме того, если рассматривать процесс формирования этносов в динамике, то вполне вероятны ситуации, когда некоторые субэтносы могут то входить в один этнос, то не входить в зависимости от текущего состояния субэтноса. Существует также понятие суперэтноса как объединения нескольких этносов в противоположность к другим некомплементарным этносам (суперэтносам). Объединение в суперэтносы можно организовать по тому же принципу, как и для этносов, учитывая лишь большую «удаленность» укладов этносов.

Как было указано выше, субэтнос ограничивается ареалом ландшафта, в котором проживает. Считаем, что это вполне оправданно, поскольку люди, живущие в разных ландшафтах даже в достаточной близости будут иметь различный уклад в семье и быту. Именно поэтому ландшафтом можно определять границы распространения субэтносов, но не этносов. Поскольку этнос — это объединение нескольких субэтносов, живущих в разных ландшафтах.

Довольно сложным является вопрос о том, как возникают этноты. Мы высказываем гипотезу о том, что этноты возникают в результате объединения нескольких комплементарных субэтносов. А сами субэтносы формируются в результате развития довольно нестойких групп людей — конвексий и консорций, которые возникают постоянно, но не все из них становятся субэтносами. Консорции и конвексии возникают в результате выделения некоторого лидера (пассионария), который объединяет людей вокруг себя. Как правило, эти группы людей мигрируют, меняя ландшафт пребывания, пока либо не распадаются, либо оседают на некотором месте. Если такая группа смогла просуществовать более одного поколения людей (больше 25 лет), то эту группу можно считать субэтносом со своим уникальным укладом жизни, который будет передаваться из поколения в поколение.

Как предсказать появление лидера группы? Это довольно сложно, поэтому в предлагаемой модели мы считаем, что это происходит в случайные моменты времени с определенной частотой появления. Для того чтобы научиться пред-

сказывать такие события, необходимо выявить предпосылки появления лидеров. Возможно, они есть, но авторы пока не могут однозначно их выделить, поэтому ограничились случайным процессом.

Движущей силой субэтнуса будем считать пассионарную энергию, которая, по всей видимости, зависит от взаимного влияния субэтнуса и ландшафта, в котором он обитает. Считаем, что чем лучше субэтнос приспособлен к существованию в ландшафте, тем выше его способность к развитию. Поэтому процесс миграции этнических групп направлен на поиск наиболее подходящего места обитания. Этническая группа возникает с некоторым начальным запасом энергии, который заимствует у этноса предка. Со временем пассионарная энергия убывает, и если нет достаточной подпитки от ландшафта, то этническая группа распадается, как неспособная к дальнейшему существованию.

Представленная ниже модель формирования этноса предназначена для формального описания этнических процессов, с точки зрения авторов.

2. Построение модели развития этнической группы

В основополагающей работе «Этногенез и биосфера Земли» Л.Н. Гумилёв так определяет понятие этноса. «Этносы — коллективы людей, возникающие и рассыпающиеся за относительно короткое время, но имеющие в каждом случае оригинальную структуру, неповторимый стереотип поведения и своеобразный ритм, имеющий в пределе гомеостаз» [2, с. 70]. Это определение наиболее точно описывает основные компоненты этноса как системы.

Каждый этнос имеет структуру, то есть некоторое внутреннее построение его элементов. «Принцип этнической структуры можно назвать иерархической соподчиненностью субэтнических групп, понимая под последними таксономические единицы, находящиеся внутри этноса как зримого целого и не нарушающие его единства» [2, с. 136]. Согласно этому определению при исследовании возникновения и развития этноса, необходимо исследовать поведение субэтнических групп, чему и посвящена статья.

Вторая составляющая этноса — неповторимый стереотип поведения его членов. «Структура этнического стереотипа поведения — это строго определенная норма отношений: а) между коллективом и индивидом; б) индивидов между собой; в) внутриэтнических групп между собой; г) между этносом и внутриэтническими группами» [2, с. 118]. Причем набор этих правил взаимодействия элементов этноса меняется со временем, что определяет различные фазы развития этноса.

Своеобразный ритм этноса — это и есть определенная схема изменения стереотипа поведения членов этноса, которая определяет динамику этноса. «Этногенез — инерционный процесс, где первоначальный заряд расходуется вследствие сопротивления среды, что ведет к гомеостазу — равновесию этноса с ландшафтным и человеческим окружением, то есть к превращению его в реликт, когда он находится в промежуточном (персистентном) состоянии, лишенном творческих сил» [2, с. 406]. В этом определении отмечается важная роль окружающего ландшафта, который во многом определяет поведение членов этноса.

2.1. Графовая модель ландшафтов

Для построения модели ландшафтов воспользуемся географическими картами: физическая, климатическая, ландшафтов. Исходные данные в этом случае представлены набором растровых изображений, характеризующих состояние ландшафта в некоторой точке на поверхности Земли. Кроме того, эти изображения привязаны к Мировым координатам, а также задан масштаб изображения на карте. Эти изображения подвергаются компьютерной обработке, в результате чего мы получаем разбиение суши на некоторые однородные участки земли, где состояние ландшафта меняется не сильно. После разбиения мы получаем множество ландшафтов на карте и, кроме того, можем определить соседние из них.

Модель ландшафтов опишем на языке теории графов. Построим взвешенный граф, вершины которого представляют ландшафт (однородный участок), а ребрами соединяем те из них, которые граничат друг с другом. При этом вес дуги задает усредненное время преодоления расстояния между ландшафтами. Будем считать, что граф неориентированный, в том смысле, что время, затрачиваемое для перехода из одного ландшафта в другой, такое же, как и в обратном направлении. Хотя это не всегда оправданно. В частности, при перемещении через море или по рекам. В узлах графа запишем параметры, характеризующие ландшафт. Список параметров должен характеризовать запасы ландшафта: природные ресурсы, систему коммуникаций, антропогенные изменения, потенциальные возможности по развитию ландшафта.

Необходимо отметить, что путь через море — это особая дуга между вершинами, которая может соединять не вполне близкие ландшафты, но и время перехода будет значительным. Тем не менее, считаем, что пренебрегать морскими путями нельзя.

2.2. Энергия этноса

Предположим, что граф ландшафтов построен. Теперь опишем модель этносов и их взаимодействия с ландшафтом.

Самобытность этноса характеризуется некоторым набором параметров, которые можно представить в виде n -мерного вектора e , нормированные координаты которого принадлежат отрезку $e_i \in [-1; 1]$, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Особенность ландшафта также можно определить некоторым набором параметров, значения которых показывают наиболее перспективное поведение членов этноса, проживающих на этой территории $l = (l_1, \dots, l_k)$, $l_i \in [-1; 1]$.

Эффективность взаимодействия этноса и ландшафта определяется некоторой функцией $V : E^n \times L^k \rightarrow \mathbb{R}$, определенной из произведения двух множеств всех возможных состояний этноса E^n и всех возможных состояний ландшафта L^k . Причем вид функции определяется исходя из необходимости отразить взаимовлияние этноса и ландшафта. Ее можно, например, определить так. Пусть $n \geq k$. Сопоставим первые k координат этноса с k координатами ландшафта и будем брать в рассмотрение только их при определении взаимодействия с ландшафтом $E^n \Rightarrow E^k$.

Каждому параметру ландшафта необходимо сопоставить значение, характерное для этого этноса. Таким образом, чтобы при умножении этих параметров получилось значение вклада этого параметра в развитие этноса. В итоге получим формулу

$$V(l, e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i e_i, \quad (1)$$

где V – значение вклада, l_i – i -ый параметр ландшафта ($i = 1, 2, \dots, n$), e_i – соответствующий параметр этноса. Разумно использовать значения параметров из интервала $[-1; 1]$. Тогда результат V будет также лежать в интервале $[-1; 1]$.

Для того чтобы воспользоваться этим значением, введем показатель интенсивности действия этноса (пассионарное напряжение), который будет вычисляться как интегральная функция от V . Обозначим интенсивность действия как P и запишем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP}{dt} = a \cdot V - b \cdot V^2 - c,$$

где a, b, c – коэффициенты, вид функции от V в правой части задается исходя из следующих предположений: постоянная естественная убыль $-c$; увеличение за счет взаимодействия этноса с ландшафтом $a \cdot V$; уменьшение за счет перенасыщения слагаемое $-b \cdot V^2$.

2.3. Этническая близость

Для построения модели формирования и развития этноса необходимо «расслоить» этнос на более мелкие группы индивидов. В качестве таких групп можно выделить нестойкие — конвексия и консорция и устойчивую — субэтнос, который возникает как их естественное продолжение. Предположительно, этнос формируется из таких элементов в результате их развития и осознания себя как общности по отношению к другим более крупным общностям. Это отношение основано на чувстве комплиментарности, которое построено на основе понятия этнической близости. Будем считать, что каждый субэтнос имеет свой уникальный набор параметров, тогда близость между ними будет определяться расстоянием ρ , измеренным между этими наборами (векторами) параметров

$$\rho(E_1, E_2) = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (e_i^1 - e_i^2)^2},$$

здесь $E_1 = (e_1^1, \dots, e_n^1)$, $E_2 = (e_1^2, \dots, e_n^2)$ – соответствующие наборы параметров для этносов. Значение расстояния будет принимать значения от 0 до 2, когда $e_i \in [-1; 1]$.

Теперь для объединения субэтносов в этнос мы должны установить пороговое значение ε , которое будет означать, что субэтносы, расстояния между которыми меньше ε , будут составлять один этнос: если $\rho(E_1, E_2) \leq \varepsilon$, то E_1 и E_2 принадлежат одному этносу.

Аналогично можно ввести параметр $\sigma > \varepsilon$, который будет служить для объединения этносов в суперэтносы. Тогда, если $\rho(E_1, E_2) > \sigma$, то эти этносы принадлежат разным суперэтносам (рис. 1).

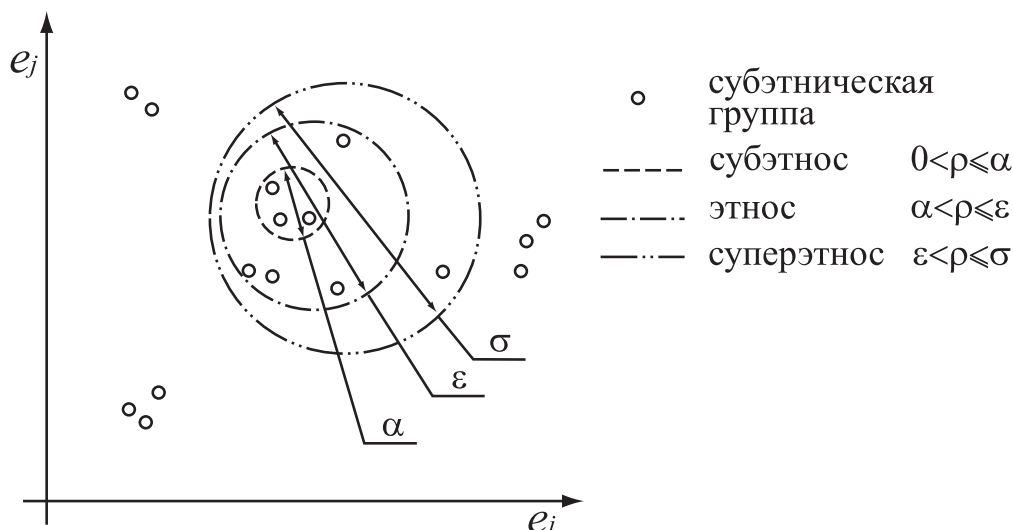


Рис. 1. Объединение субэтнических групп

Здесь также введен параметр α , который определяет принадлежность разных этнических групп к одному субэтносу. Значения параметров $\alpha, \varepsilon, \sigma$ необходимо определять экспериментально.

2.4. Рождение этнической группы

Возникновение новой этнической группы происходит спонтанно на территории некоторого этноса. Причем возникновение новой группы обусловлено достаточно высоким уровнем пассионарного напряжения. После возникновения этой группы часть пассионарной энергии переходит от этноса родителя к потомку. Тем самым понижается пассионарное напряжения самого этноса. Появившаяся новая этническая группа должна самореализоваться или погибнуть как нестойкое образование. При рождении параметры этноса передаются новой группе, но эти параметры слегка меняются — «мутируют». В результате получается немного другая группа. Параметры и начальные значения пассионарной энергии определяются по формулам:

$$e_i^D = [e_i^A + \delta_i], \quad P^D = P_0, \quad P^A \leftarrow P^A - P_0,$$

здесь e_i^D — параметр потомка (Descendant), e_i^A — родителя (Ascendant), δ_i — случайная величина из заданного интервала $(-\delta; \delta)$, операция $[\cdot]$ — означает нормировку внутри допустимого интервала параметров, P_0 — часть пассионарной энергии, передаваемой от родительского этноса P^A к потомку P^D .

2.5. Самореализация этнической группы

Три основных процесса помогают этнической группе самореализоваться: перемещение между ландшафтами, адаптация к ландшафту, перенимание опыта у других этнических групп.

Перемещение между ландшафтами позволяет этносу распространяться по территориям, находить новые более подходящие ландшафты. При перемещении часть этнической энергии теряется, причем эта потеря пропорциональна расстоянию между ландшафтами. Далее, если в этом ландшафте нет других этносов, то происходит постепенная адаптация этнической группы к ландшафту, выраженная в изменении некоторых параметров этноса в сторону достижения наилучшего увеличения вклада в развитие этноса V . Это можно смоделировать так. Реализуется случайный вектор $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, каждая компонента которого имеет случайное значение в заданном интервале $[-z; z]$, где число z должно быть сопоставлено с интервалами времени между такими операциями, но не должно быть очень большим. Далее этнос меняет свои параметры, если выполнено условие

$$e \leftarrow e + \delta \text{ при } V(l, e) < V(l, e + \delta). \quad (2)$$

Частота таких событий и сила вносимых изменений определяется экспериментально.

Перенимание опыта у других этнических групп — процесс неоднозначный, поскольку, с одной стороны, может улучшить состояние этнической группы, а с другой — эта группа может потерять свою индивидуальность. Кроме того, при перенимании опыта всегда происходят искажения, которые приводят к некоторым отклонениям от первоначального опыта.

Взаимодействие членов этноса определяется как передача способностей по адаптации к ландшафту. Члены этноса e^i живут в ландшафте l^i , члены этноса e^j живут в ландшафте l^j . Члены одного этноса e^i переходят в ландшафт l^j с целью получения новых знаний и приобретения способностей. При взаимодействии с членами этноса e^j происходит взаимное изменение параметров так, чтобы новые значения параметров обеспечивали более высокое значение функции V . Это определяется перенятием опыта:

$$\begin{aligned} e^i &\leftarrow e^i + \beta \cdot (e^j - e^i) + \delta & \text{при } V(e^i, l^j) > V(e^j, l^j), \\ e^j &\leftarrow e^j + \beta \cdot (e^i - e^j) + \delta & \text{при } V(e^i, l^j) < V(e^j, l^j). \end{aligned} \quad (3)$$

Затем член этноса может вернуться в ландшафт l^i и снова изменить свои параметры.

В приведенных формулах β — коэффициент перенятия опыта, значение которого, видимо, должно зависеть от величины расстояния $(e^2 - e^1)$ и предположительно обратно пропорционально, δ — случайный вектор, реализующий случайное отклонение от исходного опыта. Зависимость β выразим формулой

$$\beta(e^1; e^2) = \frac{1}{\|e^2 - e^1\|^2}.$$

Полагаем, что коэффициент β обратно пропорционален квадрату от длины вектора расстояния между e^1 и e^2 .

Взаимодействие этнических групп не сводится только к перениманию опыта друг у друга. Соперничество, вытеснение, объединение и уничтожение — вот не полный список процесса взаимодействия этнических групп.

Мы предполагаем, что на одном ландшафте могут одновременно находиться несколько этнических групп, а взаимодействие будем определять именно для находящихся на одной территории. Для начала определим их совместное использование ландшафта как разделение общих ресурсов, что можно выразить изменением формулы для V .

Предположим, на одном ландшафте находится k этнических групп, для каждой из них вычисляем V_j , $j = 1, \dots, k$ по формуле (1). Затем вычисляем суммарный вклад

$$\bar{V} = \left| \sum_{j=1}^k V_j \right|.$$

Если значение $\bar{V} > 1$, то необходимо пронормировать все V_j так:

$$V_j^* = \frac{V_j}{\bar{V}},$$

здесь V_j^* — нормированное значение вклада в развитие j -го этноса. Такое преобразование позволит ограничить рост этнических групп на одной территории из-за их соперничества.

Остальные процессы взаимодействия будем считать следствием описанного выше — соперничества.

2.6. Гибель этнической группы

Этническая группа гибнет, когда ее пассионарная энергия падает до нуля. Условие гибели запишем так: если $P_j \leq 0$, то считаем этническую группу j распавшейся. Ее члены становятся членами других этнических групп. И эта общность перестает существовать.

2.7. Изменение ландшафта

Нельзя не учитывать желание этноса модернизировать ландшафт, подстроить под свои нужды и потребности. Но поскольку этнических групп может быть несколько, то все они и будут делать изменения по своим потребностям. В некоторые случайные моменты времени происходит попытка изменения ландшафта:

$$l \leftarrow l + \gamma \left(\frac{\|e\|}{\|l\|} \cdot e - l \right) + \delta, \quad (4)$$

здесь выражение в скобках дает вектор поворота для l , чтобы приблизить к вектору e , коэффициент γ задает силу преобразований, который не может быть слишком большим, случайный вектор δ дает случайное отклонение от намеченного.

3. Исследование взаимодействия соседних этносов

В этой части под *этносом* мы будем понимать устойчивую этническую группу, занимающую один ландшафт. По сути дела, это субэтнос.

Самым важным процессом для формирования этносов является взаимодействие соседних этносов. Именно их взаимное влияние стимулирует процесс создания новых этнических групп и исчезновения старых. Хотя в истории встречаются этносы-изолянты, которые утратили контакты с соседними этносами. Но это лишь подтверждает гипотезу о том, что этнические контакты дают толчок для их развития. Поскольку этносы-изолянты не способны противодействию другим этносам, которые могут появиться в любой момент.

3.1. Варианты взаимоотношений этносов

Л.Н. Гумилёв выделяет четыре варианта взаимоотношений контактирующих этносов [2, с. 111]:

- сосуществование, этносы не смешиваются и не подражают друг другу;
- ассимиляция, поглощение одного этноса другим;
- метисация, сохраняются и сочетаются традиции предков;
- слияние, забываются традиции обоих компонентов и возникает новый этнос.

В обозначениях нашей модели результат взаимоотношения этносов e^1 и e^2 можно описать выражениями для вычисления значений параметров этносов после длительного контакта. Как правило, возникает новый этнос e^3 с новыми значениями, а предыдущие этносы исчезают:

- сосуществование, параметры не меняются, новый этнос не появляется;
- ассимиляция $e^3 = e^1$ или $e^3 = e^2$, этнос-потомок принимает параметры одного из этносов-предков;
- метисация $e_i^3 = e_i^1$, $e_j^3 = e_j^2$, индексы i и j пробегает разные значения всех допустимых индексов, e^3 — этнос, состоящий из метисов этносов e^1 и e^2 ;
- слияние $e^3 \neq e^1$, $e^3 \neq e^2$, параметры нового этноса e^3 не совпадают ни с одним из этносов-предков e^1 и e^2 .

Для того чтобы проанализировать взаимодействие соседних этносов, необходимо указать причину и правило изменения параметров этносов. Оценить количество возможных вариантов развития контактирующих этносов. Указать минимальное количество параметров, определяющих самобытность этносов в их окружении.

Начнем с последнего вопроса. Для указания различий двух элементов в системе достаточно ввести один параметр, значение которого будет идентифицировать элемент. Так, для описания взаимодействия двух этносов, достаточно

каждому приписать по одному параметру. Получаем одномерный случай для векторов параметров этносов $e^1 = (e_1^1)$, $e^2 = (e_1^2)$. В случае описания взаимодействия трех этносов одного параметра оказывается не достаточно, необходимо использовать два параметра: $e^1 = (e_1^1, e_2^1)$, $e^2 = (e_1^2, e_2^2)$, $e^3 = (e_1^3, e_2^3)$. И так далее, для описания взаимодействия n этносов потребуется как минимум $n - 1$ параметров.

3.2. Предельные состояния этносов

В представленной модели описаны три процесса, влияющие на изменение состояния этноса и ландшафта:

- а) адаптация к ландшафту (2);
- б) перенятие опыта этносов (3);
- с) изменение ландшафта (4).

Перечисленные процессы изменяют параметры этноса и ландшафта, но каждый из них направлен на увеличение функции вклада $V(l, e)$. Подробнее разберем результаты этих процессов в различных ситуациях, которые отличаются количеством взаимодействующих этносов и ландшафтов.

1 этнос, 1 ландшафт. В этой ситуации этнос изолирован от других этносов и нет доступа к другим ландшафтам. Примером может служить некоторый этнос, существующий на острове, при условии неразвитого морского сообщения. Здесь участвуют только процессы а) и с). Процесс а) представляет собой случайное блуждание, но направление перемещения ограничено условием увеличения функции V . Так или иначе, при устремлении времени процесса в бесконечность параметры этноса будут стремиться к некоторой предельной точке $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$. Процесс с) описывает изменение ландшафта, которое, также при стремлении времени к бесконечности, приводит параметры ландшафта к той же предельной точке. Предельная точка определяется как одна из вершин гиперкуба $E^k = [-1; 1] \times \dots \times [-1; 1]$. Потому что именно в этих точках достигается максимальное значение функции $V(l, e)$, причем значения для e и для l должны совпадать.

2 этноса, 1 ландшафт. В этом случае процесс б) ускоряет стремление к предельной точке в случае, если e^1 , e^2 и l стремятся к одной предельной точке. А это означает, что в предельном случае из двух этносов остается только один, имеющий предельные значения для параметров.

1 этнос, 2 ландшафта. Эта ситуация описывает случай возможного влияния этноса одновременно на два ландшафта. Но поскольку предполагается, что этнос не блуждает, а лишь на начальном этапе выбирает наиболее подходящий ландшафт, то в пределе можно говорить только об одном ландшафте (случай 1 этнос, 1 ландшафт).

2 этноса, 2 ландшафта. Предполагается, что этносы находятся в разных ландшафтах, иначе мы приходим к случаю (2 этноса, 1 ландшафт). Когда два этноса находятся на соседних ландшафтах, то процессы а) и с) протекают независимо, а процесс б) может повлиять, только если предельные точки этносов совпадают.

N этносов, m ландшафтов. Этот случай можно рассматривать как следствие рассмотренных выше. Определяя взаимодействие этносов как попарное взаимовлияние.

3.3. Результаты анализа

В результате анализа этнических процессов, описанных в модели, можно сделать выводы о реализации вариантов взаимоотношений этносов:

- этнос стремится привести свои параметры и параметры ландшафта к одной предельной точке. Причем, при переходе через точку «нуль» одного из параметров, предельная точка меняется;
- конкурирующие этносы в одном ландшафте либо сливаются в один с предельными значениями параметров, либо происходит ассимиляция одного этноса другим;
- варианты сосуществования и метисации являются промежуточными (непредельными), которые тем не менее могут просуществовать довольно долго, но не являются устойчивыми.

4. Выводы и заключение

Результатом данной статьи можно считать формальное описание процесса формирования этносов, которое продемонстрировало возможность описания этноса как мозаичной структуры, состоящей из нескольких этнических групп, существующих по общим законам. Аналитическое исследование модели подтвердило возможность реализации четырех вариантов взаимодействия, указанных в литературе. Кроме того, показано, что лишь два из них являются устойчивыми.

Представленную математическую модель планируется реализовать в среде компьютерного моделирования, что позволит получить новые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аниконов Ю.Е. Математическое моделирование этнических процессов // Математические проблемы экологии. Новосибирск: Ин-т математики. 1994. С. 3–6.
2. Гумилев Л.Н. Этногенез и биосфера Земли. М.: Танаис ДИ-ДИК, 1994.
3. Гуц А. К. Глобальная этносоциология. Омск: Омск. гос. ун-т, 1997.
4. Гуц А.К., Коробицын В.В., Лаптев А.А., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математические модели социальных систем: Учебное пособие. Омск: Омск. гос. ун-т, 2000.

5. Гуц А.К., Коробицын В.В., Лаптев А.А., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Компьютерное моделирование. Инструменты для исследования социальных систем: Учебное пособие. Омск: Омск. гос. ун-т, 2001.
6. Коробицын В.В. Модель территориального распределения пассионарной энергии этноса // Математические структуры и моделирование. Омск: Омский гос. ун-т. 2000. Вып. 5. С. 44–53.
7. Коробицын В.В., Фролова Ю.В. Математическое моделирование динамики этнических систем // Социальная политика и социология. 2006. N. 3. С. 205–221.
8. Bhavnani R., Miodownik D., Nart J. REscape: an Agent-Based Framework for Modeling Resources, Ethnicity, and Conflict [Electronic resource] // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2008. Vol. 11, N. 2. – <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/11/2/7.html>.
9. Deffuant G., Amblard F., Weisbuch G., Faure T. How can extremism prevail? A study based on the relative agreement interaction model [Electronic resource] // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002. Vol. 5, N. 4. – <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/4/1.html>.
10. Fossett M. Ethnic Preferences, Social Distance Dynamics, and Residential Segregation: Theoretical Explorations Using Simulation Analysis // The Journal of Mathematical Sociology. 2006. Vol. 30, N. 3. P. 185–273.
11. Gatherer D. Identifying cases of social contagion using memetic isolation: comparison of the dynamics of a multisociety simulation with an ethnographic data set [Electronic resource] // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2002. Vol. 5, N. 4. – <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/5/4/5.html>.
12. Korobitsin V.V., Frolova J.V. Mathematical Modelling the Ethnic System // Lecture Notes in Computer Science. Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. Vol. 2658. P. 629–635.
13. Korobitsin V.V., Frolova J.V. Landscape Delimitation between Ethnoses by Modelling // Proceedings of the 23th International Conference of the System Dynamics Society / John D. Sterman et al. Boston, 2005. P. 94
14. Neshchadim M.V. Dynamical model of the ethnic system. Formulas in direct and inverse problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. Vol. 6, N. 6. P. 605–617.
15. Srbljinovic A., Penzar D., Rodik P., and Kardov K. An Agent-Based Model of Ethnic Mobilisation [Electronic resource] // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2003. Vol. 6, N. 1. – <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/6/1/1.html>.

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛОТНЫХ ГРУПП ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ДОРОГИ

М.В. Кузин

В работе предложен метод, позволяющий учитывать изменение поперечного сечения проезжей части при моделировании транспортных потоков в городских сетях. Рассмотрены преимущества применения данного метода в комплексном моделировании транспортных потоков.

Традиционно модели транспортного потока описывают движение только в одном измерении. В некоторых моделях влияние соседних полос (многополосное движение) может быть учтено [1]. Проблема разработки полностью двумерной модели в том, что обычное обобщение одномерной модели на двумерный случай невозможно из-за неэквивалентности движений вдоль и поперёк дороги [2].

У транспортного потока (ТП) по мере движения в улично-дорожной сети (УДС) города постоянно изменяются взаимосвязанные характеристики, такие, как интенсивность, плотность, средняя скорость [3, с.6]. Учет изменения этих характеристик потока на всех основных элементах транспортной сети ведет к более адекватному представлению его в модели движения. В данной работе предлагается формула для перераспределения интенсивности потока на перегоне в зависимости от изменения ширины проезжей части.

В работе [4] выдвигается гипотеза о том, что причина пробок кроется в «узких местах» сужениях и расширениях дороги, как постоянных, так и временных. Они являются причиной образования, роста и распространения очередей на дорогах, определяется несколько типов «узких мест»:

Активные «узкие места». Между двумя участками дороги имеется активное «узкое место»:, если входящий транспортный поток перегружен (вызывает очереди), а исходящий является свободным.

Слияния (сужения). Если интенсивность входящих потоков превышает вместимость слияния, выходящий поток заполняет пропускную способность слияния полностью, а остальной поток формирует очередь. Очередь может расти как по одному, так и по нескольким подъездам к слиянию.

Другие типы «узких мест». Заторную активность можно обнаружить на вертикальных и горизонтальных искривлениях дороги («горки» и прогибы), в тоннелях, на наклонных участках и других местах изменения характеристик и однородности дороги.

Основной характеристикой всех «узких мест» является то, что в определенной точке дороги изменяется ее максимальная пропускная способность [3, с.37], то есть изменяется значение потока насыщения - C .

В примере на рисунке 1 показано сужение проезжей части с уменьшением потока насыщения C на одну треть с 1800 авт./ч до 1200 авт./ч. Из рисунка 1б видно, что интенсивность входящего в сужение потока $q(t) \neq const$, в момент времени 27-28 секунд от начала цикла моделирования он начинает превышать поток насыщения дороги после сужения $C^* < q(t)$. Образуется очередь. Исходящий поток (светлый) $q^*(t)$ некоторое время насыщен полностью, с момента, когда интенсивность входного потока начинает спадать, очередь постепенно рассасывается, и далее поток движется свободно.

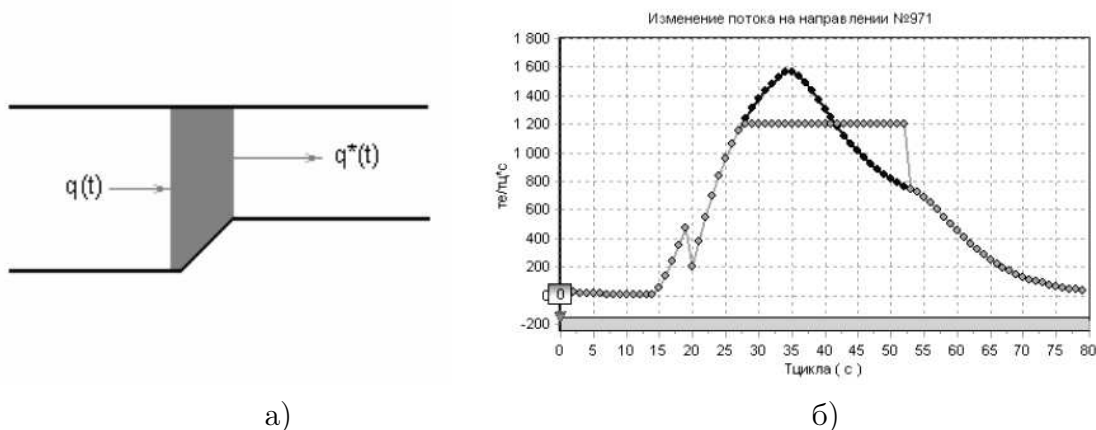


Рис. 1. Перераспределение потока при резком сужении проезжей части: (а) схема сужения; (б) графики интенсивностей входящего - $q(t)$ (темный) и исходящего - $q^*(t)$ (светлый) потоков в месте сужения

При обозначении потока насыщения исходящего потока - C^* , а длины очереди - $l(t)$, формула преобразования потока может быть записана следующим образом:

$$q(t) = \begin{cases} C, & l(t) > 0 \\ q(t), & l(t) \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$l(t) = l(t-1) + q(t) - C^*. \quad (2)$$

Формулы (1, 2) позволяют с достаточной точностью описывать групповой характер движения транспортных средств (ТС) в местах изменения поперечного сечения дороги. Также имеется возможность подсчитать среднюю длину очереди либо число задержанных ТС на данном элементе УДС города.

В работе [2] рассматривается двумерная макроскопическая модель транспортного потока, детально описывающая динамическое распределение плотности потока как вдоль направления движения, так и поперек. Однако она обладает рядом недостатков с точки зрения применения этой модели на практике:

Проблема калибровки модели. Модель имеет большое количество коэффициентов и членов, которые могут быть выбраны произвольным образом;

Относительная сложность вычислений, не позволяющая применить данную модель для расчета и оптимизации управления движением в крупных городских транспортных сетях, порядка 100 - 500 направлений движения.

Использование формул (1, 2) в рамках комплексного моделирования движения в транспортной сети города позволяет определить систематические заторы на перегоне, заранее предусмотреть места возможного уменьшения пропускной способности дорог и реагировать на изменение ситуации, автоматически переключая режимы управления на соседних перекрестках в случае затора.

Все величины (интенсивность, поток насыщения, длина очереди) используемые в формуле (1), могут быть измерены с помощью специальных приборов - детекторов транспорта. Простота расчета позволяет применять данную формулу при моделировании и поиске оптимальных параметров управления движением в больших городских транспортных сетях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Helbing D. Modeling multi-lane traffic flow with queuing effects // Physica A. 1997. V. 242. P. 175–194.
2. Карамзин Ю.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Двумерная модель автомобильных потоков // Математическое Моделирование. 2006. N. 6. С. 85–95.
3. Петров В.В. Управление движением транспортных потоков в городах: Монография. Омск: Изд-во СибАДИ, 2007. 92 с.
4. Daganzo C.F. Remarks on Traffic Flow Modeling and its Applications // Dept. of Civil and Environmental Engineering University of California (Berkeley). 1998. N. 134.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КООРДИНИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫМИ ПОТОКАМИ

М.В. Кузин

Приведено описание программного обеспечения для имитационного моделирования транспортных потоков в городах. Описаны основные возможности и преимущества использования программного обеспечения.

Развитие автомобильной промышленности приводит к появлению плотных транспортных потоков (ТП) на городских магистралях, усложнению организации дорожного движения и повышению негативных последствий - аварийности, стоимости перевозок, повышения загрязнения окружающей среды, шума.

До определенной степени загрузки главных и второстепенных магистралей автомобили и пешеходы движутся через перекрестки без значительных задержек (происходит саморегулирование). С ростом интенсивности движения по главным магистралям время ожидания на пересекающих направлениях быстро возрастает, на перекрестках возникают конфликтные и аварийные ситуации. Появляется необходимость управления транспортными и пешеходными потоками. Управление реализуется с помощью средств сигнализации и автоматизации как на отдельных элементах дороги (перекресток, перегон и др.), так и для улично-дорожной сети (УДС) города в целом.

Светофорная сигнализация является главной формой воздействия на участников движения.

При средней и высокой интенсивности движения и небольших расстояниях между перекрестками (до 500-700 метров) образуется групповая форма движения [1]. Она обусловлена чередованием фаз светофорной сигнализации. Перекрестки становятся взаимозависимыми по управлению, при этом возникает необходимость в координации сигналов путем максимального использования периодического, группового характера транспортного потока.

Координированное управление формирует случайно возникающие группы транспортных средств (ТС) в динамически однородные группы автомобилей.

Координационное управление движением транспортных потоков в городах является наиболее эффективным и доступным методом организации движения

с точки зрения его алгоритмической и технической реализации. Появление технических средств организации дорожного движения нового поколения на микропроцессорной элементной базе дает возможность решать задачи управления движением не только по заранее рассчитанным программам координации [2], но и в режиме реального времени, что более эффективно.

Применение имитационного моделирования позволяет провести модельный эксперимент и настройку управляющих параметров программы координации (ПК).

Предложенное программное обеспечение, использующее имитационную модель группового движения ТС, предназначено для определения оптимальных параметров координированного управления. Моделирование движения производится в произвольно заданной транспортной сети города. Транспортная сеть представляется в виде направленного графа (рисунок 1), дугами которого являются перегоны (направления), а в узлах находятся перекрестки со светофорными устройствами.

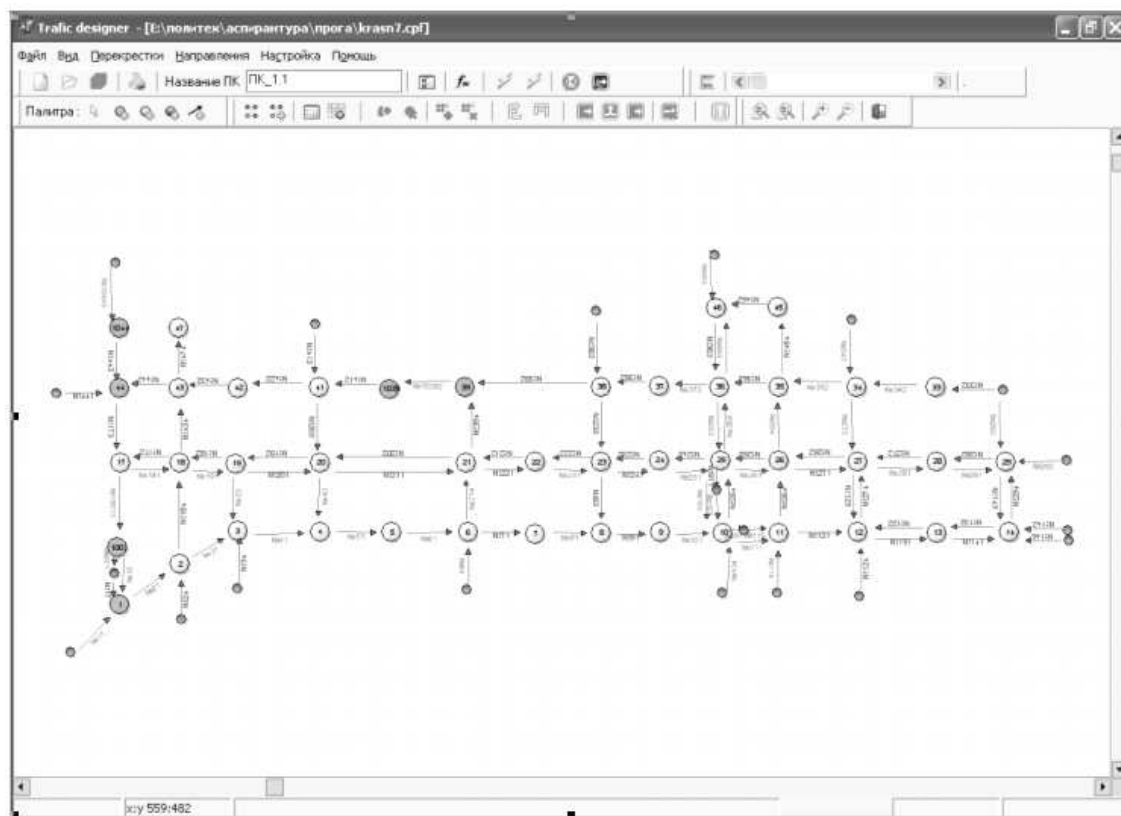


Рис. 1. Схема транспортной сети

Программа позволяет пользователю строить граф дорожной сети, содержащий следующие элементы:

Перекресток. Обладает рядом свойств, основные из них — это количество фаз, длительности фаз, смещение первой фазы и т.д.

Внешний перекресток. Не участвует в моделировании, необходим для указа-

ния входящих в сеть направлений. На всех входящих направлениях интенсивность – постоянная во времени величина.

Дополнительная точка. Необходима для имитации таких элементов УДС, как сужение проезжей части, нерегулируемое слияние ТП, разделение потока между двумя соседними перекрестками на составляющие.

Направление. Связывает между собой перекрестки, основные свойства – это интенсивность, максимальная пропускная способность или поток насыщения [1], среднее время проезда, длина и т.д.

Каждый элемент сети представлен в программе отдельным классом, обладающим своими уникальными атрибутами и методами.

Задание свойств, для каждого из элементов сети, производится в режиме диалога. На рисунке 2 изображены формы ввода параметров для перекрестка и направления.

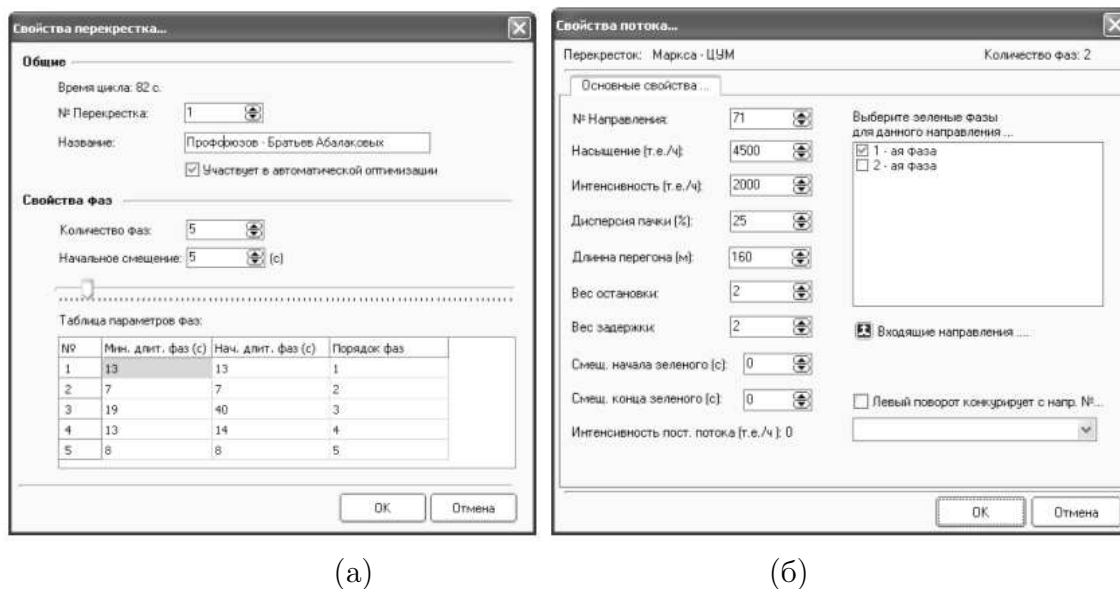


Рис. 2. Формы ввода параметров (а) – перекрестка, (б) – направления

Для перекрестка пользователь задает такие параметры, как номер, название, количество фаз, начальное смещение фаз, длительности и минимальные длительности фаз. В сети может быть задано несколько групп перекрестков, для которых смещение фаз относительно друг друга будет постоянным.

Для направления задаются: номер, поток насыщения, интенсивность, длина перегона, время смещения начала и конца зеленого света для сложных промтактов [1], номера разрешающих фаз для данного направления, тип направления (обычное или просачивающееся).

Образование плотных групп ТС моделируется следующим образом. Поток на всех входящих в сеть направлениях считается Пуассоновским, а его интенсивность постоянной (рисунок 3а график 1). На стоп-линии перекрестка входящий поток уплотняется за счет ТС, пришедших на запрещающий сигнал. В момент включения разрешающего сигнала очередь разгружается с интенсивно-

стью, равной потоку насыщения, а после разгрузки всей очереди автомобили проходят свободно (рисунок 3а график 2) [2].

Группа автомобилей, двигаясь от одной стоп линии к другой, постоянно распадается с определенной скоростью, зависящей от среднего времени проезда [1]. В итоге на следующей стоп-линии получаем поток следующего вида (см. рисунок 3б график 1).

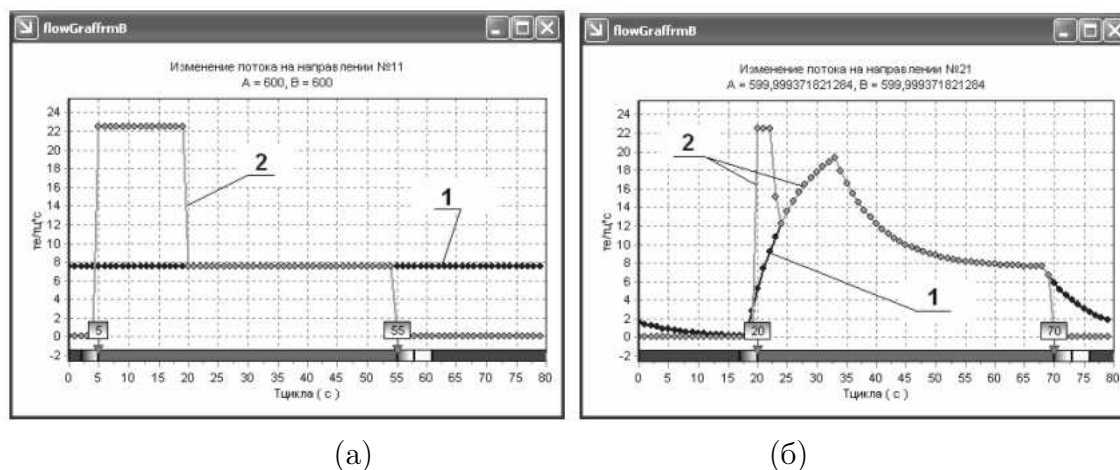


Рис. 3. Изменение потока ТС на направлениях: (а) – входящий поток; (б) – обычный поток

Изменяя сдвиги начала фаз на соседних перекрестках относительно друг друга, программа стремится пропустить плотные группы ТС на разрешающий сигнал светофора. Тем самым минимизировать задержки ТС и длины очередей, возникающих на пересечениях.

Важной особенностью данной программы является то, что в ней, в отличие от других подобных программ [3, 4], учитываются особенности разгрузки левоповоротных конкурирующих направлений, а также задержки ТС и уплотнения потока, возникающие на перегоне при сужении проезжей части.

В данной программе имеется возможность создавать произвольное число маршрутов движения. Под маршрутом движения понимается совокупность связанных между собой направлений движения. Как правило, в УДС города существуют такие совокупности направлений, движение по которым наиболее интенсивно в определенное время, например, в центр города в утренние часы пик и из центра в районы в вечерние [1]. На рисунке 4 изображено окно отображения диаграммы переключений светофоров для направлений маршрута в координатах время-путь. Также на представленной диаграмме могут отображаться прямая и обратная лента времени безостановочного проезда [2], время проезда выбранного автомобиля по маршруту в прямом и обратном направлении.

Каждому маршруту присваивается весовой коэффициент, обозначающий важность этого маршрута. В программе разработана процедура, оптимизирующая время проезда по заданному маршруту с учетом его важности.

Таким образом, программа позволяет определить оптимальные параметры управления для автоматической системы координированного управления транспортными потоками.

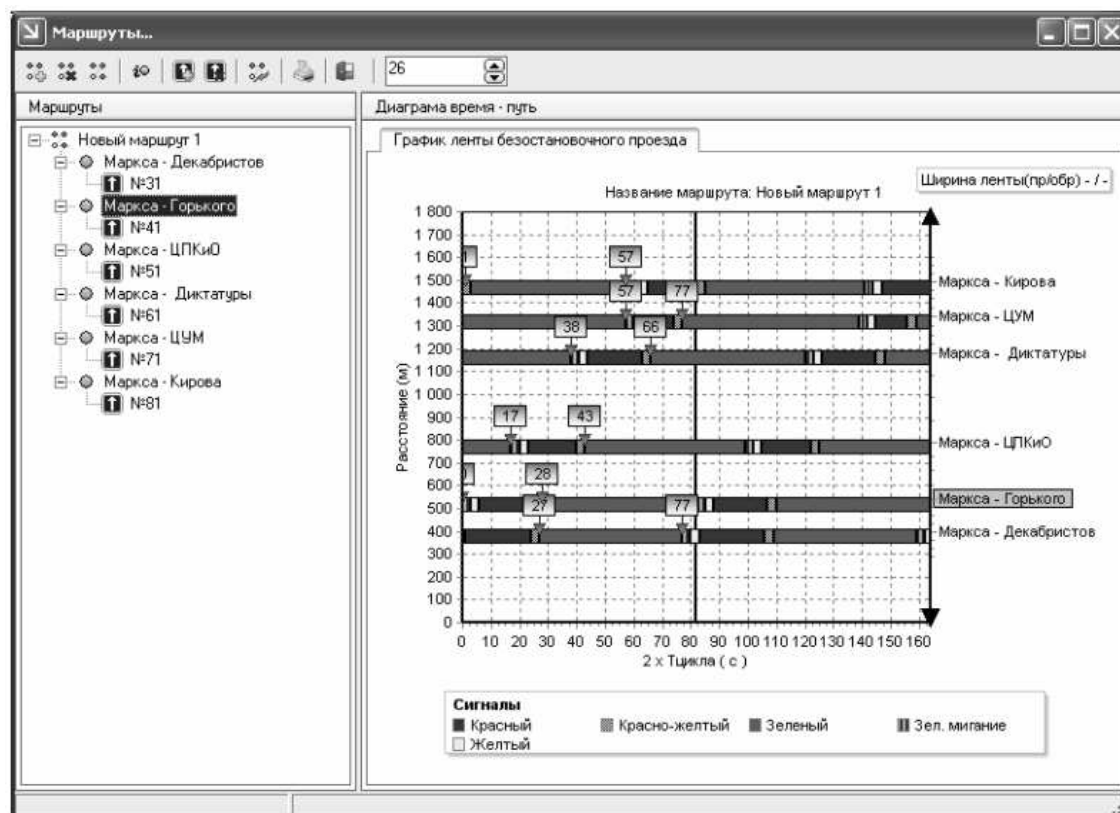


Рис. 4. Диаграмма переключений светофоров в координатах время-путь на заданном маршруте движения

Разработанная программа может служить рабочим инструментом для технологов, обучающей средой, демонстрирующей основные принципы координированного управления дорожным движением, для студентов соответствующих специальностей, а также средством по дальнейшему исследованию транспортных потоков в городах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров В.В. Управление движением транспортных потоков в городах: Монография. Омск: Изд-во СибАДИ, 2007. 92 с.
2. Капитанов В.Т., Хилажев Е.Б. Управление транспортными потоками в городах. М.: Транспорт, 1985. 94 с.
3. Robertson D.I. The TRANSYT method of coordinating traffic signals // Traffic Eng. + Contr. 1997. V. 38, N. 2. P. 76-77.
4. Brown G.T., Vincent R.A. Street-wise scoot moves traffic that other systems can't reach // Surveyor. 1986. N. 4875. P. 8-9.

БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗУБА, СЛУЖАЩЕГО СОВМЕСТНО С ИМПЛАНТАНТОМ ОПОРОЙ ДЛЯ МОСТОВИДНОГО ПРОТЕЗА

В.М. Семенюк, М.Б. Елендо, А.В. Артюхов, А.К. Гуц

С помощью метода конечных элементов (МКЭ) изучены характеристики зуба, служащего совместно с имплантантом опорой для мостовидного протеза. Проанализированы поперечные, продольные напряжения, изгибающий момент. Из результатов компьютерных экспериментов следует, что возникающие напряжения значительно превосходят по величине эталонные. Полученные данные следует принимать во внимание на этапе выбора дизайна протеза.

Вопрос о взаимодействии зубов и имплантантов в ортопедической конструкции остается открытым. Воздействие жевательной нагрузки на зубы приводит к их смещению в среднем на 100 мкм за счет волокон пародонта. Интегрированные с костью имплантанты остаются неподвижными (Рис. 1).

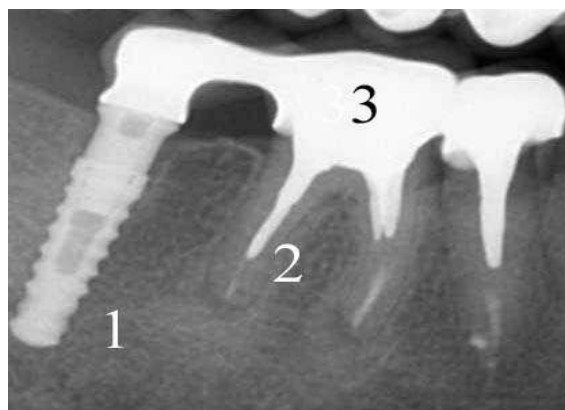


Рис. 1. Цифрами обозначены: 1 – имплантант, 2 – зуб, 3 – протез

Под влиянием механических воздействий в физических и биологических системах появляется движение, распространяются волны, возникают деформации и напряжения. Эти изменения сказываются в том числе и на состоянии опорных

зубов. Необходим анализ усилий и деформаций, возникающих в опорах ортопедической конструкции, для последующего прогноза и профилактики таких осложнений, как перегрузка периодонта, трещина или перелом коронки зуба. Для решения данной проблемы может использоваться метод математического моделирования.

В настоящее время для математического моделирования при биомеханических исследованиях широко применяют метод конечных элементов (МКЭ). МКЭ значительно расширяет возможности при решении задач, возникающих в теоретической и практической стоматологии. Эти задачи могут решаться с учетом функционального состояния, рефлексорно-компенсаторных реакций тканей, системно-структурного анализа, учитывающего как геометрию, так и прочностные свойства тканей и материалов данной системы.

Цель исследования. Исследовать распределение напряжений внутри зуба, служащего совместно с имплантантом опорой для мостовидного протеза.

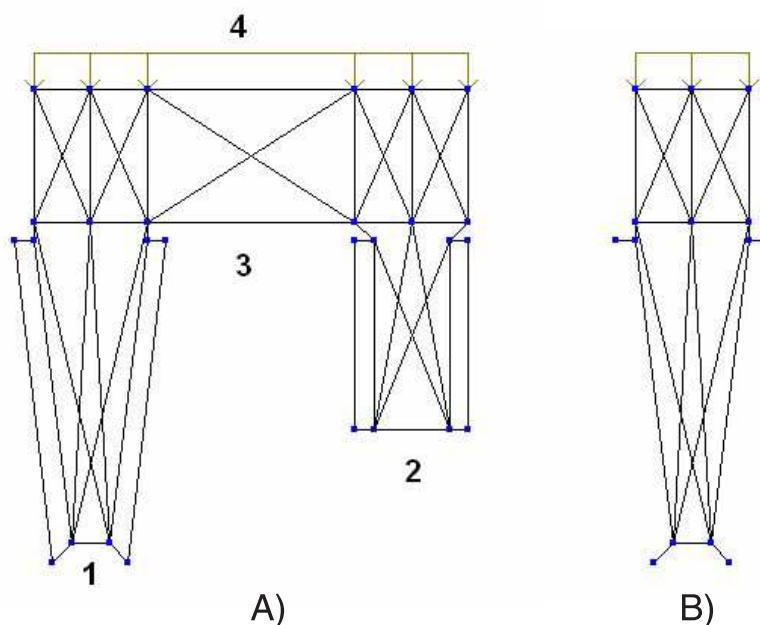


Рис. 2. А. Цифрами обозначены: 1 – зуб, 2 – имплантант, 3 – мостовидный протез, 4 – приложенная нагрузка. В. Эталонная модель

Материалы и методы. В наших исследованиях применялся программный комплекс ЛИРА 9.0 (разработка НИИАСС, Киев), который располагает обширным набором возможностей и функций для формирования адекватных конечно-элементных моделей рассчитываемых объектов, их подробного визуального обследования и корректировки, для задания физико-механических свойств материалов, связей, разнообразных нагрузок, характеристик различных динамических воздействий. Результаты нагружений представляются пользователю в виде схем деформаций и мозаик усилий и напряжений.

Создана модель, представляющая мостовидный протез, опирающийся на естественный зуб и имплантат (Рис. 2, А)). Модель заменена расчетной схемой

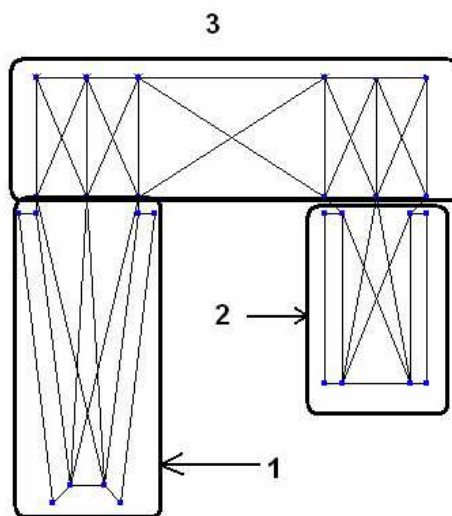


Рис. 3. Конструкционные материалы: 1 – твёрдые ткани зуба, 2 – титан, 3 – протез (металлокерамика)

по МКЭ для анализа внутриконструкционных нагрузок. В качестве эталона использовалась схема, представляющая одиночно стоящий зуб (Рис. 2, В)).

Элементам схем были присвоены следующие параметры модуля упругости:

- твердые ткани зуба 100 ГПа,
- керамика 380 ГПа,
- сплав CoCrMo 220 ГПа,
- титан grade 2 110 ГПа,
- связки периодонта 117 МПа.

Нагрузка на конструкцию составила 180 Н, что соответствует верхнему пределу силы, возникающей во время пережевывания твёрдой пищи в области второго моляра.

Результаты расчётов анализировались по мозаикам усилий и напряжений.

1. Результаты и обсуждение

1.1. Анализ продольных напряжений

При рассмотрении распределения продольного напряжения выясняется, что значительная часть (до 540 Н на элемент¹) приходится на коронку со стороны дефекта (Рис.4). У одиночно стоящего зуба напряжение в данном участке не превышает 235 Н на элемент (Рис.5).

1.2. Анализ поперечных напряжений

Величина поперечного напряжения:

¹Термин «Н на элемент» не является физической величиной, обозначает, что напряжение рассчитано для каждого элемента модели, а не для всей конструкции в целом.

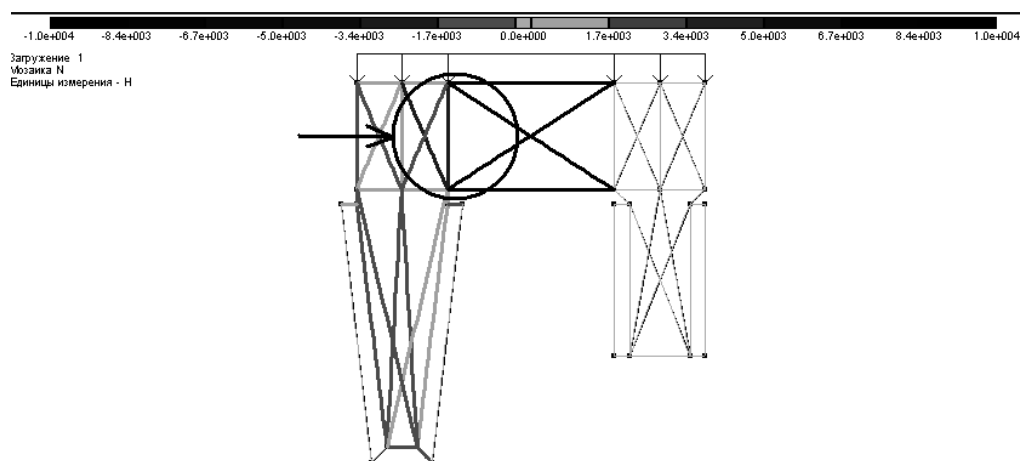


Рис. 4. Мозаика продольного напряжения (стрелкой и кругом отмечена область наибольшего напряжения)

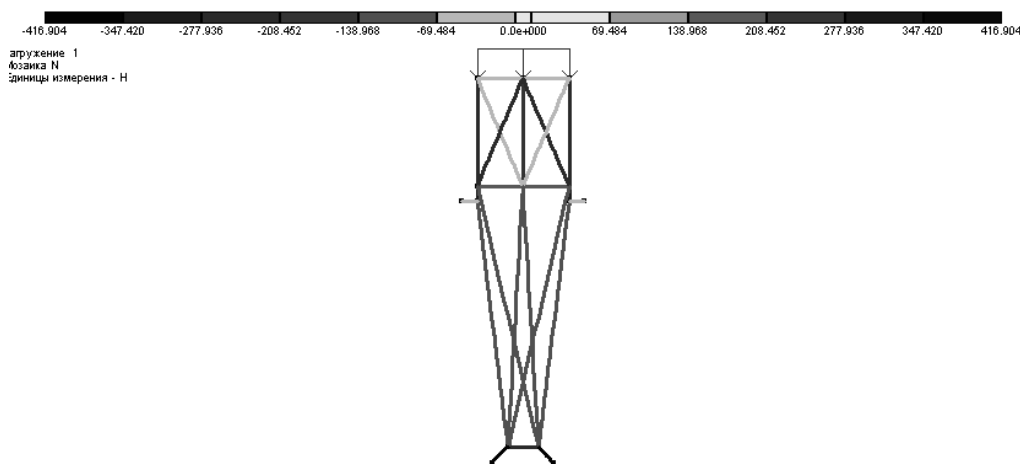


Рис. 5. Мозаика продольного напряжения в эталонной модели. Анализ поперечных напряжений

– в коронке со стороны дефекта 583 Н на элемент (это обусловлено жестким соединением с телом мостовидного протеза, величина напряжений в котором достигает 990 Н);

– значительных поперечно направленных напряжений в корне не образуется (Рис 6).

У одиночно стоящего зуба поперечные напряжения – 270 Н на элемент (Рис.7).

1.3. Анализ изгибающего момента

Выявлена значительная величина изгибающего момента со стороны дефекта (от 300 до 800 Н/мм) (Рис. 8). В одиночно стоящем зубе величина изгибающего момента достигала всего 140 Н/мм (Рис. 10). Анализ изгибающего момента в корнях показал, что значение этого параметра в обоих случаях одинаково (разница не более 10 Н/мм).

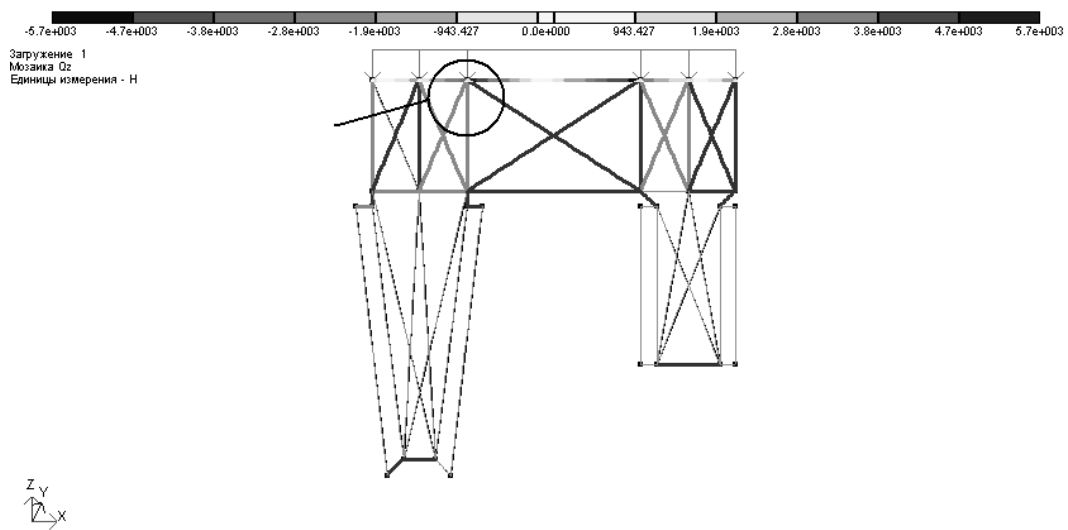


Рис. 6. Мозаика поперечного напряжения (отмечена область наибольшего напряжения)

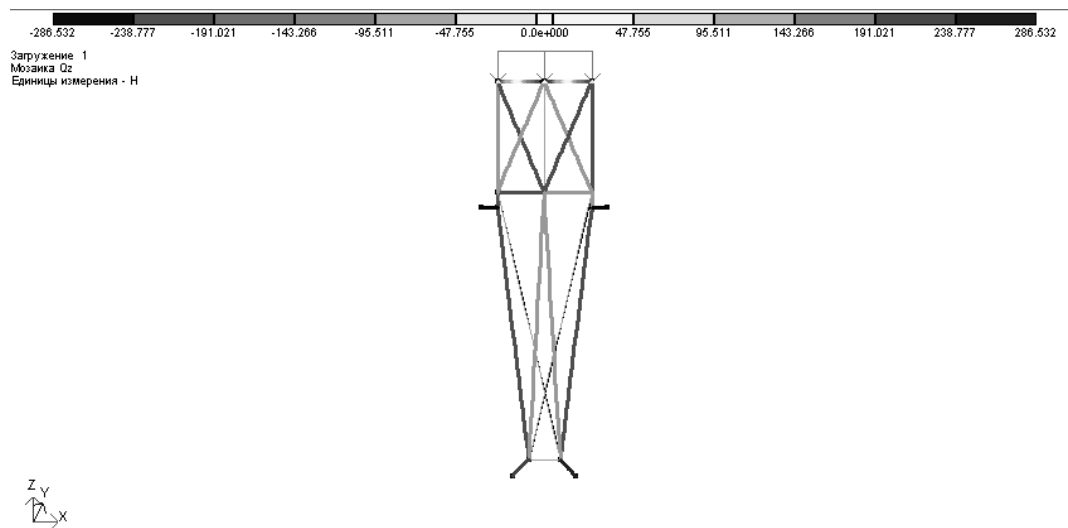


Рис. 7. Мозаика поперечного напряжения в эталонной модели

Неравнозначность подвижности опор является одним из факторов, отрицательно влияющих на функциональные свойства и долговечность ортопедических конструкций. Следовательно, такие конструкции очень требовательны к состоянию опор; даже незначительные дефекты структуры будут негативно отражаться на прочностных свойствах твёрдых тканей зубов, а это, в свою очередь, может повлечь неадекватную реакцию на возникающие напряжения.

Неравнозначность подвижности опор является одним из факторов, влияющих на функциональные свойства и долговечность ортопедических конструкций. Из вышесказанного следует, что такие конструкции очень требовательны к состоянию опорных зубов: ведь даже незначительные дефекты структуры будут негативно отражаться на прочностных свойствах твёрдых тканей зубов,

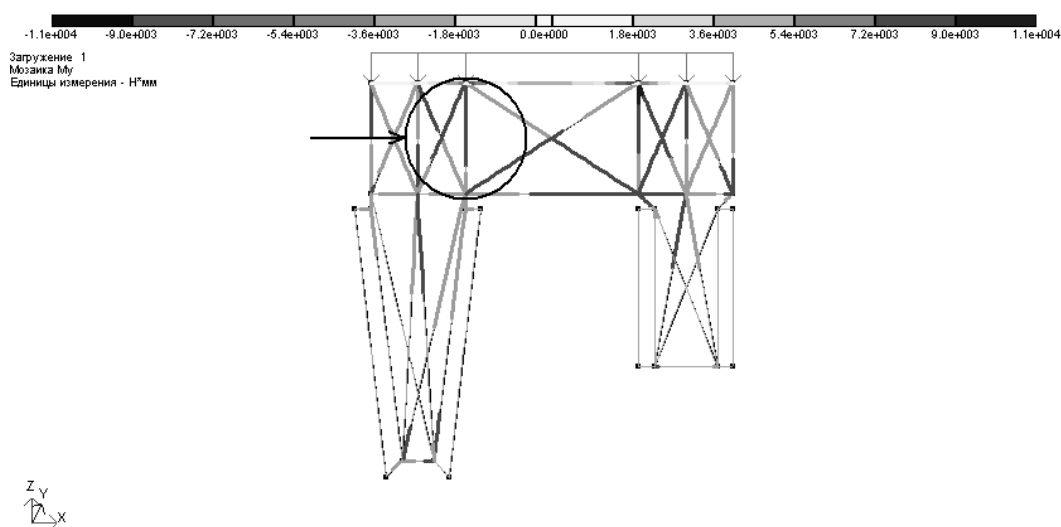


Рис. 8. Мозаика изгибающего момента (отмечена область наибольшего напряжения)

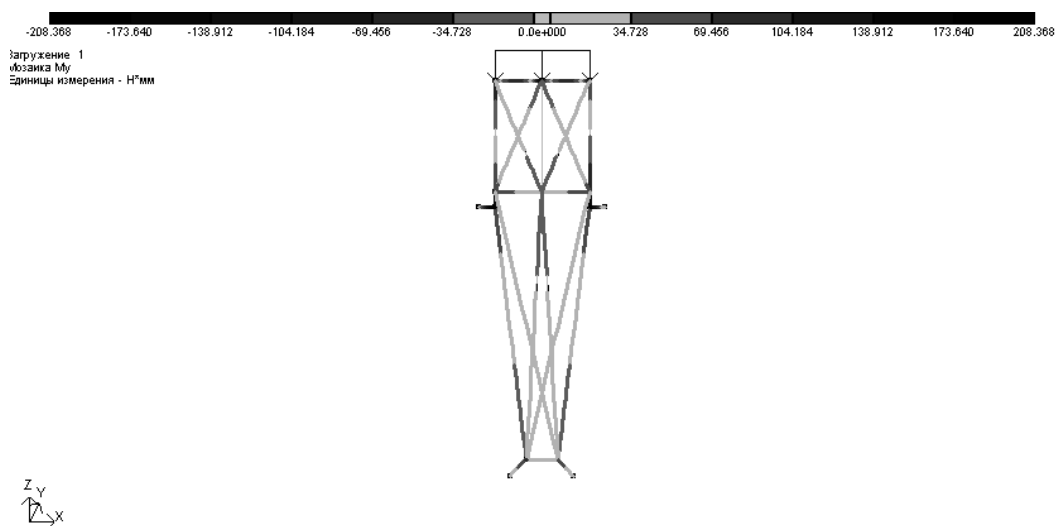


Рис. 9. Мозаика изгибающего момента в эталонной модели

а это в свою очередь может повлечь неадекватную реакцию на возникающие в них напряжения.

2. Выводы

Компьютерные эксперименты показали, что напряжения, возникающие в зубе, служащем совместно с имплантатом опорой для мостовидного протеза, значительно превосходят по величине эталонные.

Анализ возможных напряжений ортопедических конструкций увеличивает точность прогноза результатов лечения, позволяет предотвратить ошибки и осложнения ещё на этапе выбора дизайна протеза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атлас напряженных состояний дентальных имплантантных систем / В.А. Воробьев, Т.М. Ратинер, А.С. Рубинов, В.В. Дудкин. Ангарск, 1997. 58 с.
2. Капотина Т.Н. Биологические и математические обоснования к использованию корней зубов, разрушенных ниже уровня десны, в клинической стоматологии. Дис.: канд. мед. наук / Т.Н. Капотина. Омск, 1996. 115 с.
3. Маркин В.А. Прогнозирование осложнений при использовании металлокерамических протезов с помощью математического моделирования: Автореф. дис. канд. мед. наук / В.А. Маркин. М., 1999. 18 с.
4. Обысов А.С. Возрастные изменения физико-механических параметров костной ткани / А.С. Обысов, С.Б. Марданов // Стоматология. 1969. N. 2. С. 13–15.
5. Параскевич В.Л. Дентальная имплантология. М., 2006. 400 с.
6. Семенюк В.М. Биомеханические обоснования использования сегментов нижних моляров после зубосохраняющих операций / В.М. Семенюк, А.В. Артюхов, И.Н. Путалова, А.К. Гуц // Стоматология. 2004. N. 6. С. 23–25.
7. Семенюк В.М. Математические модели интактного моляра и моляра после гемисекции / В.М. Семенюк, А.В. Артюхов, А.В. Сырцова, А.К. Гуц // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып. 8. С. 52–55.
8. Семенюк В.М. Применение метода конечных элементов в стоматологии (обзор литературных источников). / В.М. Семенюк, И.Н. Путалова, А.В. Артюхов, А.В. Сырцова, А.К. Гуц // Математические структуры и моделирование. 2002. Вып. 9. С. 113–123.
9. Чумаченко Е.Н. Анализ распределения нагрузок и вероятности необратимых изменений в костных тканях челюсти при ортопедическом лечении с использованием дентальных внутрикостных имплантатов / Е.Н. Чумаченко, С.Д. Арутюнов, И.Ю. Лебеденко, А.Н. Ильиных // Институт стоматологии. 2002. N. 2. С. 44–48.
10. Чуйко А.Н. Ещё раз о биомеханике пародонта / А.Н. Чуйко // Пародонтология. 2007. N. 4. С. 45–57.
11. Arataki T. Two-dimensional finite element analysis of the influence of bridge design on stress distribution in bone tissues surrounding fixtures of osseointegrated implants in the lower molar region / T. Arataki, Y. Adachi, M. Kishi // Bull. Tokyo Dent. Coll. 1998. V. 39, N. 3. P. 199–209.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРИТИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ

С.В. Белим

В работе проведен анализ критического поведения систем, для которых экспериментальные значения критических индексов не совпадают с критическими индексами модели Гейзенберга. Осуществлена попытка обоснования значений критических индексов таких систем исходя из модели Гейзенберга с эффектами дальнего действия. На основе критического индекса γ вычислены значения параметра дальнего действия для различных экспериментально изученных систем, проведено сравнение теоретически вычисленного индекса β с опытными данными.

В ряде экспериментальных работ [1–5] обнаружено отличие критических индексов, измеряемых вблизи линии фазового перехода второго рода от предсказываемых теорией критических явлений как для трехмерной модели Гейзенберга ($\gamma = 1.386$, $\beta = 0.364$), так и для трехмерной XY-модели ($\gamma = 1.316$, $\beta = 0.345$) и модели Изинга ($\gamma = 1.241$, $\beta = 0.325$) [6]. Авторы этих работ объясняют расхождения с предсказаниями теории для модели Гейзенберга необходимостью учета взаимодействия не только ближайших соседей, но и следующих за ближайшими узлов. Влияние соседей, следующих за ближайшими, может быть учтено с помощью введения взаимодействия, убывающего с расстоянием по степенному закону $J(r) \sim r^{-D-\sigma}$, где D – размерность системы, σ – параметр дальнего действия [7].

В работе [1] исследуется магнитное критическое поведение EuO , найдены критические индексы $\gamma = 1.29 \pm 0.01$, $\beta = 0.368 \pm 0.005$, а также показано, что необходим учет соседей, следующих за ближайшими, для которых обменный интеграл $J_2 = (0.5 \pm 0.2)J_1$ (J_1 – обменный интеграл для ближайших соседей).

В работе [2] проведены измерения критических индексов для $La_{0.5}Sr_{0.5}CoO_3$ для фазового перехода парамагнетик – ферромагнетик. В данной работе получены значения критических индексов $\gamma = 1.351 \pm 0.009$, $\beta = 0.321 \pm 0.002$. Ранее [3] критические явления исследовались в сплавах $La_{1-x}Sr_xCoO_3$ ($0.2 \leq x \leq 0.3$) и дали значения критических индексов $0.43 \leq \beta \leq 0.46$, $1.39 \leq \gamma \leq 1.43$.

Отличие критических индексов от предсказаний теории короткодействующих систем также было обнаружено для ферромагнитного фазового перехода в $La_{0.1}Ba_{0.9}VS_3$ [4]. При этом критические индексы имеют значения $\gamma = 1.366$, $\beta = 0.501$. Аналогичные результаты были получены в работе [5] для сплавов $Fe_{90-x}Mn_xZr_{10}$ ($0 \leq x \leq 16$).

Критические индексы трехмерных изингоподобных систем для различных значений параметра дального действия были получены в работе [8]. В данной работе показано, что значение индекса γ растет, а индекса β убывает с увеличением параметра дального действия σ . При этом влияние эффектов дального действия существенно лишь при $\sigma < 2$, при $\sigma \geq 2$ система демонстрирует короткодействующее критическое поведение. Новые классы универсальности возникают в интервале $1.5 < \sigma < 2$, при $\sigma \leq 1.5$ в системе наблюдается среднестатистическое критическое поведение.

Таким образом, целью данной работы является расчет параметра дального действия для систем, требующих учета взаимодействия не только ближайших соседей, исходя из экспериментальных данных.

1. Теоретико-полевое описание

Гамильтониан системы с учетом эффектов дального действия может быть записан в виде:

$$H = \int d^D q \left\{ \frac{1}{2}(\tau_0 + q^\sigma)\varphi^2 + u_0\varphi^4 \right\}, \quad (1)$$

где φ – флуктуации n -мерного параметра порядка, D – размерность пространства, $\tau_0 \sim |T - T_c|$, T_c – критическая температура, u_0 – положительная константа. Критическое поведение существенно зависит от параметра σ , задающего скорость убывания взаимодействия с расстоянием. Как показано в работе [7], влияние эффектов дального действия существенно при $0 < \sigma < 2$, а при $\sigma \geq 2$ критическое поведение эквивалентно короткодействующим системам. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем $0 < \sigma < 2$.

Проводя стандартную ренормгрупповую процедуру на основе техники фейнмановских диаграмм [6] с пропатором $G(\vec{k}) = 1/(\tau + |\vec{k}|^\sigma)$, получаем выражения для функций β, γ_φ и γ_t , задающих дифференциальное уравнение ренормгруппы.

$$\begin{aligned} \beta &= -(2\sigma - D) \left[1 - 4(n+8)v + \left(64(5n+22)(2\tilde{J}_1 - 1) - 128(n+2)\tilde{G} \right) v^2 \right], \\ \gamma_t &= (2\sigma - D) \left(-2(n+2)v + 48(n+2) \left(2\tilde{J}_1 - 1 - \frac{1}{3}\tilde{G} \right) v^2 \right), \\ \gamma_\varphi &= 64(n+2)\tilde{G}v^2, \\ v &= u \cdot J_0, \quad \tilde{J}_1 = \frac{J_1}{J_0^2}, \quad \tilde{G} = \frac{G}{J_0^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + |\vec{q}|^\sigma)^2 (1 + |\vec{p}|^\sigma) (1 + |q^2 + p^2 + 2\vec{p}\vec{q}|^{\sigma/2})}, \\
J_0 &= \int \frac{d^D q}{(1 + |\vec{q}|^\sigma)^2}, \\
G &= -\frac{\partial}{\partial |\vec{k}|^\sigma} \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + |q^2 + k^2 + 2\vec{k}\vec{q}|^\sigma) (1 + |\vec{p}|^\sigma) (1 + |q^2 + p^2 + 2\vec{p}\vec{q}|^{\sigma/2})}.
\end{aligned}$$

Полученное выражение для β -функции представляет собой асимптотический ряд, и для извлечения из него нужной физической информации необходимо применить метод суммирования. В данной работе было использовано преобразование Бореля-Леруа, дающее адекватные результаты в применении к рядам, возникающим в теории критических явлений:

$$\begin{aligned}
f(v) &= \sum_i c_i v^i = \int_0^\infty e^{-t} t^b F(vt) dt, \\
F(v) &= \sum_i \frac{c_i}{(i+b)!} v^i.
\end{aligned} \tag{3}$$

В двухпетлевом приближении для вычисления β -функции был использован аппроксимант $[2/1]$ с варьированием параметра b . Такое варьирование b позволяет выяснить, в каких пределах изменяется значение эффективного заряда, и оценить погрешность полученных критических индексов.

Режим критического поведения полностью определяется устойчивыми неподвижными точками ренормгруппового преобразования, которые могут быть найдены из условия равенства нулю β -функции:

$$\beta(v^*) = 0. \tag{4}$$

Условием устойчивости является положительность производной β -функции в неподвижной точке:

$$\lambda = \frac{\partial \beta(v^*)}{\partial v} > 0. \tag{5}$$

Индекс ν , характеризующий рост радиуса корреляции в окрестности критической точки ($R_c \sim |T - T_c|^{-\nu}$), находится на основе соотношения:

$$\nu = v(\sigma + \gamma_t)^{-1}.$$

Индекс Фишера η , описывающий поведение корреляционной функции в окрестности критической точки в пространстве волновых векторов ($G \sim k^{\sigma+\eta}$), определяется на основе скейлинговой функции γ_φ : $\eta = 2 - \sigma + \gamma_\varphi$. Значение критических индексов γ и β может быть определено исходя из скейлинговых соотношений:

$$\gamma = \nu(\sigma - \eta), \quad \beta = \frac{\nu}{2}(D - \sigma + \eta). \tag{6}$$

Следует отметить, что процедура суммирования Паде-Леруа возможна не при любых значениях параметра b , что существенно снижает возможности использования метода. Это ограничение связано с появлением у аппроксимант

полюсов вблизи решений уравнения (4), что приводит к невозможности определения положения фиксированных точек. В данной работе проводилось варьирование параметра b в интервале от 0 до значения, начиная с которого определение устойчивой фиксированной точки невозможно. На данном интервале выбиралось 10 значений параметра b , для которых производился поиск фиксированных точек. В качестве значения эффективных зарядов в фиксированной точке выбирались средние значения с некоторой погрешностью, определяемой разбросом значений при различных b .

2. Значения параметра дальнего действия

Рассмотрим применимость модели дальнедействующих систем к экспериментальным данным, приведенным во введении. Будем вычислять значение параметра дальнего действия σ по критическому индексу γ и проводить сравнение вычисленного теоретически индекса β с соответствующим значением, полученным опытным путем.

Для EuO [1] экспериментальные критические индексы $\gamma = 1.29 \pm 0.01$, $\beta = 0.368 \pm 0.005$. В рамках модели Гейзенберга ($n = 3$) соответствующее значение индекса $\gamma = 1.290 \pm 0.002$ может быть получено при $\sigma = 1.941$, при этом для индекса $\beta = 0.376 \pm 0.008$. В рамках ХУ-модели ($n = 2$) значение индекса $\gamma = 1.29 \pm 0.03$ может быть получено при $\sigma = 1.991$, при этом для индекса $\beta = 0.354 \pm 0.007$. Как видно из сравнения теоретических расчетов с экспериментальными значениями, модель Гейзенберга с эффектами дальнего действия демонстрирует хорошее согласие с опытными данными.

Для $La_{0.5}Sr_{0.5}CoO_3$ [2] экспериментальные критические индексы $\gamma = 1.351 \pm 0.009$, $\beta = 0.321 \pm 0.002$. В рамках модели Гейзенберга ($n = 3$) значение индекса $\gamma = 1.351 \pm 0.002$ может быть получено при $\sigma = 1.980$, при этом индекс $\beta = 0.368 \pm 0.004$. В рамках ХУ-модели ($n = 2$) значение индекса $\gamma = 1.351$ получить невозможно, так как максимальное значение индекса достигается при $\sigma = 2$ и равно $\gamma = 1.316$. Как видим, расхождение значений, предсказываемых теорией и наблюдаемых в эксперименте, значительно. Однако, как указано в работе [2], индекс γ , по которому определялся параметр дальнего действия, вычислялся исходя из значения критической температуры $T_c = 223.18\text{ K}$, а индекс β исходя из значения $T_c = 222.82\text{ K}$. Тогда как хорошо известно, что значения критических индексов весьма чувствительны к выбору критической температуры.

Для $La_{0.1}Ba_{0.9}VS_3$ [4] экспериментальные критические индексы $\gamma = 1.366$, $\beta = 0.501$. В рамках модели Гейзенберга ($n = 3$) значение индекса $\gamma = 1.366 \pm 0.002$ может быть получено при $\sigma = 1.990$, при этом для индекса $\beta = 0.369 \pm 0.009$. Как и в предыдущем случае, применение ХУ-модели невозможно. Как видим, совпадения теоретического значения индекса β с экспериментальным не наблюдается. Однако следует отметить, что экспериментальное значение индекса $\beta = 0.501$ выглядит достаточно странно, так как всегда выполняется ограничение $\beta \leq 0.5$, причем максимальное значение $\beta = 0.5$ достигается только в рамках теории среднего поля, для которого $\gamma = 1$.

Рассмотрим критические индексы, характерные для сплавов $Fe_{90-x}Mn_xZr_{10}$ ($0 \leq x \leq 16$), как показано в работе [5], они существенно зависят от параметра x . Значения критических индексов, полученных экспериментально в [5], приведено в таблице. В этой же таблице приведены значения параметра дальногодействия σ и индекса β_H , полученные на основе модели Гейзенберга с эффектами дальногодействия, опираясь на экспериментальное значение индекса γ .

x	γ	β	σ	β_H
0	1.376	0.369	1.995	0.36 ± 0.01
4	1.383	0.373	1.998	0.37 ± 0.01
6	1.359	0.358	1.984	0.37 ± 0.02
8	1.364	0.355	1.987	0.36 ± 0.02
10	1.406	0.356	-	-
12	1.395	0.376	-	-
16	1.412	0.362	-	-

При значениях $x > 8$ определить параметр дальногодействия σ невозможно в силу того, что максимально возможное значение индекса $\gamma = 1.386$ для модели Гейзенберга с дальнымдействием достигается при $\sigma = 2$. Как видим, в интервале $0 \leq x \leq 8$ наблюдается достаточно хорошее совпадение теоретических предсказаний с опытными данными. Для $x > 8$ модель Гейзенберга с эффектами дальногодействия, по-видимому, неприменима.

Как видно из расчетов, использование модели Гейзенберга с эффектами дальногодействия позволяет в ряде случаев объяснить отклонение значений критических индексов от предсказаний обычной модели Гейзенберга. Однако параметр дальногодействия, вычисленный на основе индекса γ , не всегда приводит к совпадению предсказываемого индекса β с наблюдаемым на опыте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Menyuk N., Dwight K., Reed T. B. Critical Magnetic Properties and Exchange Interactions in EuO // Phys. Rev. B. 1971. V. 3. P. 1689–1698.
2. Mukherjee S., Raychaudhuri P., Nigman A. K. Critical behavior in $La_{0.5}Sr_{0.5}CoO_3$ // Phys. Rev. B. 2000. V. 61. P. 8651–8653.
3. Mira J., Rivas J., Vazquez M., Garcia-Beneytes J.M., Arcas J., Sanchez R.D., Senaris-Rodriguez M.A. Critical exponents of the ferromagnetic-paramagnetic phase transition of $La_{1-x}Sr_xCoO_3$ ($0.20 < x < 0.30$) // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 59. P. 123–126.
4. Cabassi R., Bolzoni F., Gauzzi A., Licci F. Critical exponents and amplitudes of the ferromagnetic transition in $La_{0.1}Ba_{0.9}VS_3$ // Phys. Rev. B. 2006. V. 74, P. 184425–184430.
5. Perumal A., Srinivas V. Critical behavior of weak itinerant ferromagnet $Fe_{90-x}Mn_xZr_{10}$ ($0 < x < 16$) alloys // Phys. Rev. B. 2003. V. 67. P. 094418–094423.
6. Le Guillou J. C., Zinn-Justin J. Critical exponents from field theory // Phys. Rev. B. 1980. V. 21. P. 3976–3998.
7. Fisher M. E., Ma S.-K., Nickel B.G. Critical Exponents for Long-Range Interactions // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. P. 917–920.
8. Белим С.В. Влияние эффектов дальногодействия на критическое поведение трехмерных систем // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. В. 2. С. 118–120.

КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

С.В. Белим

В работе проведен анализ критического поведения изотропных трехмерных систем с диполь-дипольным взаимодействием в однопетлевом приближении. Получены выражения для неподвижной фиксированной точки ренормгруппового преобразования и критических индексов в зависимости от относительной интенсивности диполь-дипольного взаимодействия.

Введение

Магнитное диполь-дипольное взаимодействие существует во всех магнитных материалах, но в большинстве ферромагнетиков упорядочивание обусловлено обменным взаимодействием, лишь в материалах с температурой перехода $T_c > 300K$ значительное влияние оказывают диполь-дипольные силы. Экспериментально существенное влияние диполь-дипольного взаимодействия на критические явления было обнаружено в ферромагнетике EuO [1] по отличию критических индексов от предсказываемых теорией с близкодействием. Так, согласно модели Гейзенберга критический индекс теплоемкости должен принимать значение $\alpha = -0.13$, тогда как экспериментальное значение для EuO $\alpha = -0.04 \pm 0.02$.

Впервые проблема описания критического поведения систем с диполь-дипольным взаимодействием была рассмотрена в работе [2] в рамках ε -разложения ($\varepsilon = 4 - D$, D – размерность пространства) в однопетлевом приближении для систем, размерность параметра порядка которых совпадает с размерностью пространства ($n = D$). Были получены приблизительные значения критических индексов, отличные от индексов систем с близкодействием. Авторы данной работы исследуют поведение системы вблизи не реальной критической точки, а некоторой смещенной точки, причем смещение находится в процессе расчетов и так же, как критические индексы, записывается в виде асимптотического ряда по параметру ε . Данный подход был развит в серии

статей [3–7], причем не только для изотропных, но и для анизотропных систем. В статье [4], посвященной изотропным системам, были вычислены значения критических индексов в рамках ε -разложения: $1/\gamma = 1 - 9/34\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, $\eta = 0.023\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$. В двухпетлевом приближении в рамках ε -разложения критические индексы систем с диполь-дипольным взаимодействием были получены в работе [8] ($\nu = 0.5(1 + (9/34)\varepsilon + (7013/58956)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3))$).

Теоретико-полевой подход в описании систем с диполь-дипольным взаимодействием был развит в работе [9]. Авторы этой статьи исследуют поведение системы вблизи реальной критической температуры в рамках ε -разложения в двухпетлевом приближении. В результате такого уточнения были найдены значения критических индексов, отличающиеся от полученных в предыдущих работах лишь в слагаемых второго порядка по ε ($\nu = 0.5(1 + (9/34)\varepsilon + (7013/58956)\varepsilon^2)$, $\gamma = 1 + (9/34)\varepsilon + (5687/58956)\varepsilon^2$, $\eta = (13/289)\varepsilon^2$).

Компьютерное моделирование методом Монте-Карло [10] продемонстрировало критическое поведение системы, описываемое критическим индексом $\alpha = -0.02$, что находится в не очень хорошем согласии с предсказаниями теории, построенной в рамках ε -разложения.

Таким образом, целью данной статьи ставится развитие теоретико-полевого подхода к описанию изотропных систем с диполь-дипольным взаимодействием непосредственно в трехмерном пространстве.

1. Гамильтониан системы

Как показано в [3], гамильтониан трехмерной системы с диполь-дипольным взаимодействием может быть записан в виде:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3r \left[(\tau_0 + \nabla^2) \delta^{\alpha\beta} + v_0 \frac{r^2 \delta^{\alpha\beta} + x^\alpha x^\beta}{r^5} \right] S_0^\alpha S_0^\beta + \frac{u_0}{4!} \int d^3r F^{\alpha\beta\gamma\delta} S_0^\alpha S_0^\beta S_0^\gamma S_0^\delta. \quad (1)$$

Здесь S_0^α – компонента α флуктуаций параметра порядка ($1 \leq \alpha \leq n$), роль которого для ферромагнитных систем играет намагниченность, $r_0 \sim |T - T_c|$, T_c – критическая температура, u_0 – положительная константа, g_0 – относительная интенсивность диполь-дипольного взаимодействия по сравнению с обменным взаимодействием, $F = 1/3(\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\delta} + \delta^{\alpha\gamma}\delta^{\beta\delta} + \delta^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma})$. Из анализа первого слагаемого гамильтониана можно сделать вывод, что количество компонентов спина n должно совпадать с размерностью пространства D ($n = d$). Это требование вытекает из того, что необходимо производить свертку в слагаемом $x^\alpha x^\beta S_0^\alpha S_0^\beta$, описывающем диполь-дипольное взаимодействие, то есть мы имеем дело с моделью Гейзенберга.

Преобразование Фурье данного гамильтониана сталкивается с трудностью, вытекающей из расходимости интеграла

$$K = \int_0^\infty \frac{1}{r} \exp(-iqr) dr, \quad (2)$$

возникающего при вычислении Фурье-образа слагаемого, описывающего диполь – дипольное взаимодействие. Однако эта трудность, как будет показано

далее, легко устраняется при вычислении критических индексов, которые, собственно, являются величинами, измеряемыми в эксперименте. Запишем формально гамильтониан системы после преобразования Фурье:

$$H = \frac{1}{2} \int d^D q \left[(r_0 + q^2) \delta^{\alpha\beta} + g_0 \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2} \right] S_0^\alpha(\vec{q}) S_0^\beta(-\vec{q}) + \frac{u_0}{4!} \int \int \int \int d^D q_1 d^D q_2 d^D q_3 F^{\alpha\beta\gamma\delta} S_0^\alpha(\vec{q}_1) S_0^\beta(\vec{q}_2) S_0^\gamma(\vec{q}_3) S_0^\delta(-\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3). \quad (3)$$

Здесь введены обозначения

$$g_0 = K \cdot v_0, \quad r_0 = \tau_0 + K \cdot v_0. \quad (4)$$

В дальнейшем в рамках теоретико-полевого подхода производится ренормгрупповое преобразование затравочной величины r_0 , которое позволяет устранять из нее расходимости. Константа же диполь-дипольного взаимодействия, как будет показано ниже, встречается лишь в выражениях вида $g = g_0/r_0$, что также приводит к конечным выражениям.

Дипольные силы вносят анизотропию в спиновые флуктуации, выделяя направления параллельно волнового вектора $\vec{q}$ и перпендикулярно ему. В связи с чем введем проективные операторы продольной $P_L^{\alpha\beta}$ и поперечной составляющих $P_T^{\alpha\beta}$:

$$P_L^{\alpha\beta} = \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2}, \quad P_T^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2}. \quad (5)$$

После введения проективных операторов гамильтониан системы примет вид:

$$H = \frac{1}{2} \int d^D q \left[(r_0 + q^2) P_T^{\alpha\beta} + (r_0 + g_0 + q^2) P_L^{\alpha\beta} \right] S_0^\alpha(\vec{q}) S_0^\beta(-\vec{q}) + \frac{u_0}{4!} \int \int \int \int d^D q_1 d^D q_2 d^D q_3 F^{\alpha\beta\gamma\delta} S_0^\alpha(\vec{q}_1) S_0^\beta(\vec{q}_2) S_0^\gamma(\vec{q}_3) S_0^\delta(-\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3). \quad (6)$$

Продольные и поперечные составляющие критических флуктуаций демонстрируют различные режимы критического поведения, обусловленного сдвигом критической температуры для продольной составляющей вследствие диполь-дипольного взаимодействия.

Свободный пропагатор системы может быть записан в следующем виде:

$$G_0^{\alpha\beta}(r_0, g_0, \vec{q}) = G_0^L(r_0, g_0, \vec{q}) P_L^{\alpha\beta} + G_0^T(r_0, \vec{q}) P_T^{\alpha\beta}, \quad (7)$$

где

$$G_0^L(r_0, g_0, \vec{q}) = \frac{1}{r_0 + g_0 + q^2}, \quad G_0^T(r_0, \vec{q}) = \frac{1}{r_0 + q^2}. \quad (8)$$

2. Теоретико-полевое описание

Поведение системы в критической области определяется значениями эффективных зарядов в неподвижной точке ренормгруппового преобразования, которое

в рассматриваемом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u_0 &= b^{4-D} u Z_u, \quad r_0 = b^2 r Z_r, \quad g_0 = b^2 g Z_g, \\ S_0^\alpha(\vec{q}) &= Z_L^{1/2} P_L^{\alpha\beta} S^\beta(\vec{q}) + Z_T^{1/2} P_T^{\alpha\beta} S^\beta(\vec{q}). \end{aligned} \quad (9)$$

Масштабный параметр b вводится для обезразмеривания величин. Введение отдельных нормировочных факторов для продольной и поперечной составляющих флуктуаций намагниченности связано с анизотропией, описанной выше.

В силу наличия анизотропии вершинные функции так же, как и свободный пропатор, будут зависеть от координат. Фейнмановские диаграммы для двухточечной вершинной функции со вставкой $\Gamma^{(2,1)\alpha\beta}$ и четырехточечной вершинной функции $\Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}$ имеют такой же внешний вид, как и для обычных систем с близкодействием.

Аналитическое выражение для вершинной функции $\Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta} &= u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{22}{3} u_0^2 \sum_{i,j,l,m=1}^3 (F^{\alpha\beta il} F^{jm\gamma\delta} + F^{\alpha\gamma il} F^{jm\beta\delta} + F^{\alpha\delta il} F^{jm\beta\gamma}) \cdot \\ &\cdot \int d^D q G_0^{ij}(\vec{q}) G_0^{lm}(-\vec{q}). \end{aligned} \quad (10)$$

После вычисления интеграла и выполнения суммирования по «немым» индексам (i, j, l, m) (подробности приведены в Приложении А) получаем выражение

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta} &= u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(1 - 22u_0(I_1 - 2I_2 + \frac{47}{81}I_3) \right), \\ I_1 &= \int \frac{q^2 dq}{(1+q^2)^2} = \pi^2, \\ I_2 &= \frac{4\pi g}{3} \int \frac{q^2 dq}{(1+q^2)^2(1+g+q^2)} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{1+g}} - \frac{1}{\sqrt{2+g+2\sqrt{1+g}}} \right), \\ I_3 &= \frac{4\pi g^2}{5} \int \frac{q^2 dq}{(1+q^2)^2(1+g+q^2)^2} = \frac{\pi^2}{5} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+g}} - \frac{4}{\sqrt{2+g+2\sqrt{1+g}}} \right), \\ g &= g_0/r_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналитическое выражение для вершинной функции со вставкой $\Gamma^{(2,1)\alpha\beta}$ может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,1)\alpha\beta} &= r_0 \delta^{\alpha\beta} - \frac{20}{3} r_0 u_0 \sum_{i,j,l,m=1}^3 F^{\alpha\beta ij} \delta^{lm} \int d^D q G_0^{ij}(\vec{q}) G_0^{lm}(-\vec{q}) \\ &= r_0 \delta^{\alpha\beta} \left(1 - 20u_0(I_1 - 2I_2 + \frac{5}{3}I_3) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Подробности вычисления аналитического выражения для $\Gamma^{(2,1)\alpha\beta}$ приведены в Приложении.

Запишем уравнение Каллана-Симанзика для объемных вершинных функций:

$$\left[b \frac{\partial}{\partial b} + \beta \frac{\partial}{\partial u} - \gamma_\varphi \frac{m}{2} b \frac{\partial \ln Z_\varphi}{\partial b} - \gamma_r r \frac{\partial}{\partial r} \right] \cdot \Gamma^{(m)\alpha\beta}(q; r, u, b) = 0. \quad (13)$$

В этом уравнении введены функции

$$\beta = b \frac{\partial u}{\partial b}, \quad \gamma_r = b \frac{\partial r}{\partial b}, \quad \gamma_\varphi = b \frac{\partial S_q}{\partial b}, \quad (14)$$

определяющие поведение системы в критической области.

Выражения для β - и γ -функций в однопетлевом приближении:

$$\begin{aligned} \beta &= -u \left[1 - 44u(I_1 - 2I_2 + \frac{47}{81}I_3) \right], \\ \gamma_t &= -20u \left(I_1 - 2I_2 + \frac{5}{3}I_3 \right). \end{aligned}$$

Режим критического поведения полностью определяется устойчивой неподвижной точкой ренормгруппового преобразования u^* , которая может быть найдена из условия равенства нулю β -функции:

$$\beta_i(u^*) = 0. \quad (15)$$

Требование устойчивости фиксированной точки сводится к условию

$$\frac{\partial \beta(u^*)}{\partial u} > 0. \quad (16)$$

Аналитическое выражение для устойчивой фиксированной точки имеет вид:

$$u^* = \frac{405\sqrt{1+g}(1+\sqrt{1+g})}{44\pi^2(452g+311\sqrt{1+g}+229)}. \quad (17)$$

Из выражения для u^* видно, что при $g = 0$ фиксированная точка совпадает со значением, получаемым для систем без диполь-дипольного взаимодействия $u^* = 0.00422$, а далее значение эффективного заряда очень быстро переходит к своему предельному значению $u^* = 0.00252$, в котором диполь-дипольное взаимодействие играет доминирующую роль ($g \rightarrow \infty$).

3. Критические индексы

Как хорошо известно, в однопетлевом приближении индекс Фишера η , определяющий поведение корреляционной функции в пространстве волновых векторов ($G \sim k^{2+\eta}$), равен нулю. Остановимся на индексе ν , характеризующем рост радиуса корреляции в окрестности критической точки ($R_c \sim |T - T_c|^{-\nu}$), который может быть найден на основе соотношения:

$$\nu = \frac{1}{2}(1 + \gamma_t)^{-1} = \frac{1}{2} \left[1 + 10u \left(I_1 - 2I_2 + \frac{5}{3}I_3 \right) \right]. \quad (18)$$

Подстановка значения эффективного заряда для устойчивой фиксированной точки приводит к выражению

$$\nu = \frac{27}{44} + \frac{I_3}{81(I_1 - 2I_2 + 47/81I_3)} = \frac{27}{44} + \frac{(1 - \sqrt{1+g})^2}{452g + 311\sqrt{1+g} + 229}.$$

В предельном случае отсутствия диполь-дипольного взаимодействия $g = 0$ получаем результат для обычных короткодействующих систем $\nu = 7/12 \approx 0.58333$, в предельном случае полного доминирования диполь-дипольного взаимодействия $g \rightarrow \infty$ имеем $\nu = 271/452 \approx 0.59956$.

Индекс теплоемкости α вычисляется из скейлингового соотношения $\alpha = 2 - \nu D$ ($D = 3$ – размерность пространства). Подстановка выражения для ν приводит к результату:

$$\alpha = \frac{1}{4} - \frac{3(1 - \sqrt{1+g})^2}{452g + 311\sqrt{1+g} + 229}. \quad (19)$$

Для двух предельных случаев получаем: при $g = 0$ индекс $\alpha = 0.25$, при $g \rightarrow \infty$ индекс $\alpha = 91/452 \approx 0.20133$.

Приложение. Вычисление аналитических выражений для вершинных функций $\Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}$ и $\Gamma^{(2,1)\alpha\beta}$

Для нахождения вершинных функций в однопетлевом приближении введем обозначение для интеграла

$$J^{ijlm} = \int d^D q G_0^{ij}(\vec{q}) G_0^{lm}(-\vec{q}). \quad (20)$$

Как было показано выше,

$$G_0^{\alpha\beta}(r_0, g_0, \vec{q}) = G_0^L(r_0, g_0, \vec{q}) P_L^{\alpha\beta} + G_0^T(r_0, \vec{q}) P_T^{\alpha\beta}, \quad (21)$$

где

$$G_0^L(r_0, g_0, \vec{q}) = \frac{1}{r_0 + g_0 + q^2}, \quad G_0^T(r_0, \vec{q}) = \frac{1}{r_0 + q^2}, \quad (22)$$

$$P_L^{\alpha\beta} = \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2}, \quad P_T^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} - \frac{q^\alpha q^\beta}{q^2}.$$

После подстановки свободного пропэгатора в выражение для интеграла J^{ijlm} и замены $g = g_0/r_0$ получим

$$J^{ijlm} = J_1^{ijlm} - 2J_2^{ijlm} + J_3^{ijlm}. \quad (23)$$

$$J_1^{ijlm} = \delta^{ij} \delta^{lm} I_1, \quad I_1 = \int \frac{d^D q}{(1 + q^2)^2} = \pi^2,$$

$$J_2^{ijlm} = \delta^{ij} g \int \frac{q^l q^m d^D q}{q^2 (1 + q^2)^2 (1 + g + q^2)},$$

$$J_3^{ijlm} = g^2 \int \frac{q^i q^j q^l q^m d^D q}{q^4 (1 + q^2)^2 (1 + g + q^2)^2}.$$

Для интеграла J_2^{ijlm} прямая подстановка различных значений пары индексов $l, m = 1, 2, 3$ и интегрирование по угловым переменным в сферических координатах показала, что ненулевыми являются только интегралы, в которых $l = m$. Таким образом, можно записать, что

$$J_2^{ijlm} = \delta^{ij} \delta^{lm} I_2, \quad (24)$$

$$I_2 = \frac{4\pi g}{3} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(1+q^2)^2(1+g+q^2)} = \frac{\pi^2}{3\sqrt{1+g}(1+\sqrt{1+g})}.$$

Для вычисления интеграла J_3^{ijlm} необходимо учесть, что он симметричен относительно любой перестановки своих индексов, что существенно уменьшает число случаев, требующих рассмотрения. Проведение аналогичной предыдущему случаю подстановки всех возможных значений $i, j, l, m = 1, 2, 3$ и вычисление соответствующих интегралов по угловым переменным в сферических координатах показало, что не зануляются только интегралы, в которых две пары повторяющихся индексов ($i = j, l = m$, или $i = l, j = m$, или $i = m, j = l$). Вычисления приводят к результату

$$J_3^{ijlm} = F^{ijlm} I_3, \quad (25)$$

$$I_3 = \frac{4\pi g^2}{5} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{(1+q^2)^2(1+g+q^2)^2} = \frac{\pi^2(1-\sqrt{1+g})^2}{5\sqrt{1+g}(1+\sqrt{1+g})}.$$

Для вершинной функции $\Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}$ исходя из Фейнмановской диаграммы, изображенной на рисунке 1(а), можем записать:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)\alpha\beta\gamma\delta} &= u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (26) \\ &- \frac{22}{3} u_0^2 \sum_{i,j,l,m=1}^3 (F^{\alpha\beta il} F^{jm\gamma\delta} + F^{\alpha\gamma il} F^{jm\beta\delta} + F^{\alpha\delta il} F^{jm\beta\gamma}) \int d^D q G_0^{ij}(\vec{q}) G_0^{lm}(-\vec{q}) \\ &= u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{22}{3} u_0^2 \sum_{i,j,l,m=1}^3 (F^{\alpha\beta il} F^{jm\gamma\delta} + F^{\alpha\gamma il} F^{jm\beta\delta} + F^{\alpha\delta il} F^{jm\beta\gamma}) \\ &\cdot \left(\delta^{ij} \delta^{lm} (I_1 - 2I_2) + F^{ijlm} I_3 \right) = u_0 F^{\alpha\beta\gamma\delta} \left(1 - 22u_0(I_1 - 2I_2 + \frac{47}{81}I_3) \right). \end{aligned}$$

Для вершинной функции $\Gamma^{(2,1)\alpha\beta}$, которой соответствует Фейнмановская диаграмма, изображенная на рисунке 1(б), имеем

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2,1)\alpha\beta} &= r_0 \delta^{\alpha\beta} - \frac{20}{3} r_0 u_0 \sum_{i,j,l,m=1}^3 F^{\alpha\beta ij} \delta^{lm} \int d^D q G_0^{ij}(\vec{q}) G_0^{lm}(-\vec{q}) \quad (27) \\ &= r_0 \delta^{\alpha\beta} - \frac{20}{3} r_0 u_0 \sum_{i,j,l,m=1}^3 F^{\alpha\beta ij} \delta^{lm} \left(\delta^{ij} \delta^{lm} (I_1 - 2I_2) + F^{ijlm} I_3 \right) \\ &= r_0 \delta^{\alpha\beta} \left(1 - 20u_0(I_1 - 2I_2 + \frac{5}{3}I_3) \right). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Lederman F.L., Salamon M.B., Shacklette L.W. Experimental verification of scaling and test of the universality hypothesis from specific-heat data // Phys. Rev. B. 1974. V. 9. P. 2981–2988.
2. Fisher M. E., Aharony A. Dipolar Interactions at Ferromagnetic Critical Points // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 559–562.
3. Aharony A., Fisher M.E. Critical Behavior of Magnets with Dipolar Interactions. I. Renormalization Group near Four Dimensions // Phys. Rev. B. 1973 V. 8. P. 3323–3341.
4. Aharony A. Critical Behavior of Magnets with Dipolar Interactions. II. Feynman-Graph Expansion for Ferromagnets near Four Dimensions // Phys. Rev. B. 1973. V. 8. P. 3342–3348.
5. Aharony A. Critical Behavior of Magnets with Dipolar Interactions. III. Antiferromagnets // Phys. Rev. B. 1973. V. 8. P. 3349–3357.
6. Aharony A. Critical Behavior of Magnets with Dipolar Interactions. IV. Anisotropy // Phys. Rev. B. 1973. V. 8. P. 3358–3362.
7. Aharony A. Critical Behavior of Magnets with Dipolar Interactions. V. Uniaxial Magnets in d Dimensions // Phys. Rev. B. 1973. V. 8. P. 3363–3370.
8. Bruce A. D., Aharony A. Critical exponents of ferromagnets with dipolar interactions: Second-order ε -expansion // Phys. Rev. B. 1974. V. 10. P. 2078–2087.
9. Frey E., Schwabl F. Renormalized field theory for the static crossover in isotropic dipolar ferromagnets // Phys. Rev. B. 1991. V. 43. P. 833–841.
10. Bouchaud J.P., Zerah P.G. Dipolar ferromagnetism: A Monte Carlo study // Phys. Rev. B. 1993. V. 47. P. 9095–9097.

МНОВОВАРИАНТНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОЙ РЕАЛЬНОСТИ, СОПУТСТВУЮЩАЯ ЗРЕНИЮ

А.К. Гуц

В рамках квантовой механики дается математическая модель процесса реакции глаза на одиночные кванты света. Рассматривается картина реакции глаза с точки зрения эвереттовской интерпретации квантовой механики.

Мы видим реальность, окружающую нас, посредством зрения. Глаз способен различать отдельные кванты света, отдельные фотоны [1, с.427]. Нас интересует, нельзя ли на основе экспериментальных данных о том, как мозг воспринимает кванты света в сочетании с эвереттовской интерпретацией квантовой механики, увидеть, как те же самые кванты воспринимаются мозгом в параллельной вселенной Эверетта?

1. Сигналы в ответ на одиночные кванты света

Для регистрации реакции глаза на одиночные кванты света регистрировались мембранные токи в наружных сегментах палочек. Специальный электрод с тонким кончиком подсасывается к наружному сегменту палочки, выступающему из кусочка сетчатки. Узконаправленный пучок света освещает строго одну фоторецепторную клетку [1, с. 427]. «Чтобы измерить сигналы в ответ на одиночные кванты света, Бейлор с коллегами регистрировали токи от отдельных палочек в сетчатках жабы, обезьяны и человека (рис.1). Эти опыты представляют собой уникальный пример эксперимента, в котором показано, как такой сложный процесс, как восприятие слабых вспышек света, может коррелировать с изменениями, происходящими на уровне отдельных молекул.

Процедура по изоляции фрагмента сетчатки от животного либо трупного материала должна для этих экспериментов производиться в темноте. Для измерения тока наружный сегмент палочки засасывается в тонкую пипетку (см. рис.1). Как и ожидалось, эти эксперименты показывают, что в темноте ток постоянно течет внутрь наружного сегмента. Вспышки света приводят к закрытию каналов в наружном сегменте, вызывая уменьшение «темнового» тока. На рис.2 показаны ответы наружного сегмента на очень слабые вспышки света,

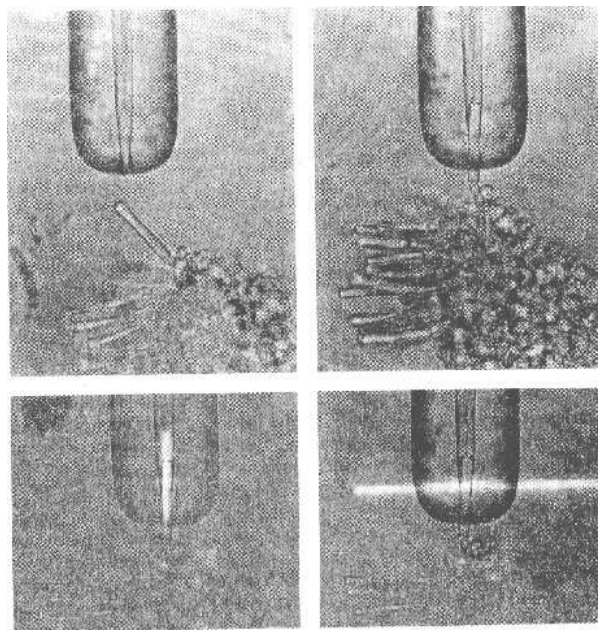


Рис. 1. Метод регистрации мембранных токов в наружных сегментах палочек. Специальный электрод с тонким кончиком подсасывается к наружному сегменту палочки, выступающему из кусочка сетчатки. Узконаправленный пучок света освещает строго одну фоторецепторную клетку [1, с. 427]

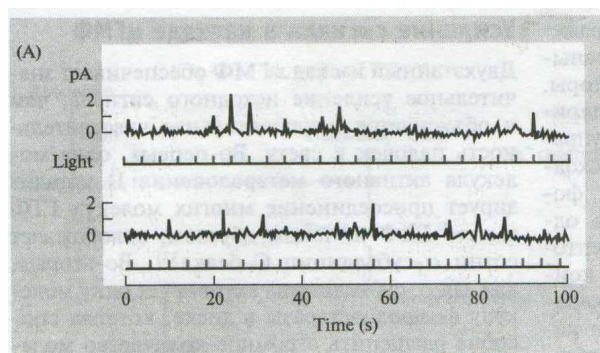


Рис. 2. Сигналы, записанные при помощи всасывающего электрода в области наружного сегмента палочки обезьяны. Ответы на слабые вспышки света (показанные нижней линией с подписью «Light»), показано две записи. Наблюдается флуктуация тока квантового характера. Миниатюрные пики соответствуют активации зрительных пигментов отдельными фотонами. Довольно часто фотоизомеризация не возникает [1, с. 428]

соответствующие 1-2 квантам. Амплитуда токов невелика и пропорциональна числу поглощенных квантов. Иногда вспышка вызывает одиночный ответ, иногда – двойной, а иногда – вообще никакой реакции» [1, с. 428-429].

Повторяя эксперимент и набирая статистику, можно найти плотность функции распределения $\phi(z)$, где z – величина, характеризующая отклонение самописца, регистрирующего сигнал.

Примем, что $z = 0$ отвечает наиболее вероятному отклику самописца Z .

Графики, приведенные на рис.4, показывают, что функция распределения

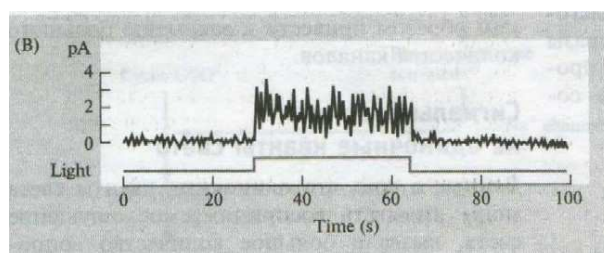


Рис. 3. Постоянное, более сильное освещение (нижний график) приводит к серии сигналов [1, с. 428]

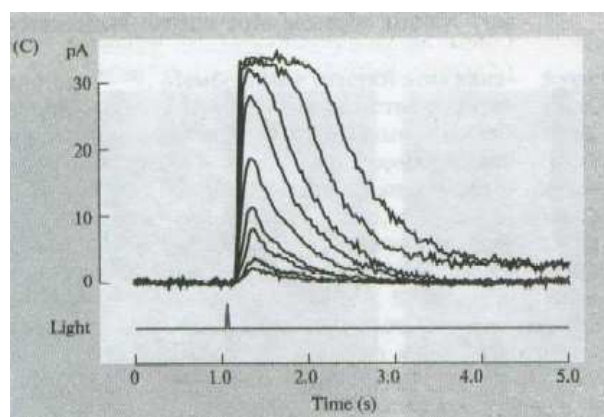


Рис. 4. Сигналы, вызванные вспышками разной интенсивности

$\phi^2(z)$ одна и та же для квантов любой интенсивности.

2. Квантовомеханическое описание системы «квант света - реакция самописца»

Обозначаем величину интенсивности кванта света через s и предполагаем, что система «квант света (s) - реакция самописца (z)» описывается уравнением Шредингера

$$\frac{d\Psi}{dt} = (H_{qv} + H_Z + V_I)\Psi \quad (1)$$

с начальным данным

$$\Psi(z, s, 0) = \phi(z)\chi(s). \quad (2)$$

Считая, что время взаимодействия, т.е. отклика (реакции) глаза на квант света столь мало, что в течение этого времени действием членов $H_{qv} + H_Z$ гамильтониана можно пренебречь [2], [3, с. 169], и принимая

$$V_I = -iz\hbar \frac{\partial}{\partial s},$$

находим решение нашей задачи

$$\Psi(z, s, t) = \phi(z)\chi(s - zt). \quad (3)$$

Перепишем это выражение в виде [2]

$$\Psi(z, s, t) = \int \left(\frac{1}{N_{s'}} \right) \xi_{s'}(z, t) \delta(s - s') ds', \quad (4)$$

где

$$\xi_{s'}(z, t) = N_{s'} \phi(z) \chi(s' - zt)$$

и

$$\left(\frac{1}{N_{s'}} \right)^2 = \int \phi^*(z) \phi(z) \chi^*(s' - zt) \chi(s' - zt) dz.$$

Выражение (4) – это суперпозиция (с коэффициентами $\frac{1}{N_{s'}}$) состояний

$$\Psi_{s'} = \xi_{s'}(z, t) \delta(s - s')$$

системы. Каждый элемент суперпозиции $\Psi_{s'}$ описывает состояние, в котором квант света имеет интенсивность $s = s'$, а соотнесенное состояние подсистемы «реакция самописца (z)» задается функцией $\xi_{s'}(z, t)$.

Если $\chi(s)$ является достаточно острой (около $\delta(s - s_0)$), то $\xi_{s'}(z, t)$ подобна $\delta(z - (s' - s_0)/t)$ и, следовательно, $z = (s' - s_0)/t$.

При $t \rightarrow \infty$ $z \rightarrow 0$, т.е. с течением времени самописец будет показывать наиболее вероятное значение своего отклонения. Такой вывод вполне приемлем.

Но в таком случае при фиксированном $t = T$ и формула

$$\Psi(z, s, T) = \int \left(\frac{1}{N_{s'}} \right) \xi_{s'}(z, T) \delta(s - s') ds' \quad (5)$$

говорит, как отметил Эверетт, о разветвлении вселенной, при котором в каждой вселенной квант света имеет *различную* интенсивность s' , а наблюдатель фиксирует отклонение самописца на величину $z = (s' - s_0)/T$.

Представим $\Psi(z, s, T)$ в виде

$$\Psi(z, s, T) = \int \phi(z') \delta(z - z') \chi(s - z'T) dz',$$

т.е. как суперпозицию состояний $\psi_{z'} = \delta(z - z') \chi(s - z'T)$ с коэффициентами $\phi(z')$. Каждый из членов $\psi_{z'}$ суперпозиции описывает состояние системы, а точнее вселенную, в котором самописец показывает отклонение $z = z'$, а квант света имеет интенсивность $s = z'T$. Число $|\phi(z')|^2$ – это количество вселенных, в которых $z = z', s = z'T$. Полная определенность, никаких вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Николис Дж., Мартин А.Р., Валлас Б.Дж., Фукс П.А. От нейрона к мозгу. М.: УРСС, 2003.
2. Everett H. "Relative state" formulation of quantum mechanics // Reviews of Modern Physics. 1957. V. 29. P. 454–462.
3. Менский М.Б. Квантовые измерения и декогеренция. М.: ФМ, 2001.

ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЫ ДЕФОРМИРОВАННОГО ЯДРА В МОДЕЛИ ЖИДКОЙ КАПЛИ

Р.С. Курманов, Г.Б. Тодер

В общем виде получено вариационное уравнение для поверхности ядра, на которой реализуется минимум энергии статической формы ядра. В варьируемом функционале учтены ядерная и кулоновская части энергии, а также дополнительные условия сохранения объема ядра и расстояния между центрами масс будущих осколков. Получено многомерное уравнение Эйлера-Лагранжа для профильной функции ядра с резким краем и кулоновской энергии, записанной в новой форме: $E_C = K_C \int (d\vec{S} d\vec{S}') \sigma$. Обсуждаются граничные условия. Показано, что в случае симметричного деления найденное уравнение сводится к известному вариационному уравнению, полученному В.М. Струтинским для аксиально-симметричных форм.

1. Введение

Расчет фигур равновесия ядер является очень важным в теории деления. Точность и правильность расчета непосредственно влияют на выводы, которые делаются для конкретных физических моделей, применяемых при вычислении вероятностей выходов различных продуктов реакций деления и слияния.

В модели жидкой капли (МЖК) при нахождении фигур равновесия ядер обычно используются прямые вариационные методы. Варьируются параметры, задающие форму поверхности ядра. Включение того или иного параметра в рассмотрение часто определяется авторским выбором способа параметризации уравнения поверхности.

В работах [1, 2] предложена последовательная физически обоснованная и математически корректная процедура введения параметров в МЖК и получено одномерное интегродифференциальное уравнение для аксиально-симметричных форм профильной функции деформированного ядра, развит [3] эффективный метод решения полученного уравнения, проведен систематический анализ найденных решений.

Однако в работах [1–3] варьировался функционал энергии только для аксиально-симметричных форм ядра с резким краем. Детально изучались только аксиально-симметричные формы поверхности ядра. Профильная функция ядра зависела только от одной переменной — координаты вдоль оси симметрии делящегося ядра.

Предложенный в работах [1, 2] подход

- состоит в получении уравнений Эйлера-Лагранжа из требования минимума функционала потенциальной энергии с дополнительными условиями сохранения объема и деформации атомного ядра;
- дает регулярный способ введения параметров описывающих форму делящегося ядра;
- приводит к задаче на расчет формы поверхности ядра, реализующей условный экстремум.

Цели нашей статьи: 1) сформулировать в рамках многомерного вариационного подхода задачу расчета формы произвольно деформированного ядра; 2) найти общий вид уравнений Эйлера-Лагранжа для функции, описывающей произвольную форму поверхности ядра с осколками равной массы; 3) рассмотреть случай ядра с резким краем и получить для этого случая уравнения Эйлера-Лагранжа с соответствующими граничными условиями; 4) в качестве проверки правильности формализма получить уравнение для профильной функции аксиально-симметричного ядра, совпадающее с полученными ранее в работах [1–3].

2. Функционал энергии и дополнительные условия

Запишем функционал потенциальной энергии в виде:

$$E = E_n + E_C, \quad (1)$$

где E_n — ядерная, а E_C — кулоновская энергия ядра, которые могут быть представлены в виде поверхностных интегралов (см., например, [4, 5]) по всей поверхности ядра.

Энергия ядерного взаимодействия имеет вид:

$$E_n = K_n \oint \left(d\vec{S}, \vec{F}_n(\vec{r}) \right), \quad (2)$$

где K_n — размерный множитель; $\vec{F}_n(\vec{r})$ — вектор-функция, описывающая ядерное взаимодействие.

Энергия кулоновского взаимодействия:

$$E_C = K_C \oint \left(d\vec{S}, \vec{F}_C(\vec{r}) \right), \quad (3)$$

где K_C — размерный множитель; $\vec{F}_C(\vec{r})$ — вектор-функция, описывающая кулоновское взаимодействие; $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор элемента $d\vec{S}$ поверхности ядра.

Отметим, что явный вид вектор-функций $\vec{F}_n$ и $\vec{F}_C$ зависит от выбора модели и математически неоднозначен [4, 5].

Выражение для объема ядра имеет вид:

$$V = \int dV = \frac{1}{3} \oint (d\vec{S}, \vec{r}) = \oint (d\vec{S}, \vec{P}_1). \quad (4)$$

Второе равенство в формуле (4) вытекает из теоремы Гаусса. Обозначение подинтегральной функции

$$\vec{P}_1 = \frac{1}{3} \vec{r} \quad (5)$$

введено для удобства.

Расстояние между центрами масс будущих осколков деления запишем в следующей форме:

$$\rho = |\vec{\rho}| = \left| \frac{\int_{V_{right}} \vec{r} \rho_m dV}{M_{right}} - \frac{\int_{V_{left}} \vec{r} \rho_m dV}{M_{left}} \right|, \quad (6)$$

где вектор $\vec{\rho}$ соединяет центры масс будущих осколков; $\rho_m = M/V$ — плотность атомного ядра массой M и объемом V ¹; $M_{left} = \rho_m V_{left}$ и $M_{right} = \rho_m V_{right}$ — массы левого и правого будущих осколков ядра, пропорциональные их объемам $V_{left} = \varkappa V$ и $V_{right} = (1 - \varkappa)V$, по которым проводится интегрирование. Здесь $\varkappa$ — константа, фиксирующая отношение объема левой части ко объему ядра. Смысл названий «левый» и «правый» для осколков станет ясен ниже.

Заметим, что общность результатов не теряется, а вычисления упрощаются, если выбрать систему координат так, чтобы одна из пространственных осей, например ось OZ , была направлена вдоль вектора $\vec{\rho}$ ², а перпендикулярная этой оси плоскость XOY делила ядро на две части, отвечающие двум будущим осколкам, — правую и левую — так, чтобы все точки, принадлежащие правой части ядра, имели координату $z > 0$, все точки, принадлежащие левой части, имели координату $z < 0$ (рис. 1).

В такой системе координат поверхность ядра³ задается функцией $z = z(x, y)$, а выражение (6) принимает следующий вид:

$$\rho = \left| \frac{\int_{V_{right}} z \rho_m dV}{M_{right}} - \frac{\int_{V_{left}} z \rho_m dV}{M_{left}} \right|. \quad (7)$$

¹Как это обычно принято при изучении рассматриваемой модели, в данной работе плотность ядра считается постоянной вследствие слабой сжимаемости ядерного вещества.

²Это означает, что ось OZ направлена вдоль линии, соединяющей центры масс будущих осколков.

³Поверхность ядра в представляемом рассмотрении считается односвязной.

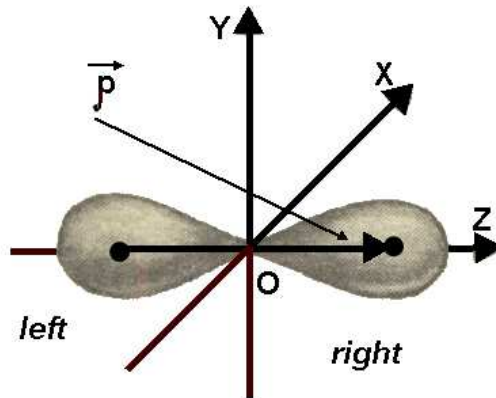


Рис. 1. Выбор системы координат

Используя теорему Гаусса, преобразуем правую часть равенства (7) к поверхностному интегралу:

$$\rho = \oint (d\vec{S}, \vec{P}_2), \quad (8)$$

в котором для подынтегральной функции введено специальное обозначение:

$$\vec{P}_2 = \frac{1}{4} \frac{\theta(z) \vec{r} z}{\varkappa V} - \frac{1}{4} \frac{\theta(-z) \vec{r} z}{(1 - \varkappa) V}, \quad (9)$$

где $\theta(z)$ - ступенчатая функция.

Требование сохранения объема и расстояния между центрами масс будущих осколков приводит к вариационной задаче на условный экстремум.

3. Общее вариационное уравнение

Следуя Струтинскому и др. [1], дополним задачу определения экстремальных форм поверхности ядра условиями постоянства объема и расстояния между центрами масс будущих осколков, тогда вариационная задача становится задачей на экстремум следующего функционала:

$$I = E_n + E_C + \lambda_1 V + \lambda_2 \rho, \quad (10)$$

где λ_1 и λ_2 — неопределенные лагранжевы множители.

Запишем функционал I в виде поверхностного интеграла

$$I = \oint (d\vec{S}, \vec{F}), \quad (11)$$

где вектор-функция $\vec{F}$ с учетом (2), (3), (4) и (8) имеет следующую структуру:

$$\vec{F} = K_n \vec{F}_n + K_C \vec{F}_C + \lambda_1 \vec{P}_1 + \lambda_2 \vec{P}_2. \quad (12)$$

Элемент поверхности в формуле (11) может быть записан как⁴ [7]:

$$d\vec{S} = dS \vec{n} = (\vec{k} - z_x \vec{i} - z_y \vec{j}) dx dy, \quad (13)$$

где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности;

$$dS = dx dy \sqrt{g} \quad — \quad (14)$$

модуль элемента поверхности;

$$g = 1 + z_x^2 + z_y^2 \quad — \quad (15)$$

метрика, индуцированная на поверхности.

Записывая интеграл (11) с учетом выражения (13), предварительно разбив всю поверхность ядра на части, однозначно проектируемые на плоскость XOY , получаем:

$$I = \sum \iint dx dy G(z, z_x, z_y, x, y), \quad (16)$$

где сумма берется по всем областям интегрирования в плоскости XOY ;

$$G(z, z_x, z_y, x, y) = F_z - z_x F_x - z_y F_y; \quad (17)$$

F_x, F_y, F_z — проекции вектора $\vec{F}$ (12) на соответствующие оси.

Стандартная процедура варьирования [7] функционала (16) приводит к следующему общему виду вариационного уравнения Эйлера-Лагранжа⁵, которое является уравнением в частных производных на функцию $z = z(x, y)$:

$$\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial z_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial G}{\partial z_y} = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) справедливо для каждой из частей, на которые разбита поверхность ядра. Для нахождения функции $z = z(x, y)$, описывающей всю поверхность делящегося ядра, используются (в качестве граничных) условия гладкого сшивания на граничных контурах решений в различных областях поверхности.

⁴Нижний индекс у функции $z = z(x, y)$ или любой другой координаты будет означать ее производную по соответствующей переменной. Например, z_x — производная функции $z = z(x, y)$ по переменной x ; z_{xy} — вторая производная функции $z = z(x, y)$ по переменным x и y .

⁵Интегралы по границам областей возникают при варьировании попарно, но с противоположными знаками. Поэтому их суммарный вклад в вариацию функционала (16) равен нулю.

4. Симметричное деление ядра в МЖК с резким краем

Рассмотрим модель жидкой капли с резким краем. В этом случае подынтегральная вектор-функция для ядерной энергии (2) имеет вид:

$$\vec{F}_n(\vec{r}) = \vec{n}, \quad (19)$$

а ядерная часть энергии вычисляется по формуле:

$$E_n = K_n \oint \left(d\vec{S}, \vec{n} \right) = K_n \oint dS = K_n \oint dx dy \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} \quad (20)$$

и оказывается пропорциональной площади поверхности ядра (см., например, [1]).

Подставим кулоновский функционал в форме

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = \oint d\vec{S}' \sigma, \quad (21)$$

полученной в работе [6], в (3), тогда кулоновская энергия вычисляется по формуле:

$$E_C = K_C \oint \oint \left(d\vec{S}, d\vec{S}' \right) \sigma, \quad (22)$$

где

$$\sigma = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (23)$$

расстояние между элементами поверхностей $d\vec{S}$ и $d\vec{S}'$, задаваемыми радиусами-векторами $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ соответственно.

Рассмотрим симметричное деление, т.е. деление на два осколка равной массы $M_{left} = M_{right} = 0,5M$ и одинакового объема $V_{left} = V_{right} = 0,5V$ ($\varkappa = 0,5$). В этом случае, введя модуль $|z|$, можно объединить интегралы в числителе правой части выражения (7), которое станет более компактным:

$$\rho = \left[\frac{\int_{V_{right}} z \rho_m dV - \int_{V_{left}} z \rho_m dV}{0,5M} \right] = \left[\frac{\int |z| \rho_m dV}{0,5M} \right] = \left[\frac{\int |z| dV}{0,5V} \right]. \quad (24)$$

Используя теорему Гаусса, преобразуем правую часть равенства (24) к поверхностному интегралу:

$$\rho = \frac{1}{2} \oint (d\vec{S}, \vec{r}) \frac{|z|}{V} = \oint (d\vec{S}, \vec{P}_2), \quad (25)$$

в котором для подынтегральной функции введено специальное обозначение:

$$\vec{P}_2 = \frac{1}{2} \frac{\vec{r} |z|}{V}. \quad (26)$$

Подставив выражения (20), (22) с учетом формулы (23) в общее вариационное уравнение (18), получим уравнение Эйлера-Лагранжа в виде:

$$K_n \left\{ \frac{z_{xx} + z_{yy} + z_{xx}z_yz_y + z_{yy}z_xz_x - 2z_{xy}z_xz_y}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} \right\} + K_C \oint dx'dy' \left\{ \frac{-(z - z') + z'_{x'}(x - x') + z'_{y'}(y - y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right\} + \lambda_1 + \lambda_2|z| = 0. \quad (27)$$

Заметим, что в отсутствие кулоновского взаимодействия ($K_C = 0$) и дополнительных условий ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$) уравнение (27) сводится к известному вариационному уравнению минимальных поверхностей [7]. Такой результат является естественным, т.к. энергия поверхностного натяжения стремится уменьшить площадь поверхности.

5. Аксиально-симметричное ядро

Покажем, что уравнение, полученное в работах [1, 2] для аксиально-симметричной формы ядра, является частным случаем уравнения (27).

Предварительно (вследствие цилиндрической симметрии задачи) удобно перейти к полярным координатам (ρ, ϕ, z) ⁶ и задавать поверхность ядра функцией:

$$z = z(\sqrt{x^2 + y^2}) = z(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус.

Используемые для вычислений производные в полярной системе координат имеют вид:

$$z_x = z_\rho \cos \phi; \quad z_y = z_\rho \sin \phi; \quad z_{xx} = z_{\rho\rho} \cos^2 \phi + z_\rho \sin^2 \phi / \rho; \quad (28)$$

$$z_{yy} = z_{\rho\rho} \sin^2 \phi + z_\rho \cos^2 \phi / \rho; \quad z_{xy} = (z_{\rho\rho} - z_\rho / \rho) \cos \phi \sin \phi. \quad (29)$$

Подставив производные (28), (29) в первое слагаемое правой части формулы (27), после упрощения получим:

$$\frac{z_{xx} + z_{yy} + z_{xx}z_yz_y + z_{yy}z_xz_x - 2z_{xy}z_xz_y}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} = \frac{z_{\rho\rho} + z_\rho / \rho + z_\rho^3 / \rho}{(1 + z_\rho^2)^{3/2}}.$$

Запишем второе слагаемое в уравнении (27) в полярной системе координат, тогда

$$\oint dx'dy' \left\{ \frac{-(z - z') + z'_{x'}(x - x') + z'_{y'}(y - y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right\}$$

⁶ Декартовы (x, y, z) и полярные координаты связаны стандартными формулами: $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$.

$$= \oint \rho' d\rho' d\phi' \left\{ \frac{-(z - z') + z'_{\rho'}(\rho \cos(\phi - \phi') - \rho')}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2)^{1/2}} \right\} = \Phi(z, \rho),$$

где $z = z(\rho)$; $z' = z'(\rho')$; обозначение $\Phi(z, \rho)$ введено для удобства.

Теперь вариационное уравнение на профильную функцию ядра выглядит следующим образом:

$$K_n \frac{(z_{\rho\rho} + z_{\rho}/\rho + z_{\rho}^3/\rho)}{(1 + z_{\rho}^2)^{3/2}} + K_C \Phi(z, \rho) + \lambda_1 + \lambda_2 |z| = 0. \quad (30)$$

Это интегро-дифференциальное уравнение на профильную функцию $z = z(\rho)$.

Так как используется аксиальная симметрия задачи (осью симметрии является ОЗ), удобнее искать зависимость $\rho = \rho(z)$, а не $z = z(\rho)$. Для этого в уравнении (30) заменим производные функции $z = z(\rho)$ производными функции $\rho = \rho(z)$:

$$z_{\rho} = \frac{1}{\rho_z}; \quad z_{\rho\rho} = -\frac{\rho_{zz}}{\rho_z^3}. \quad (31)$$

Подставляя в равенство (30) выражения (31) и упрощая получившееся соотношение, приходим к уравнению:

$$-\rho_{zz}\rho + 1 + \rho_z^2 + \frac{\rho}{K_n}(1 + \rho_z^2)^{3/2}(K_C \Phi(z, \rho) + \lambda_1 + \lambda_2 |z|) = 0. \quad (32)$$

Отличие уравнения (32) от найденных в работах [1]–[3] состоит только в обозначениях и виде функции $\Phi(z, \rho)$, выражающей кулоновский потенциал на поверхности.

Если кулоновскую энергию записать в форме:

$$E_C = K_C \oint \oint (d\vec{S}, d\vec{S}') \sigma, \quad (33)$$

использованной в этих работах, то вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа (32) будет с точностью до обозначений совпадать с вариационными уравнениями, полученными в [1–3].

Это соответствие доказывает правильность предложенного в настоящей работе общего подхода к получению многомерных уравнений Эйлера-Лагранжа на основе стандартной многомерной вариационной задачи, позволяющего рассчитывать форму и потенциальную энергию произвольно деформированного ядра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Струтинский В.М., Лященко Н.Я., Попов. Н.А. Симметричные фигуры равновесия в модели ядра с резкой поверхностью (капельная модель) // ЖЭТФ. М. 1962. Т. 43. С. 584–594.

-
2. Stutinsky V.M., Lyashchenko N.Ya., Popov N.A. Symmetrical shapes of equilibrium for a liquid drop model // Nucl. Phys. 1963. V. 46. P. 639–659.
 3. Иванюк Ф.А. Определение равновесных форм ядер в модели жидкой капли с ограничениями. Препринт КИЯИ-86-44. Киев: ИЯИ АН УССР, 1986. 38 с.
 4. Курманов Р.С., Косенко Г.И. Новый метод расчета потенциальной энергии деформированных ядер в модели жидкой капли // ЯФ. 2004. Т. 67, N. 11. С. 1–7.
 5. Sierk A.J. Macroscopic model of rotation nuclei / Phys.Rev. 1986. N. 33. P. 2039–2053.
 6. Курманов Р.С., Косенко Г.И., Адеев Г.Д. Новая формула для вычисления кулоновской энергии в модели жидкой капли // ЯФ. 2000. Т. 63. N. 11. С. 1978–1981.
 7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М. Наука. 1986. 761 с.

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ТЕОРИИ БОРЬБЫ ЗА НАУЧНЫЙ АВТОРИТЕТ

Н.А. Букаринова, А.К. Гуц

В статье представлена попытка формализации (операционализации) теории и начальный этап создания измерительного инструмента признака «борьба за научный авторитет». Наиболее сильное влияние на формирование теоретической модели оказали работы Пьера Бурдьё и Рэндалла Коллинза. Дается иллюстрация «борьбы за научный авторитет» в рамках теории катастроф.

В статье представлена попытка формализации (операционализации) теории и начальный этап создания измерительного инструмента признака «борьба за научный авторитет». Наиболее сильное влияние на формирование теоретической модели оказали работы Пьера Бурдьё [1] и Рэндалла Коллинза [2].

Демонстрируемый инструмент предназначен для начального этапа исследования. Предметом начального этапа конструирования научной реальности являются объективированные характеристики объектов, другими словами – определение позиций ученых в структуре поля. Представления каждого ученого о научном пространстве зависят от его позиции в этом пространстве. А эти представления, в свою очередь, варьируются в зависимости от габитуса, «выступающего в качестве систематизированных моделей восприятия и оценки, а также когнитивных и оценочных структур, являющихся результатом длительного опыта субъекта и обусловленных определенной социальной позицией» [3]. Описав структуру распределения свойств поля через определение доминирующих и подчиняющихся позиций, можно прогнозировать возможное поведение агентов поля науки. Последующие этапы подразумевают исследование восприятия научного мира, мировоззренческих установок, стратегий поведения ученых, другими словами – габитуса и практик ученых.

Для всех символических полей характерна конкурентная борьба. В поле науки, как специфического места социального пространства, осуществляется борьба за научный авторитет. Научный авторитет не тождественен научному бюрократическому механизму. Научный авторитет – техническая способность и социальная власть полномочно и авторитетно говорить и действовать от имени науки. Еще раз определим: поле науки – система объективных отношений

между достигнутыми позициями ученых. Система отношений в поле – это конкурентная борьба, где ставка – монополия на научный авторитет, научную компетентность.

1. Переменные и индикаторы

Для поддержания института науки необходимо, чтобы научные сотрудники своей деятельностью воспроизводили установленные стандарты и нормы, носящие основные и функциональные значения. Основными задачами для индивидов, включающихся в поле науки, являются различение и принятие действующих в нём норм. Первостепенной функцией научного деятеля является генерализация нового знания. Включенность в борьбу за научный авторитет ученого может выражать реализацию этой функции. Через следующие взаимосвязанные переменные и индикаторы определяем позицию в поле и далее измеряем борьбу за научный авторитет.

1.1. Переменная u – научный капитал

Благодаря тому что учёным доступна работа с наследиями прошлого, а также возможности передачи культурного капитала, идей и смысла дальнейших операций с ним, они могут совершать свои прорывы, изменяющие ход течения всей науки. В связи с этим определяем наиболее важные процессы: накопление знаний и признание интеллектуального труда ученого.

Индикаторы:

- наличие ученого звания;
- наличие дипломов, наград;
- чтение книг и журналов на родном языке;
- чтение книг и журналов на иностранном языке;
- передача знаний от ученого к его ученикам;
- оценка работы ученого другими учеными.

В последнем индикаторе учитывается дистанцированная ценность работы, а именно коллективное признание ее оригинальности и актуальности. При градировании выраженности признака «чтение книг и журналов» необходимо установить норму времени или объема (количества книг), отведенного на прочтение изданий, а дальше относительно ее – часто/редкого или много/мало. Сложность возникает при интерпретации изданий (их иерархия), а также при определении, чтение каких книг приоритетнее (на родном языке или иностранном), что адекватнее тексту-оригиналу: собственный перевод или официально вышедший перевод.

1.2. Переменная v – коммуникация

Современный учёный творит в условиях, которые обязывают его быть активно включённым в систему научных коммуникаций, непосредственно участвовать в процессе производства и потребления исследовательской информации. Публикация приравнивается к претензии на присвоение звания первооткрывателя,

в связи с этим, возрастает значение скорости публикации: чем быстрее, тем лучше.

Индикаторы:

- включенность в мировое научное сообщество;
- включенность в российскую науку;
- включенность в научную школу и/или локализованные содружества (на месте работы);
- трансляция работы – публикации в России;
- трансляция работы – публикация за рубежом.

Переменная коммуникация потребует тщательного определения степени включенности на уровнях науки и выстраивания иерархии подуровней. Необходимы исследования на предмет значимости печатных изданий (привычного – рецензированные и нерецензированные, на наш взгляд, недостаточно), надо найти скрытые (характерные только для данного сообщества ученых) определения издательств.

1.3. Переменная x – структура поля (позиция)

Структура научного поля определяется соотношением сил его участников, позициями, которые они занимают. Учёный, не включённый либо слабо интегрированный в научное поле, не может себя адекватно оценить или рассчитывать на широкое и значимое признание. Определенная позиция поля науки сообщает ученому ограниченный набор знаний относительно его способностей и возможностей (допустимых технических средств), а также диктует допустимую стратегию поведения. **Основная задача на начальном этапе стоит в определении круга конкурентов.**

Индикаторы:

Учёные стремятся рассматривать в качестве возможных потребителей их продукции (открытий) одних лишь своих конкурентов. Это означает, что в поле с высокой степенью автономии отдельный производитель может достичь признания ценности своей продукции лишь через других производителей, которые, будучи одновременно конкурентами, менее всего расположены признавать заслуги коллеги без дискуссий и испытаний. Для анализа необходима иерархия издательств, транслирующих работы ученых научному сообществу.

Определение круга конкурентов во взаимосвязи интеграции и распознавания научного поля:

- случайные (псевдоученые, временные);
- ограничение круга профессионалов, выделение авторитетов;
- конкуренты – соучастники.

Является одним из самых затруднительных индикаторов. Связано это, может быть, во-первых, с необходимостью экспертных оценок (подчеркнем, субъективных оценок), а во-вторых, выбор исследовательской группы ученым может быть случайным или сделанным по необходимости; неработа с определенными учеными может быть вызвана межличностным неприятием, или, на-

оборот, на основе взаимных симпатий формируется группа; вобщем, это скорее индивидуальный путь, который вряд ли поддается строгому определению причинно-следственных связей.

Полагаем, что все перечисленные выше затруднения носят региональный (локализованный) характер, для их разрешения необходимо провести ряд интервью или дискуссионных фокус-групп, которые помогут узнать контекст, необходимый для адекватного понимания. Работа над темой исследования продолжается как в направлении по разрешению проблемных моментов градирования показателей, так и в направлении, необходимом для всестороннего изучения борьбы за научный авторитет – по замеру габитуса ученых и их практик.

2. Взгляд на борьбу за научный авторитет с точки зрения теории катастроф

Для того чтобы понять, насколько предложенная формализация теории борьбы за научный авторитет может быть использована для качественного предсказания хода динамики позиции (авторитета) ученого в поле науки, воспользуемся теорией катастроф [4,5]. Для этого переменным x, u, v , введенным выше, дадим дополнительные сугубо математические характеристики.

Переменную x будем считать основной, внешней, описывающей число конкурентов ученого, количество его научных оппонентов, критиков. Соответственно, $-x$ измеряет авторитет ученого в поле науки; его росту сопутствует исчезновение конкурентов, научных оппонентов и критиков.

Переменные u, v – внутренние, управляющие:

u – научный капитал ученого;

v – его коммуникации, степень включенности в научное сообщество.

Теория катастроф говорит, что динамика социальной системы с одной внешней переменной и двумя внутренними в *типичной ситуации* должна описываться дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{u}{2}x^2 - vx \right). \quad (1)$$

Иначе говоря, эволюция позиции ученого в поле науки характеризуется социальным полем $V(x, u, v) = x^4/4 - ux^2/2 - vx$, допускающим катастрофу сборки (рис. 1).

Если двигаться в пространстве управляющих параметров u, v вдоль контура L в указанном на рис. 1 направлении, то можно увидеть, что при мало меняющемся научном капитале u (знания никуда не денешь) и на фоне *роста коммуникаций* возможен скачкообразный рост авторитета ученого за счет резкого уменьшения числа его конкурентов (оппонентов, критиков). Прогноз вполне ожидаемый и отражает ситуацию в науке.

Напротив, если двигаться в пространстве управляющих параметров u, v вдоль контура L в обратном указанному на рис. 1 направлении, то при малом росте u и на фоне ослабления коммуникаций ученого возможен скачкообразный спад его позиций в науке, его научного авторитета за счет резкого роста

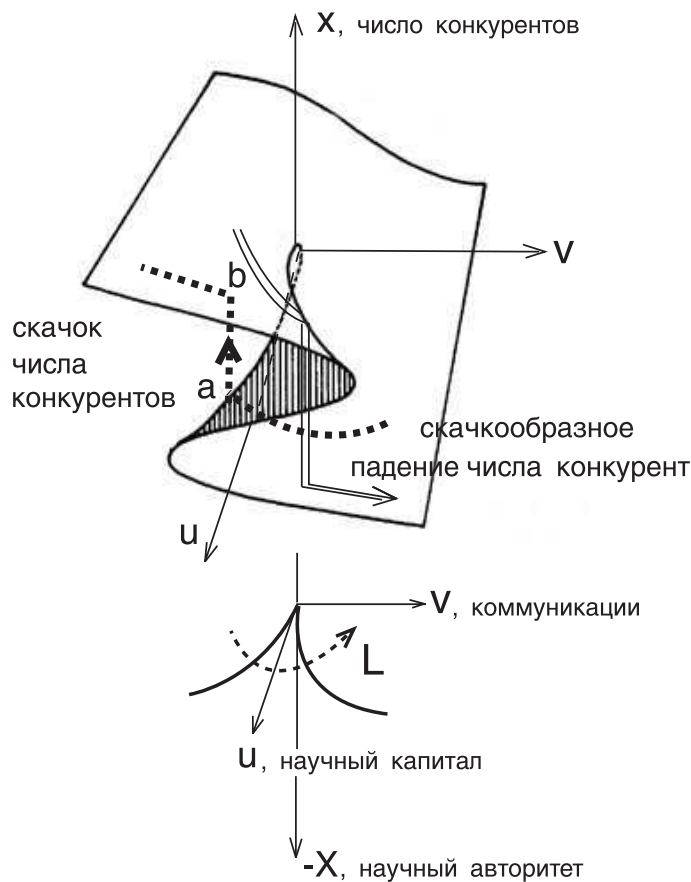


Рис. 1. Катастрофа борьбы за научный авторитет

числа его конкурентов (оппонентов, критиков). Опять-таки ситуация весьма распространенная.

Уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = (u - x^2)x + v. \quad (2)$$

Это так называемое логистическое уравнение. Оно позволяет кое-что сказать о «борьбе за научный авторитет». Член ux говорит о возможности роста авторитета в геометрической прогрессии, но член $(-x^2)$ – это лимитирующее ограничение скорости роста авторитета ученого со стороны окружающей его научной среды и возникающее за счет конкуренции ученых в поле науки. Член $+v$ говорит о значимости коммуникаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурдые П. Поле науки // Социология под вопросом. М.: Параксис; Институт экспериментальной социологии, 2005.
2. Рэндалл Коллинз. Социология философий: глобальная теория интеллектуального изменения. Новосибирск: Сибирский хронограф, 2002.

3. Pierre Bourdieu. Espace social et pouvoir symbolique. In: P. Bourdieu. Choses dites. Paris: Editions de Minuit, 1987. с Editions de Minuit, 1987.
4. Гуц А.К., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математическая социология: Учебное пособие. Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2003. 192 с.
5. Гуц А.К., Фролова Ю.В. Математические методы в социологии. М.: Издательство ЛКИ, 2007.

МУЛЬТИАГЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РАБОТНИКОВ НА РЫНКЕ ТРУДА ГОРОДА ОМСКА

Е.В. Ренжина

С помощью компьютерного моделирования была создана мультиагентная модель, позволяющая моделировать поведение работников на рынке труда. Данная модель предоставляет возможность проследить передвижение агентов – людей на «виртуальном» рынке труда.

В ходе исторического развития России в современном обществе возникает необходимость формального описания экономического поведения людей.

Одной из стадий формирования рыночных отношений, начавшихся в конце 80 – начале 90 гг., является появление понятия рынка труда. По мнению И.С. Масловой [1], «рынок труда» – органическая сфера рыночной экономики, выполняющая функцию опосредования через куплю-продажу рабочей силы соединения вещественных и человеческих факторов производства, поддерживая их сбалансированность в условиях многообразия форм собственности на средства производства и преимущественного права граждан на распоряжение своей рабочей силой и способностями».

В работе [1] была выдвинута гипотеза о том, что люди с экономической точки зрения имеют определенные стратегии поведения на рынке труда, что можно описать с помощью математических правил. Основополагающей теорией было принято исследование ученых-экономистов О.С. Елкиной и В.С. Половинко, проведенное в течение 1999–2005 гг.

Каждый индивид имеет свою стратегию экономического поведения на рынке труда, складывающуюся из затраченных в определенном количестве трудовых ресурсов для получения определенного дохода, то есть разнообразие стратегий экономического поведения людей складывается из трех факторов:

1. Величина трудовых ресурсов.
2. Величина труда.
3. Область труда, в которой соединяются труд и доход в необходимой пропорции [1].

Опираясь на эти утверждения, авторы предлагают разделить весь рынок труда (в данном случае только Омской области) на девять областей, каждая из которых соответствует своему уровню затрачиваемого индивидом труда и получаемого им дохода. В процессе работы мы выяснили, что наибольшая точность описания рынка труда достигается с помощью следующего решения диффузионного уравнения:

$$S(D, T, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j} e^{-a^2(k^2+j^2)t} \sin kD \sin jT. \quad (1)$$

Но математическая модель позволяет описать лишь общее состояние системы. Поэтому целью данной работы стало мультиагентное моделирование экономической ситуации на рынке труда. Заметим, что процесс моделирования такой ситуации невозможен в реальной жизни, так как наше общество гуманно и, как известно, эксперименты над реальными людьми запрещены законом. Как же действовать в такой ситуации? На помощь ученым-экономистам приходит наука информатика, а именно ее подраздел – компьютерное моделирование. Суть компьютерного моделирования, то есть компьютерного эксперимента, заключается в том, что он позволяет проводить исследования поведения работников на рынке труда, но не над группой реальных людей. Объектом исследования становится «виртуальное» общество, состоящее из агентов – компьютерных моделей реальных людей.

Для проведения компьютерного исследования был выбран язык Objective-C в среде мультиагентного моделирования SWARM, разработанной в Santa Fe Institute [3].

С помощью вышеуказанных инструментов компьютерного моделирования была построена экономическая модель поведения работников на рынке труда в период с 1999 г. по 2005 г.

Окружающая среда является ядром моделирования. Среда – «виртуальное» общество, в котором живут «люди». Среда диктует определенные условия для проживания «людям». Поведение «людей» зависит от места их расположения в среде. «Человек» имеет возможность свободно передвигаться и ориентироваться в окружающей среде.

Перечислим правила поведения жизни агентов в окружающей среде:

1. Агенты могут передвигаться случайным образом.
2. Агенты движутся в сторону комфортного для них места обитания, то есть выбирают соотношение количества трудовых затрат и уровня заработной платы, приемлемого для них.
3. Полагаем, что наше общество является гуманным, поэтому агенты, живущие в окружающей среде, соблюдают диктуемое средой минимальное расстояние между ними, или жизненное пространство индивида, которое обратно пропорционально уровню комфорта в области, где находятся агенты.

Далее опишем правила поведения агентов с точки зрения объектно-ориентированного программирования. При проведении эксперимента было выбрано число K – количество агентов.

Состояние i -того агента ($i \in (1...K)$) описывается тремя параметрами S_i, D_i, T_i , где S_i является функцией и определяется как

$$S_i = f(t, D_i, T_i), \quad (2)$$

где t – время, а $S_i \in (0; 100)$, $D_i \in (0; \frac{\pi}{2})$, $T_i \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Движение агента по случайному закону тождественно изменению его параметров и на случайную величину:

$$D_i = D_i + \delta D, T_i = T_i + \delta T. \quad (3)$$

Как следствие, изменяется и третий параметр, то есть

$$S_i = f(t + \delta t, D + \delta D, T + \delta T). \quad (4)$$

Движение агента по закону поиска комфортного местоположения эквивалентно приращению уровня стратегии индивида, то есть

$$S_i = S_i + \delta S_{max}(t, D_i, T_i), \quad (5)$$

где $\delta S_{max}(t, D_i, T_i)$ – максимальное приращение стратегии, которое может получить агент, переместившись в окрестности точки (D_i, T_i) в момент времени t . Соответственно, изменяются и параметры D_i, T_i индивида.

Заключительное правило движения агента является запрещающим: если существует два агента, первый из которых планирует приобретение определенных параметров (S_1, D_1, T_1) , а второй уже обладает параметрами (S_2, T_2, D_2) , то должно выполняться соотношение $(|D_1 - D_2| > P(S_1)) \cap (|T_1 - T_2| > P(S_1))$, где $P(S)$ – минимальное расстояние, на которое агент может приблизиться к другому агенту, пропорциональное уровню комфорта.

Невыполнение этого соотношения является причиной для попытки выбора первым агентом другого направления движения. И он начинает движение снова по вышеуказанному алгоритму.

Рисунки 1 и 2 демонстрируют нам некоторые результаты моделирования.

С помощью компьютерного моделирования была создана мультиагентная модель, позволяющая моделировать поведение работников на рынке труда. Данная модель предоставляет возможность проследить передвижение агентов – людей на «виртуальном» рынке труда, а также выявить факторы, оказывающие значительное влияние на формирование модели поведения работников на рынке труда. Выявленные факторы позволяют моделировать возможные ситуации, которые могут сложиться на экономическом рынке труда, что облегчает труд экономистов при разработке стратегии управления рынком труда, так как становится возможным проведение серии экспериментов, но не с живыми людьми, а их «виртуальными» прототипами.

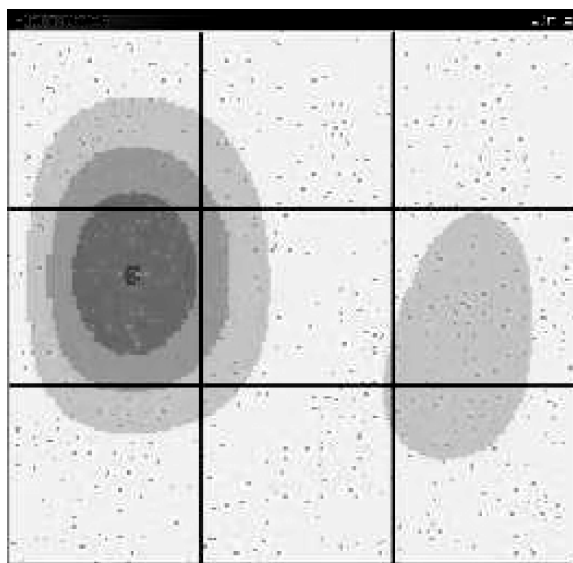


Рис. 1. Компьютерная модель распределения работников на экономическом рынке труда 1999 г.

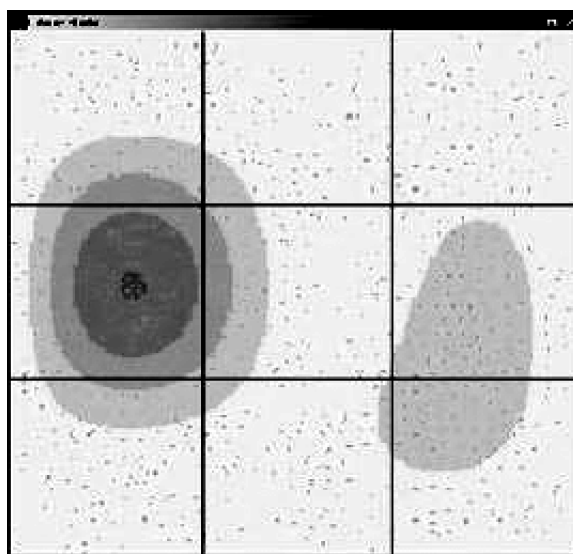


Рис. 2. Компьютерная модель распределения работников на экономическом рынке труда 2005 г.

Следовательно, ученые-экономисты могут не только создавать теории управления рынком труда, но внедрять их в «виртуальное» общество и изучать результаты. Таким образом, мультиагентное моделирование предоставляет новые возможности не только для изучения процессов, влияющих на формирование экономического рынка труда, но и для создания новых экономических теорий управления данным рынком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ёлкина О.С., Гуревич Е.В., Гуц А.К. Математическое моделирование стратегий экономического поведения людей на рынке труда // Математические структуры и моделирование. 2005. Вып. 15. С. 107–111.
2. Ёлкина О.С., Половинко В.С. Экономическое поведение работников на рынке труда. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. 278 с.
3. Официальный сайт The Swarm Development Group. – <http://www.swarm.org/index.html>

ШИФРОВАНИЕ СООБЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРОВ

С.В. Белим, С.Ю. Белим

Предложена схема шифрования, основанная на кодировании с использованием собственных функций эрмитовых операторов. Проведено исследование полученного шифра для некоторых простых операторов.

1. Схема шифрования

Будем считать, что существует взаимно однозначное отображение используемого алфавита A на конечное множество целых чисел $Kod : A \rightarrow 1, \dots, N$, где N – мощность используемого алфавита $|A| = N$. Рассмотрим линейный оператор K на множестве действительных бесконечно дифференцируемых функций одной переменной, обладающий следующими свойствами:

- (i1) оператор K обладает дискретным спектром собственных значений.
- (i2) все собственные значения невырождены, то есть каждой собственной функции соответствует свое собственное значение.

Введем на множестве рассматриваемых функций скалярное произведение

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi \Phi dx,$$

тогда третье условие на оператор имеет вид:

- (i3) оператор K эрмитов, и, как следствие, множество собственных функций ортонормированно

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \delta_{nm},$$

где δ_{nm} – символ Кронекера:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m, \\ 0, n \neq m. \end{cases}$$

Рассматривая оператор K в качестве ключа, введем следующую схему симметричного шифрования:

1. Вычислим собственные функции оператора $K\Psi_n = k_n\Psi_n$.

2. Сопоставим каждому символу t_i , входящему в открытый текст T , собственную функцию Ψ_s , где $s = Kod(t_i)$. Если символ t_i повторяется, то его m -ому вхождению сопоставляется собственная функция с номером

$$k = Kod(t) + (m - 1)N.$$

3. Построим «функцию сообщения»

$$\Psi = \sum_{t_i \in T} c_k \Psi_k \mid_{k=Kod(t_i)}.$$

Здесь $c_i = i / \sum_{i=1}^{nt} i^2$, nt – количество символов в сообщении.

4. По каналу связи передается «функция сообщения» Ψ . Таким образом, все символы передаются одновременно.

Алгоритм расшифрования состоит из следующих шагов:

1. Последовательное вычисление собственных функций Ψ_s .
2. Для каждой собственной функции вычисление скалярного произведения

$$\langle \Psi, \Psi_s \rangle = \begin{cases} c_s, & t_i \in T, \\ 0, & t_i \notin T. \end{cases}$$

3. Восстановление символов сообщения $t_i = Kod^{-1}(s)$.
4. Упорядочивание символов по возрастанию c_s .

2. Экспериментальное исследование шифра

В качестве примера, для экспериментальной проверки шифра, возьмем ключевой оператор в виде:

$$K = -\frac{d^2}{dx^2} + U(x).$$

Функцию $U(x)$ определим следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x \leq 0, \quad x \geq a. \end{cases}$$

Общую структуру оператора будем считать известной, в качестве ключа шифрования будет выступать параметр a .

Собственные функции оператора K могут быть легко найдены путем решения дифференциального уравнения на трех отрезках числовой прямой и последующей сшивки решений:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right).$$

Отображение Kod зададим таблицей

1	а	б	в	г	д	е	ж	з	и	к
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
л	м	н	о	п	р	с	т	у	ф	х
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
ц	ч	ш	щ	ъ,ь	ы	э	ю	я		
23	24	25	26	27	28	29	30	31		

Соответственно $|A| = 31$. Зашифруем сообщение $M = \text{«мама мыла раму»}$, ключом шифрования $a = 1$. Функция сообщения в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned} \Psi(M) = & 0.1\Psi_{13} + 0.2\Psi_2 + 0.3\Psi_{44} + 0.4\Psi_{33} + 0.5\Psi_1 + 0.6\Psi_{75} + 0.7\Psi_{28} \quad (1) \\ & + 0.8\Psi_{12} + 0.9\Psi_{63} + 1.0\Psi_{32} + 1.1\Psi_{17} + 1.2\Psi_{95} + 1.3\Psi_{106} + 1.4\Psi_{20}. \end{aligned}$$

Для проверки устойчивости шифра к взлому прямым перебором рассмотрим процесс расшифрования с ключом $a = 1.01$. Отбирая целые значения скалярного произведения с точностью до 0.1, получим фразу «бьяюммнамфэса ньялрбну». Как легко видеть, изменились не только сами символы, но и количество символов.

3. Заключение

Рассмотренный пример в полной мере демонстрирует возможности представленного алгоритма шифрования. Однако предложенный ключевой оператор K не является достаточно стойким. Например, расшифрование с ключом $a = 1.001$ позволяет прочесть зашифрованное сообщение. Поэтому необходимы дальнейшие исследования в направлении доказательства существования «хороших» ключевых операторов и поиск их вида.

ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ

С.В. Белим, С.Ю. Белим

Рассмотрена объектно-ориентированная модель функционирования компьютерной системы. Для построенной модели определена дискреционная политика безопасности.

Введение

Традиционно описание системы безопасности компьютерных систем строится на основе субъектно - объектного подхода. В рамках данного подхода компьютерная система представлена в виде композиции пассивных сущностей, называемых объектами, и активных сущностей, называемых субъектами. Анализ безопасности проводится исходя из рассмотрения доступов субъектов к объектам на основе постулата, сформулированного в «Оранжевой книге» [1]. При этом доказательство безопасности компьютерной системы основывается на соответствии доступов некоторому набору ограничений, называемому политикой безопасности. Следует оговориться, что термин «политика безопасности» в общем случае носит более широкий характер и кроме программных ограничений на доступ включает в себя меры технического и организационного характера по защите информации. Однако при моделировании компьютерной системы рассмотрение политики безопасности можно свести к набору условий на доступ без обсуждения способа их достижения. В дальнейшем на основе рассмотрения доступов в системе строятся модели политик безопасности, позволяющие проводить анализ возможных каналов утечки информации.

В последнее время, в связи с широким распространением объектно-ориентированного подхода в построении программного обеспечения компьютерных систем, возникают трудности в разделении частей компьютерной системы на активные и пассивные. Складывается двойственная ситуация, когда один и тот же набор данных в одном случае интерпретируется как объект (пассивный), в другом случае как субъект (активный). В качестве примера можно привести объект «процесс» в операционной системе Windows. Более того, все объекты современных операционных систем построены на основе объектно-ориентированного подхода и, кроме полей данных, содержат методы их обработки. В связи с этим, для более адекватного описания компьютерных систем,

необходимо применение объектно-ориентированного подхода и соответствующая модификация моделей политик безопасности.

1. Объектно-ориентированная модель компьютерной системы

Будем рассматривать компьютерную систему в виде множества объектов $\mathbf{O}$, имеющих открытые поля и скрытые поля, а также методы обработки полей.

Определение 1. Полем будем называть некоторую область памяти фиксированной длины, которая может содержать произвольные данные и изменяться в процессе функционирования системы.

Определение 2. Методом будем называть некоторое отображение, использующее в качестве аргументов поля и не изменяющееся в процессе функционирования компьютерной системы.

Метод может находиться в двух состояниях – активном и неактивном. В начале функционирования системы будем считать, что все методы кроме одного, обычно называемого инициализирующим систему, находятся в неактивном состоянии. Переход в активное состояние происходит через процесс активизации.

Определение 3. Активизацией метода будем называть выделение ему необходимых ресурсов и определение условия передачи ему управления центральным процессорным устройством.

Определенная таким образом система практически совпадает с объектно-субъектным подходом, если установить соответствие между понятиями поле – объект, метод – субъект. Для построения объектно-ориентированной модели необходимо однозначно связать поля и методы.

Определение 4. Классом объектов будем называть произвольный список полей и методов, каждому из которых присвоено одно значение из множества $\{private, public\}$. Поля и методы, которым присвоено значение *private*, называются скрытыми. Поля и методы, которым присвоено значение *public*, называются открытыми.

Определение 5. Совокупность полей и методов, построенных по списку, задаваемому классом, называется объектом класса. Объект класса, для которого несущественна в данной задаче принадлежность к конкретному классу, будем называть объектом.

Как уже было сказано выше, множество всех объектов будем обозначать через $\mathbf{O}$. Для каждого объекта $O_i \in \mathbf{O}$ определим множества закрытых полей $O_i.P$, множество открытых полей $O_i.F$ и множество методов $O_i.S$.

Определение 6. Доступом метода s к полю f будем называть активизацию метода s таким образом, что метод s является аргументом соответствующего отображения.

Доступ к скрытым полям объекта имеют только методы этого объекта. Кроме того, методы могут обращаться к открытым полям других объектов.

Определение 7. Возможность доступа к скрытым полям объекта только методами этого же объекта будем называть инкапсуляцией.

Как и в любой другой модели, для построения объектно-ориентированной модели будем использовать ряд предположений, которые не могут быть доказаны в рамках рассматриваемой модели, а обеспечиваются более низкоуровневыми сервисами на этапе построения и поддержки функционирования модели.

Предположение 1. Инкапсуляция реализована корректно, то есть доступ к полям объекта возможен только через вызов методов этого же объекта.

Предположение 2. Активизация метода объекта может быть осуществлена только в процессе доступа к этому методу активного метода этого же либо другого объекта.

Определение 8. Активацию метода объекта методом этого же объекта будем называть автоактивацией.

Определение 9. Два объекта будем считать тождественными, если значения их полей и методов совпадают, как слова, записанные в одном алфавите.

Определение 10. Будем говорить, что объект O_1 осуществляет доступ к объекту O_2 ($O_1 \mapsto O_2$), если существует активный метод $O_1.s_i$, который осуществляет доступ к одному из открытых полей $O_2.f_j$ (прямой доступ к полям объекта), либо активизирует один из методов объекта $O_2.s_k$ (косвенный доступ к полям объекта).

Определение 11. Объект O_1 называется корректным относительно объекта O_2 , если O_1 осуществляет только косвенный доступ к полям объекта O_1 .

Определение 12. Объекты будем считать взаимно корректными, если они осуществляют только косвенный доступ к полям друг друга.

Определение 13. Между объектами O_1 и O_2 существует поток информации ($O_1 \leftrightarrow O_2$), если $O_1 \mapsto O_2$ или $O_2 \mapsto O_1$.

Утверждение. Если в компьютерной системе все объекты взаимно корректны, то невозможны несанкционированные потоки информации.

Доказательство. Справедливость утверждения следует из Определения 13 и Предположения 1. ■

Определение 14. Под состоянием объекта будем понимать содержимое его полей и список активных методов.

Определение 15. Под состоянием системы будем понимать состояние всех входящих в нее объектов.

2. Дискреционная политика безопасности

Построим дискреционную политику безопасности для объектно ориентированной модели компьютерной системы по аналогии с субъектно - объектной моделью. В субъектно - объектной модели произвольное разграничение доступа строится на основе отображения:

$$M : \mathbf{S} \times \mathbf{O} \rightarrow 2^R,$$

где $\mathbf{S}$ – множество субъектов системы, $\mathbf{O}$ – множество объектов системы, R – множество видов доступа. Данное отображение принято записывать в виде

таблицы, строки которой соответствуют субъектам системы, а столбцы объектам системы. Таблицу обычно называют «матрицей доступов», и она является общей для всей системы.

В рамках объектно-ориентированной модели у объектов существует два вида полей – *private* и *public*. К скрытым полям (*private*) доступ осуществляется методами самого объекта, поэтому разрешения на доступ к таким полям сводятся к разрешениям активизации соответствующих методов объекта. Для открытых полей (*public*) будем считать верным следующее предположение.

Предположение 3. Открытые поля всех объектов имеют одно и то же множество возможных типов доступа.

Множество доступов к открытым полям обозначим через $\mathbf{A}$.

В силу того что набор методов работы со скрытыми полями у каждого объекта свой, определение общей матрицы доступов для всей компьютерной системы лишено смысла. Для построения системы дискреционного разделения доступа модифицируем все объекты системы, введя для каждого объекта $O_i \in \mathbf{O}$ дополнительное *private* поле M , содержащее локальную матрицу доступов, и методы работы с матрицей доступов.

$$O_i.M : \mathbf{O} \times (O_i.F \cup O_i.S) \rightarrow 2^{\mathbf{A}} \cup \{0, 1\}.$$

Причем

$$O_i.M[O_j, O_i.f] \in 2^{\mathbf{A}}(O_i, O_j \in \mathbf{O}), \text{ if } O_i.f \in O_i.F,$$

то есть для открытых полей в явном виде задается множество разрешенных доступов, и

$$O_i.M[O_j, O_i.s] \in \{0, 1\}(O_i, O_j \in \mathbf{O}), \text{ if } O_i.s \in O_i.S,$$

то есть для методов определяем разрешение (1) или запрет (0) вызова.

В рамках построенного объектно-ориентированного подхода к описанию системы безопасности компьютерных систем возможно определение элементарных операторов, преобразующих матрицу доступов по аналогии с [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зегжда Д.П., Ивашко А.М. Основы безопасности информационных систем. М.: Горячая линия-Телеком, 2000.
2. Harrison M., Ruzzo W., Ullman J. Protection in operating system // Communication of ACM. 1976. V. 19. P. 461–471.

ШИФРЫ ЗАМЕНЫ КАК ПРИМЕРЫ ДИСКРЕТНЫХ АВТОМАТОВ

Н.Ф. Богаченко

В статье обсуждается криптографический подход к изложению основных моделей теории автоматов. Представлены шифры замены, допускающие реализацию в виде комбинационных и последовательных автоматов.

Классическая теория автоматов представляет собой математический аппарат, предназначенный, в первую очередь, для синтеза (построения логических схем) дискретных устройств. Вместе с тем автоматные модели используются и в других областях, в частности в микропрограммировании, при построении трансляторов и т.д.

Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования для специальности 075200 – «Компьютерная безопасность» включает в дисциплину «Дискретная математика» раздел, посвященный теории автоматов. Это обусловлено тем, что теоретико-автоматные модели находят применение и в сфере обеспечения информационной безопасности. В частности, абстрактная модель шифратора может быть представлена в терминах автоматов с памятью [2, 3], понятие детерминированного конечного автомата используется при построении моделей безопасности компьютерных систем [5]. Исходя из вышесказанного, преподавание теории автоматов при подготовке специалистов в области информационной безопасности должно включать в себя не только «инженерную» составляющую, но и «привязку» к классическим моделям криптографии. Данная статья демонстрирует пример такой интеграции.

Еще одна причина привлечения аппарата теории автоматов к построению шифров заключается в том, что большинство современных криптосистем базируется на теоретико-числовых моделях. Представляет интерес исследование других подходов к разработке и анализу алгоритмов шифрования.

1. Дискретные автоматы

Дискретный автомат – это математическая модель дискретного устройства, представленная в терминах входных, выходных и внутренних дискретных переменных. Дискретные автоматы подразделяются на два класса: автоматы без памяти (комбинационные) и автоматы с памятью (последовательные).

Если входные сигналы обозначить $x_1, \dots, x_n$, а выходные – $y_1, \dots, y_m$, то функциональная модель комбинационного автомата представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \\ \vdots \\ y_m = y_m(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1)$$

В отличие от комбинационного, последовательный автомат наделен множеством внутренних состояний. Пусть текущее состояние последовательного автомата определяется значениями переменных $\tau_1, \dots, \tau_k$, тогда его функциональная модель имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n, \tau_1, \dots, \tau_k), \\ \vdots \\ y_m = y_m(x_1, \dots, x_n, \tau_1, \dots, \tau_k), \\ \varphi_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, \tau_1, \dots, \tau_k), \\ \vdots \\ \varphi_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n, \tau_1, \dots, \tau_k). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ – функции возбуждения памяти, отвечающие за смену внутреннего состояния автомата. Последовательный автомат, определенный системой (2), называется автоматом Мили [1, 4].

На рисунке 1 представлены структурные схемы комбинационного и последовательного автоматов.

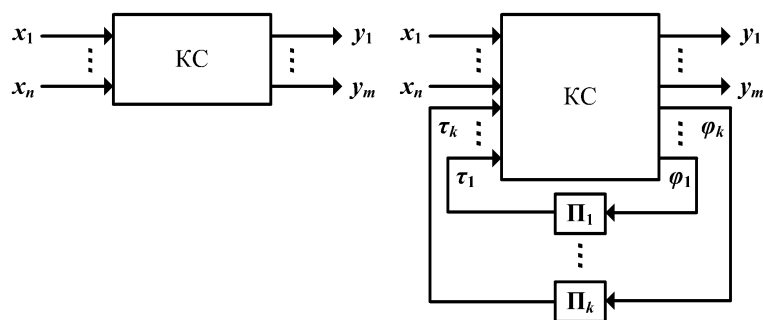


Рис. 1. Структурные схемы комбинационного (слева) и последовательного (справа) автоматов; КС – комбинационная схема (состоит из логических элементов и не имеет контуров); $\Pi_1, \dots, \Pi_k$ – элементы памяти

В рамках поставленной перед нами задачи – установить взаимосвязь между теоретико-автоматными моделями и алгоритмами шифрования – представляется целесообразным в качестве примеров комбинационных и последовательных автоматов рассматривать аппаратную реализацию шифров простой и многозначной замены. В такой постановке задача построения криптосистемы разбивается на две части: синтез шифратора и дешифратора.

2. Блок подстановок как комбинационный автомат

Пусть необходимо продемонстрировать процесс синтеза комбинационного автомата. Представляется возможным в качестве модельной задачи рассмотреть шифр замены, а именно блок подстановок.

Для простоты будем шифровать последовательности из трех бит. Допустим, необходимо реализовать подстановку, заданную таблицей 1. Данную подстанов-

Таблица 1. Шифр замены или таблица выходов комбинационного автомата S_1

Вход	000	001	010	011	100	101	110	111
Выход	010	111	100	110	001	000	101	011

ку можно интерпретировать как таблицу выходов некоторого комбинационного автомата S_1 , функциональная модель которого в этом случае будет иметь следующий вид [4]:

$$\begin{cases} y_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3, \\ y_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3, \\ y_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3. \end{cases} \quad (3)$$

После минимизации система (3) преобразуется в уравнения:

$$\begin{cases} y_1 = \bar{x}_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3, \\ y_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3, \\ y_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee x_1x_2. \end{cases} \quad (4)$$

Наконец, на рисунке 2 представлена логическая схема шифратора S_1 .

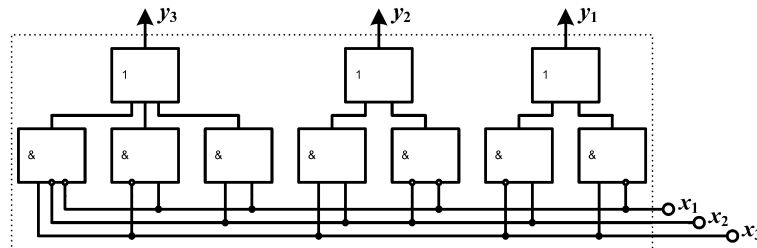


Рис. 2. Логическая схема комбинационного автомата S_1 , реализующего блок подстановок

Синтез обратного автомата – дешифратора – аналогичен. Достаточно в таблице 1 строки «вход» и «выход» поменять местами и повторить приведенные выше расчеты.

3. Шифр многозначной замены как автомат Мили

Перейдем теперь к автоматам с памятью. В качестве примера вновь обратимся к шифру замены. Рассмотренная криптосистема является очень слабой: частотные характеристики открытого сообщения сохраняются и в криптотексте.

Повысить криптостойкость позволяют шифры многозначной замены, в которых каждому символу (кодовой комбинации) открытого алфавита ставится в соответствие не один, а несколько символов шифра.

Преобразуем подстановку из таблицы 1 в шифр многозначной замены (см. табл. 2).

Таблица 2. Шифр многозначной замены или таблица выходов автомата Мили S_2

	Входные сигналы							
	000	001	010	011	100	101	110	111
00	010	111	100	110	001	000	101	011
01	011	010	000	101	110	111	001	100
10	110	100	001	111	010	011	000	101
Состояния	Выходные сигналы							

Главная трудность, которая возникает при использовании шифров многозначной замены, заключается в запоминании ключа. В общем случае требуется построить функцию-распределитель, задающую порядок выбора подстановок.

Можно предложить следующий подход к решению данной проблемы. Будем интерпретировать таблицу 2 как таблицу выходов некоторого последовательного автомата, точнее, автомата Мили, S_2 . В этом случае необходимо определить и таблицу переходов [4]. Так как в нашем примере замена трехвариантная, то автомат должен иметь три состояния: $a_1 = 00$, $a_2 = 01$, $a_3 = 10$. Пусть переходы автомата заданы таблицей 3. Теперь для запуска алгоритма шифрования остается определить начальное состояние, с которого стартует автомат.

Таблица 3. Таблица переходов автомата Мили S_2

	Входные сигналы							
	000	001	010	011	100	101	110	111
00	01	00	10	00	01	01	10	00
01	10	10	00	10	00	01	00	10
10	00	01	01	01	01	00	10	01
Состояния	Состояния перехода							

Функциональная модель автомата S_2 представляется системой булевых функций, зависящих от пяти переменных:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2), \\ y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2), \\ y_3 = y_3(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2), \\ \varphi_1 = \varphi_1(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2), \\ \varphi_2 = \varphi_2(x_1, x_2, x_3, \tau_1, \tau_2). \end{cases} \quad (5)$$

Функции выходов и функции возбуждения памяти строятся стандартным образом согласно каноническому методу структурного синтеза [1, 4]. Если в качестве

элементов памяти выбрать элементы задержки, то после минимизации каноническая система уравнений автомата S_2 примет следующий вид¹:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\tau_1\bar{\tau}_2 \vee \bar{x}_1x_3\bar{\tau}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{\tau}_1\tau_2 \vee x_2\bar{x}_3\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 \vee x_2x_3\bar{\tau}_1\tau_2 \vee x_2x_3\tau_1\bar{\tau}_2, \\ y_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{\tau}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{\tau}_1 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{\tau}_2 \vee \bar{x}_2\bar{\tau}_1\tau_2 \vee x_1\bar{x}_2\tau_1\bar{\tau}_2 \vee x_2x_3\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2, \\ y_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{\tau}_1\tau_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3\bar{\tau}_1\tau_2 \vee \bar{x}_1x_2\tau_1\bar{\tau}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{\tau}_1\tau_2 \vee \\ \quad x_1\bar{x}_3\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{\tau}_1 \vee x_1x_2\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 \vee x_1x_3\tau_1\bar{\tau}_2, \\ \varphi_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{\tau}_1\tau_2 \vee x_2\bar{x}_3\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{\tau}_2 \vee x_2x_3\bar{\tau}_1\tau_2, \\ \varphi_2 = \bar{x}_1x_2\tau_1\bar{\tau}_2 \vee \bar{x}_1x_3\tau_1\bar{\tau}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{\tau}_1\bar{\tau}_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{\tau}_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3\bar{\tau}_1 \vee x_2x_3\tau_1\bar{\tau}_2. \end{array} \right. \quad (6)$$

Структурная схема автомата S_2 представлена на рисунке 3. Последний этап

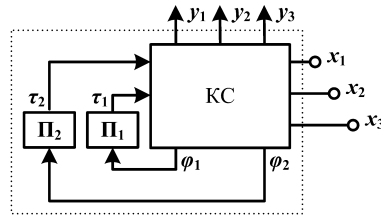


Рис. 3. Структурная схема автомата Мили S_2 , реализующего шифр многозначной замены

синтеза – построение комбинационной части схемы (КС) по системе булевых функций (6) – не представляет сложности, но в силу громоздкости итоговой логической схемы будет опущен.

Отметим, что для однозначности расшифрования (для существования обратного автомата) необходимо и достаточно, чтобы в шифраторе в каждом наборе выходных сигналов, соответствующих одному состоянию, все значения были различны [3]. По таблице 2 несложно проверить, что это требование выполнено (в пределах одной строки кодовые комбинации не повторяются). Мы не будем подробно останавливаться на вопросах синтеза дешифратора. В работе [3] описан алгоритм построения таблиц обратного автомата, дальнейшие расчеты аналогичны.

Проверка правильности синтеза шифратора S и дешифратора S^{-1} сводится к последовательному применению их к некоторому открытому тексту α :

$$\alpha = S^{-1}(S(\alpha)). \quad (7)$$

4. Преимущества автоматной модели шифратора

Предложенная в работе криптографическая составляющая основных моделей теории автоматов помимо методического интереса дает инструмент для исследования алгоритмов шифрования.

¹Для упрощения логических функций использовался программный пакет для моделирования электронных схем Electronics Workbench. В пакете реализован метод Квайна - Мак-Класски, позволяющий минимизировать булевы функции, заданные таблицей истинности или совершенной дизъюнктивной нормальной формой.

Представленный шифрующий автомат S_2 обладает всеми преимуществами шифров многозначной замены: одинаковые фрагменты входной последовательности в общем случае шифруются различными блоками. Например, кодовая комбинация «000» может быть зашифрована одним из трех способов: «010», «011» или «110», в зависимости от того, в каком состоянии находится автомат.

Пусть в качестве начального выбрано состояние $a_1 = 00$ и открытый текст представляет собой последовательность «000 000 101 010 000 000 100 000». Тогда шифротекст - это реакция автомата S_2 на данное входное слово (см. табл. 4). Как видно из примера, биграмма «000 000» шифруется по-разному: «010 011»

Таблица 4. Пример работы шифратора S_2

Открытый текст	000	000	101	010	000	000	100	000	
Состояния	00	01	10	00	10	00	01	00	01
Шифротекст	010	011	011	100	110	010	110	010	

или «110 010», а подпоследовательность «110 010» может быть шифротекстом двух различных биграмм: «000 000» или «100 000».

Вопрос о более серьезном анализе шифра, построенного на основе последовательного автомата, выходит за рамки данной работы. Скорее всего, как и все шифры замены, он не сможет противостоять частотному анализу при шифровании больших сообщений на одном ключе (в нашем случае – на одном автомате). Представляется целесообразным использовать «автоматное» шифрование как одну из составляющих какой-либо комбинированной (состоящей из нескольких процедур шифрования разных типов) криптосистемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов С.И. Синтез микропрограммных автоматов. Ленинград: Энергия, 1974. 216 с.
2. Белов Е.Б., Зубов А.Ю., Погорелов Б.А., Проскурин Г.В., Черемушкин А.В., Шанкин Г.П., Шурупов А.Н. Криптографические методы защиты информации. Учебно-методическое пособие для курсов повышения квалификации преподавателей вузов учебно-методического объединения по образованию в области информационной безопасности. Часть 2. Москва. 2003.
3. Богаченко Н.Ф. Применение теоретико-автоматных моделей в криптографии // Математические структуры и моделирование. 2007. Омск: ООО «УниПак». Вып. 17. С. 112–120.
4. Богаченко Н.Ф., Файзуллин Р.Т. Синтез дискретных автоматов. Учебно-методическое пособие. Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2006. 150 с.
5. Девянин П.Н. Модели безопасности компьютерных систем. М.: Издательский центр «Академия», 2005. 144 с.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИКТОРА ПО ФИКСИРОВАННОМУ НАБОРУ ЧАСТОТ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО КЛАССИФИКАТОРА

Е.В. Венедиктова, Д.Н. Лавров

В данной работе рассматривается реализация алгоритма идентификации диктора на основе линейного классификатора. Данными для обучения классификатора является набор значений спектра голоса, рассмотренный на фиксированных частотах. Проведены численные эксперименты, подтверждающие приемлемую точность идентификации.

Введение

В данной работе рассматривается построение системы идентификации пользователя информационной системы (диктора) на основе анализа спектральных характеристик его голоса с помощью линейного классификатора. При построении такой системы голос представляется как временной ряд, который подвергается преобразованию Фурье. Значения модуля спектра на требуемых промежуточных частотах между имеющимися отсчетами интерполируются с помощью кубических сплайнов. Затем набор значений на заранее определенном наборе частот интерпретируется как точка в n -мерном пространстве. Принадлежность точки к определенному множеству спектральных характеристик голоса определенного человека устанавливается заранее построенным линейным классификатором. Классификатор строится на основе записи голоса диктора и вычисления статистических характеристик. В работе показано, что частоты разных выборок распределены нормально, а также экспериментально определены характеристики качества работы классификатора. Намечены направления дальнейших исследований.

Задача идентификации диктора находит свое применение в банковских системах и в сотовой телефонии для авторизации пользователей. Существует ряд классических подходов к идентификации голоса, основанных на построении и анализе линейных фильтров или скрытых марковских моделей [1]. Качество идентификации в некоторых случаях достигает 99%.

Задача идентификации голоса может быть решена с помощью методов статистической теории распознавания образов [2]. Байесовский классификатор является оптимальным, но реализовать его сложно, особенно когда размерность пространства высока. Линейный классификатор сочетает в себе качество распознавания и простоту реализации. Альтернативным является подход экспертных систем [6] и нейронных сетей [5]. Реализация однослойной нейронной сети дает результат, аналогичный линейному классификатору, а подход обучения экспертных систем, описанный в [6], эквивалентен построению гиперплоскости между разделяемыми множествами. Таким образом, представляет интерес описанный в [2] метод линейной классификации.

Цель данной работы – определить возможность использования линейного классификатора для идентификации голоса и оценить качество его работы. Для этого необходимо реализовать алгоритм построения линейного классификатора, алгоритм принятия решения при наличии n -разделяемых субъектов. Провести анализ спектра частот голоса и на его основе выбрать необходимую информацию для обучения классификатора.

1. Линейный классификатор

Для построения линейного классификатора был выбран метод, представленный в [2]. Суть метода: построить линейную разделяющую функцию, минимизирующую вероятность ошибки решения. Решающее правило выглядит следующим образом:

$$h(X) = V^T X + v_0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} h(X) > 0, & X \in \omega_1, \\ h(X) < 0, & X \in \omega_2, \end{cases} \quad (2)$$

где $h(X)$ – линейная разделяющая функция; V – вектор коэффициентов; v_0 – порог.

Выражение $h(X)$ – это линейная функция относительно вектора X , называемая линейной разделяющей функцией. Задача построения линейной разделяющей функции заключается в том, чтобы для заданных распределений определить коэффициенты $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и значение порога v_0 .

Если величина $h(X)$ распределена по нормальному или близкому к нему закону, то для вычисления вероятности ошибки можно использовать математическое ожидание и дисперсию $h(X)$ для классов ω_1 и ω_2 , а затем выбрать параметры V и v_0 так, чтобы минимизировать ошибку решения. Вспомнив, что $h(X)$ является суммой n слагаемых x_i , получаем, что если векторы X имели нормальное распределение, то величина $h(X)$ также имеет нормальное распределение. Математическое ожидание и дисперсия в классах равны

$$\eta_i = E\{h(X) | \omega_i\} = V^T E\{X | \omega_i\} + v_0 = V^T E\{M_i\} + v_0 \quad (3)$$

$$\sigma^2 = Var\{h(X) | \omega_i\} = V^T E\{(X - M_i)(X - M_i)^T\} V = V^T \Sigma_i V, \quad (4)$$

где M_i – математическое ожидание выборки из ω_1 и ω_2 соответственно; Σ_i – ковариационные матрицы соответствующих выборок. Вероятность ошибки можно

записать следующим образом:

$$\varepsilon = P(\omega_1) \int_{-\eta_1/\sigma_1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi + P(\omega_2) \int_{\infty}^{-\eta_2/\sigma_2} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi. \quad (5)$$

$$V = [s\Sigma_1 + (1-s)\Sigma_2]^{-1} (M_2 - M_1), \quad (6)$$

где s лежит в диапазоне от 0 до 1. v_0 можно вычислить по формуле:

$$v_0 = \frac{s\sigma_1^2 V^T M_2 + (1-s)\sigma_2^2 V^T M_1}{s\sigma_1^2 + (1-s)\sigma_2^2}. \quad (7)$$

Функция (5) минимизируется методом золотого сечения по параметру s . Вычисление самой функции (5) на шаге итерации выглядит следующим образом:

1. Для данного s вычислить V по формуле (6).
2. Используя полученное значение V , вычислить по уравнениям (4) и (7) величины σ_1^2 , σ_2^2 , η_1 , η_2 и v_0 .
3. Вычислить вероятность ошибки по формуле (5).

Повторяем итерацию метода золотого сечения до достижения приемлемой точности.

2. Исходные данные для идентификации

В исследовании участвовало четыре человека, назовем их условно Елена, Дарья, Дмитрий и Алексей. Сделано по 50 записей фразы «Добрый день». Такое количество данных обусловлено тем, что больше 50 записей для человека утомительно, а также важно установить, каких данных и в каком количестве достаточно для более достоверной работы программы. Была выбрана одна фраза, так как от фразы и присутствующих в ней звуках может зависеть интенсивность отдельных частот спектра, что необходимо исследовать отдельно.

Записи голоса записаны с частотой дискретизации 44 кГц и хранятся в wav формате. При преобразовании Фурье для звука с частотой дискретизации 44 кГц получаем набор частот в диапазоне от 0 Гц до 22 кГц, его количество может быть различным, что зависит от длины файла, но равномерно распределенным по этому интервалу частот.

Для решения поставленной задачи необходимо иметь однотипные данные, одинаковый набор частот со значениями их интенсивности. Для этого необходимо интерполировать спектр частот. А затем вычислить для всех звуков интенсивность для одинакового набора частот.

Используя интерполяцию кубическими сплайнами, далее взяв набор частот в интервале от 0 до 600 Гц с шагом дискретизации, равным 1 Гц, получим характеристику одинаковой размерности (размерность равна 600). Это дает возможность использования ее при идентификации.

Далее возникает ограничение, накладываемое из-за размеров выборки (50 звуков), значит, мы можем использовать не более 50 частот.

Для получения вектора интенсивности частот выбираем 50 частот из интервала от 51 до 500 Гц. В этом интервале видны характерные особенности каждого голоса.

3. Подтверждение гипотезы о распределении интенсивности

Линейный классификатор строится при условии, что выборка значений имеет нормальное распределение или близкое к нему. Проверка интенсивности для отдельно взятой частоты по критерию “хи-квадрат” показала, что интенсивность имеет нормальное распределение. Выборка из $n = 50$ случайных значений (среднее = 0.130510532, стандартное отклонение = 0.048002366399557) была упорядочена по возрастанию и разбита на $s = 8$ интервалов. Для каждого интервала было рассчитано теоретическое количество точек (которые должны попасть в данный интервал) с помощью интеграла функции Гаусса и наблюдаемое число значений. Итак, для проверки нулевой гипотезы H_0 (генеральная совокупность распределена нормально) нужно вычислить по выборке наблюдаемое значение критерия (по формуле Пирсона):

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_e)^2}{f_0} \approx 7.1936,$$

где f_0 – теоретическое количество точек в интервале, f_e – количество точек выборки в интервале. Число степеней свободы $k = s - 1 - 2 = 5$ (уклонения связаны линейным соотношением, кроме того, наложены еще две связи, так как по выборке были определены два параметра распределения: среднее и стандартное отклонение) меньше табличного значения χ^2 -квадрат распределения, равного 11.1 ($\gamma = 0.95$, $k = 5$). Соответственно, вероятность ошибки первого рода 0.05, выборка имеет нормальное распределение с вероятностью 0.95.

4. Реализация алгоритма

Для исследования написаны следующие программы на scilab: программа преобразования входных данных, программа обучения классификатора, программа тестирования классификатора и демонстрационная программа.

Для реализации данной задачи был выбран математический пакет scilab 4.1., аналог matlab. Преимущества выбора: scilab является бесплатным программным обеспечением и дает возможность использовать необходимые в данном алгоритме математические функции, такие, как операции над векторами и матрицами (умножение, вычисление обратной); преобразование Фурье; построение кубических сплайнов; позволяет строить графики для наглядного изображения данных, что дает возможность проводить необходимые исследования.

Начальными данными являются файлы формата .wav. По 50 файлов от четырех человек. Для обработки данных написана программа, загружающая записи каждого человека, вычисляющая спектр частот и сохраняющая данные в файле.

Классификатор реализован отдельно. Данными для него являются спектры частот, которые предварительно должны быть получены. Результат обучения линейного классификатора сохраняется в файле, в котором хранятся параметры линейной разделяющей функции для данных спектров.

При реализации алгоритма пришлось решать проблему, вызванную разной дискретизацией спектров, возникающей в силу того, что запись парольной фразы осуществляется в разных по длительности временных диапазонах. Но так как частота дискретизации для всех экспериментов одинакова, то диапазон частот одинаков для всех записей голосов (в силу теоремы Котельникова), но с разным количеством частотных отсчетов. Идентификацию нужно проводить по выбранным частотам, число которых не должно превышать число выборок для обучения, в противном случае оценки ковариационных матриц окажутся необратимыми, что приведет к неверной работе классификатора. Выбранные частоты могут не попадать на дискретные отсчеты спектра. Недостающие значения спектра в промежуточных значениях дискретных частот интерполируем кубическими сплайнами.

Пример построения линейной разделяющей функции:

```
function [V,v0,n1,n2,err]=All_who(Mx,My,Dx,Dy,n)
// Mx,My - математические ожидания двух выборок
// Dx,Dy - матрицы ковариаций соответствующих выборок
// V - вектор коэффициентов
// v0 - порог

[err] = MinErr(Mx,My,Dx,Dy,n);
V = inv(err*Dx+(1-err)*Dy)*(My-Mx);
q1_2 = (V'*Dx)*(V);
q2_2 = (V'*Dy)*(V);
v0=-(err*q1_2*(V')*My+(1-err)*q2_2*(V')*Mx)/(err*q1_2+(1-err)*q2_2);
n1 = V'*Mx+v0;
n2 = V'*My+v0;
endfunction
```

Пример вычисления вероятности ошибки в точке s :

```
V = inv(s*D1+(1-s)*D2)*(M2-M1);
q1_2 = (V')*D1*V;
q2_2 = (V')*D2*V;
q1_1 = sqrt(q1_2);
q2_1 = sqrt(q2_2);
v0=-(s*q1_2*(V')*M2+(1-s)*q2_2*(V')*M1)/(s*q1_2+(1-s)*q2_2);
n1 = (V')*M1+v0;
n2 = (V')*M2+v0;
[p1,q1] = cdfnor("PQ",- (n1/q1_1),0,1);
[p2,q2] = cdfnor("PQ",- (n2/q2_1),0,1);
e = 0.5*(q1+p2);
res= 0.5*(q1+p2);
```


Демонстрационная программа представляет собой диалог с пользователем. Пользователь вводит путь к файлу для идентификации. Используя ранее построенную линейную разделяющую функцию (ее данные загружаются из файла), программа определяет, кому принадлежит голос, и выводит результат.

Для проведения экспериментов написана отдельная программа. В ней файлы для проверки загружаются из указанной директории и в текстовый файл выводятся результаты с подсчетом количества ошибок.

5. Определение вероятности ошибки классификатора

При неизвестных априорных вероятностях можно взять N объектов и проверить правильность работы классификатора [2]. На графике зависимости N , ε , ε' и γ показано соотношение между истинной ошибкой ε и ее оценкой ε' (рис. 1). Для коэффициента доверия $\gamma = 0.95$, при $N = 100$ экспериментах неправильно классифицированных $\tau = 11$ объектов, получаем оценку $\varepsilon' = \tau/N = 0.11$, и по графику можно определить доверительный интервал истинной вероятности ошибки ε при $\gamma = 0.95$, он равен $(0.05, 0.18)$.

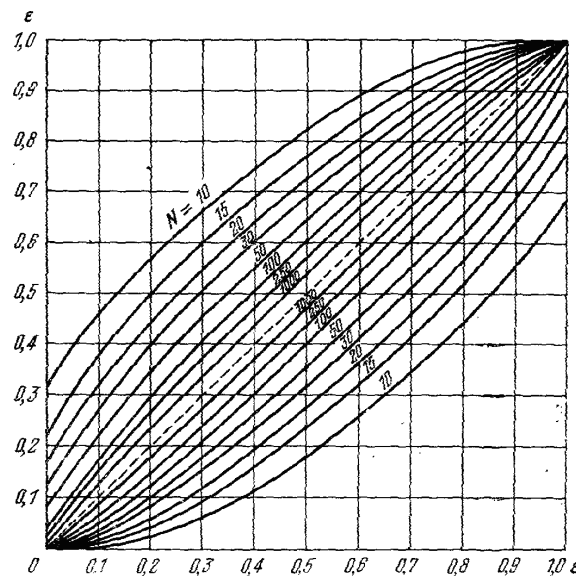


Рис. 1. Доверительный интервал $\gamma = 0.95$ истинной вероятности ошибки [2]

6. Экспериментальное определение качества идентификации

Для тестирования голоса четыре человека (Елена, Дарья, Дмитрий и Алексей) записались по 25 раз, фраза «Добрый день», эксперимент состоял из идентификации 100 голосов. Голоса были записаны в 2 подхода для каждого в разные дни. Были получены следующие результаты (см. табл. 1).

Таблица 1. Результаты тестирования на фразе «Добрый день»

Имя	Возраст	Тестов (шт.)	Ошибок (шт.)	Правильно (%)
Елена	21	25	2	92%
Дарья	13	25	0	100%
Дмитрий	36	25	8	68%
Алексей	20	25	1	96%
Итого:		100	11	89%

При тестировании 25 голосов Елены произошло 2 ошибки, ее программа приняла за Дарью. Однако этот результат можно считать очень хорошим, учитывая, что они сестры и по телефону их голоса путают многие, даже родители, ошибаясь чаще, чем линейный классификатор. Дарью классификатор идентифицировал без ошибок. Дмитрия идентифицировал 17 раз из 25, что, конечно, является плохим результатом, но нужно учесть, что идентифицируемым голос был изменен сознательно. Алексей был идентифицирован один раз с ошибкой. Из этого следует вывод, что, если человек заинтересован в своей идентификации, его узнают с 96 %-ной $((75-3)/75 \cdot 100\%)$ точностью. Общим результатом можно считать узнаваемость с 89 %-ной точностью. Если же протестировать голос, когда человек говорит другую фразу или слово, получим следующие результаты (см. табл. 2).

Таблица 2. Результаты тестирования на разных фразах

Имя	Тестов (шт.)	Ошибок (шт.)	Правильно (%)
Елена	25	7	72%
Дарья	25	3	88%
Дмитрий	5	1	80%
Алексей	25	7	72%
Итого:	80	18	77.5%

По другим фразам голоса различаются с меньшей точностью. Для использования линейного классификатора в системах, где человек заинтересован в том, чтобы его узнавали, возможно, лучше будет использовать не одну фразу во всех записях, а разные фразы по несколько раз. Таким образом будет накоплена наиболее ярко отражающая особенности голоса человека информация.

Анализ спектра частот показал, что при построении классификатора наиболее информативными являются частоты в диапазоне от 50 до 600 Гц. Однако возможность использования всей информации ограничивается количеством записей для обучения классификатора. В данной работе количество записанных звуков для построения классификатора было выбрано равным 50, и для построения классификатора использовалась каждая девятая частота из интервала от 50 до 500 Гц.

Возможно, для увеличения надежности идентификации необходимо исполь-

зовать выборку с большим количеством записей. Произношение разных фраз человеком с разным настроением для обучения классификатора вполне может дать возможность построения более надежного классификатора.

Для идентификации личности, если человек сознательно изменял голос, линейный классификатор, разделяющий по спектру частот, с небольшой выборкой для обучения плохо справляется с задачей идентификации. Возможно, нужно использовать не конкретный набор частот, а выбирать их в зависимости от спектра, что даст возможность определить особенности голоса, даже если человек старается его изменить. Вопрос о том, как выбирать частоты, остается открытым, это тема для отдельной работы.

7. Заключение

В ходе выполненной работы, на основе выбранного метода минимизации вероятности ошибки решения, реализован алгоритм обучения линейного классификатора. Биометрической характеристикой выбран спектр частот голоса, так как частота колебаний зависит от строения речевого аппарата. При реализации алгоритма возник ряд проблем, связанных с обработкой голоса: вычисление частотного спектра с помощью преобразования Фурье; интерполирование спектра частот для получения данных одной размерности. Классификатор протестирован на специально сгенерированных данных. Тестирование на математической модели сигналов показало хорошие результаты.

Проведено 100 экспериментов по идентификации голоса. Результаты экспериментов говорят о том, что использование линейного классификатора для идентификации личности по голосу вполне эффективно, когда биометрической характеристикой голоса выбран спектр частот (89 % испытаний).

Но выявлены и ограничения данного подхода. Так, для обратимости корреляционных матриц необходимо иметь их оценку по выборке большей или равной, чем размерность пространства, то есть числа частот, по которым проводится идентификация. Это требует более длительной процедуры обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Campbell J. P. Speaker recognition: a tutorial. Proc. IEEE. Vol. 85, N. 9. 1997. P. 1437–1462.
2. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов.: Пер. с англ. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 368 с.
3. Стретт Дж. Теория звука.: Пер. с англ. 2 изд. М.: ГИТТЛ. 1955. Т. 1–2. 473 с.
4. Цифровой звук: теория. // Журнал "Upgrade". 2005. Т. 1 (20).
5. Яхьяева Г.Э. Нечеткие множества и нейронные сети. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний. 2006. 316 с.
6. Нейлор К. Как построить свою экспертную систему.: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1991. 286 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОННОГО ДОКУМЕНТООБОРОТА ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ГОРОДА ОМСКА

Н.С. Иванова

В данной статье сравнивается ряд систем электронного документооборота, действующих на российских предприятиях, на примере промышленных предприятий города Омска.

В настоящее время в современных условиях компании вынуждены прибегать к внедрению информационных систем с целью увеличения скорости и эффективности бизнес-процессов. В мире разработаны различные классы информационных систем (ERP, ERP II, CPM/BPM, CRM, SCM, ECM и т.д.), каждая система решает свои задачи.

Главная проблема любого российского предприятия – это отсутствие единой системы электронного документооборота. Вследствие чего происходит следующее: увеличение штата; проблемная работа с версиями документов; постоянный контроль за исполнением того или иного поручения; увеличение срока поиска информации в архивах.

Все присутствующие на российском рынке системы управления документами можно разделить на несколько классификационных групп, каждая из которых ориентирована на решение специфических задач и занимает свою нишу в рамках организации документооборота и делопроизводства. Их отличия обусловлены способами реализации задач делопроизводства, что объясняется особенностями используемых концепций и моделей процессов, положенных в основу разработок.

Существует мнение, что в настоящее время только около 30 % всей корпоративной информации хранится в электронном виде (как в структурированном – в базах данных, так и в неструктурированном). Вся остальная информация (около 70 %) хранится на бумаге, создавая немалые трудности при ее поиске [1]. Тем не менее, это соотношение постепенно меняется в пользу электронной формы хранения (в частности, через развитие электронных архивов). Вряд ли, конечно, когда-нибудь все документы станут только электронными, однако несомненно,

что электронная форма хранения документов будет преобладать. При этом под термином «электронный документ» в рассматриваемом контексте обычно понимается текстовый файл, документ MS Word, электронная таблица MS Excel, графический файл, несколько взаимосвязанных файлов разных форматов (так называемый составной документ) и др.

В настоящее время на большинстве российских предприятий корпоративная информация (договоры, прайс-листы, приказы, деловая переписка, финансовая документация и др.) хранится как в бумажном, так и в электронном виде (часто неупорядоченно на файл-сервере). При этом практически неизбежно возникает дублирование информации, а также не обеспечивается поддержка разных версий документов и безопасность их хранения. То есть и при преобладании электронной формы хранения документов они не всегда используются эффективно. Потребность в эффективном управлении электронными документами и привела к созданию систем электронного документооборота (первые из которых появились еще в 1980-е гг.) [1].

Следует сказать, что в настоящее время существует немало подходов к решению проблем управления электронным документооборотом. Кроме так называемых универсальных систем электронного документооборота (EDMS), решить задачу управления документами можно при помощи следующих основных видов программных средств: систем групповой работы (Lotus, Novell GroupWise и MS Exchange); систем управления особыми видами документов (в частности, PDM-систем); специальных модулей управления документооборотом в составе корпоративных информационных систем для предприятий (SAP R/3, Baan и др.).

Основная масса внедренных продуктов на территории России написана нашими соотечественниками на основе иностранных платформ. Что, собственно, и неудивительно, т.к. подходы к ведению документооборота в России отличаются от западных стандартов, хотя и не противоречат им. Прежде чем перейти к детальному рассмотрению систем и компаний, предлагаем вашему вниманию таблицы 1–2, демонстрирующие общую ситуацию на рынке систем электронного документооборота (СЭД) в России [2].

Таблица 1. Процентное отношение внедренных СЭД в РФ

Евфрат	6%	Directum	3%
Босс-референт	6%	Documentum	4%
DIS	3%	Эффект-офис	2%
Optima	9%	NauDoc	2%
Landocs	2%	Ган-док	3%
Дело	50%	Кодекс: Документооборот	4%
Company& Office Media	2%	Остальные	4%

Пожалуй, в каждом конкретном случае нужно исходить из особенностей целей и задач, которые ставит предприятие при внедрении системы управления документооборотом. Но, как правило, есть основные моменты, на которые опираются разработчики систем электронного документооборота:

Таблица 2. Структура спроса на СЭД в РФ

Государственный сектор	43%	Другое	3%
Машиностроение	2%	Металлургия	2%
Нефтегазовая и хим. пром.	7%	НИИ, образование	5%
Пищевая пром.	2%	Строительство	2%
Телекоммуникации	4%	Топливо-энергетический комплекс	5%
Торговля	3%	Транспортные компании	2%
Услуги	6%	Финансы, банки, страхование	14%

Таблица 3. Сравнение по стоимости

Наименование системы электронного документооборота	Стоимость лицензий для одновременной работы 50 пользователей, использующих полный функционал системы, руб.	Стоимость внедрения, руб./час	Стоимость обучения, руб./час	Стоимость технической поддержки за 1 год, руб.	Стоимость обновления системы, руб.	Стоимость заказных доработок, руб./час	Всего, руб.
ЛОЦМАН	595000	15000	1520	89250	116280	25800	8565300
SERCH	618800	0	1500	81600	185640	15500	903040
LOTUS	935000	0	2500	186320	72110	4250	1200180

- практическая неограниченность размера электронного архива;
- встроенная поддержка полнотекстовой индексации;
- поддержка версий и подверсий документов;
- возможность хранения документов в архиве в исходном формате;
- защищенность данных;
- возможность ведения журналов действий пользователей.

В связи с этим в течение полугода исследовались три крупных промышленных предприятия (ФГУП ОмПО «Иртыш», ЗАО «Релеро», холдинговая компания «Три Эф») с различными программными продуктами электронного документооборота, но с одинаковыми проблемами внедрения и работы с ними. Что позволяет считать, что любая система электронного документооборота – это только «костяк» или основа для начала ведения документооборота и каждую систему необходимо дорабатывать и адаптировать к конкретному предприятию путем написания и внедрения ряда модулей.

Рассмотрим вышесказанное более подробно и попробуем сравнить системы электронного документооборота на уровне разработок конструкторской и тех-

Таблица 4.

Наименование системы электронного документооборота	ЛОЦМАН	SERCH	LOTUS
Что представляет собой обрабатываемый "электронный документ" в СЭД?	Файл + текстовые поля на карточке + дополнительные атрибуты	Файл любого расширения	Файл любого расширения
Что выступает в качестве хранилища документов?	СУБД Oracle или MS SQL Server	СУБД MS SQL Server и/или InterBase	СУБД MS SQL Server, Oracle 9i, IBM DB2 Database
Что выступает в качестве хранилища шаблонов документов?	не обозначено хранилища шаблонов документов	та же СУБД MS SQL Server и/или файловые каталоги	Системная библиотека шаблонов
Что выступает в качестве хранилища архивных документов?	та же	та же Oracle 9i	БД I C:Архив MS SQL Server и/или файловые каталоги
Наличие механизмов автоматического архивирования	(+)	(+)	(+)
Если используются ЭЦП, то какие именно?	(+) нет данных	(-) встраиваемая опция	(+) Cryptopro

Таблица 5.

Наименование системы	На что именно накладывается ЭЦП?	Авторизация по паролю	Windows-авторизация	Создания новых сущностей: Организационная структура	Создания новых сущностей: Типы документарных карточек	Создания новых сущностей: Типы карточек задач /поручений /распоряжений
ЛОЦМАН	(+) нет данных	(+)	(-)	(+)	(+)	(+)
SERCH	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)	(+)
LOTUS	(+) нет данных	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)

Таблица 6.

Наименование системы электронного документооборота	Создания новых сущностей: Номенклатура дел	Создания новых сущностей: Номенклатура проектов	Создания новых сущностей: Типы клиентов /контрагентов	Варианты ввода документов в СЭД: Создание	Варианты ввода документов в СЭД: Прикрепление	Варианты ввода документов в СЭД: Сканирование
ЛОЦМАН	(+)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
SERCH	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)
LOTUS	(+)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)

Таблица 7.

Наименование системы электронного документооборота	Ведение секретного делопроизводства (грифы секретности)	Автоматическое сохранение всех редакций документа	Возможность "отката" к любой ранней редакции документа	Многостадийность обработки документов	Многостадийность обработки задач /Поручений /Распоряжений	Наличие "жестких" маршрутов
ЛОЦМАН	(+)	(-)	(-)	(+) Не начат Исполнен Прекращен Удален	(+) Не начато Готово Исполнено Прекращено Удалено	(+)
SERCH	(+)	(+)	(+)	(+)	(-) не обозначена многостадий- ность обработки	(+)
LOTUS	(-)	(+)	(+)	(+)	(-) не обозначена многостадий- ность обработки	(+)

Таблица 8.

Наименование системы электронного документооборота	Уведомления по эл. почте	Возможность настройки пользовательских уведомлений	Механизм контроля документов и задач	Фильтрация и реквизитный поиск по различным полям	Встроенный механизм поиска в прикрепленных файлах	Учет места хранения оригиналов документов
ЛОЦМАН	(+)	(+)	(+)	(+)	(+) Встроенная собственная разработка	(+)
SERCH	(+)	(+) Настройка вывода	(+) По сроку	(+)	(-) Стороннее ПО: MS Search Для полнотекстового поиска с учетом морфологии языка предлагается использовать сторонний продукт	(+)
LOTUS	(-)	(+)	(+)	(+)	(-) Стороннее ПО: ABBYY: Retrieval & Morphology 4.0 Engine	(+)

Таблица 9.

Наименование системы электронного документооборота	Учет перемещения оригиналов документов с места на место	Механизм формирования отчетности о рабочем времени пользователя	Режим работы заместителей: доступ к документам замещаемого	Режим работы заместителей: уведомления по документам замещаемого	Механизм отчетности: текстовый редактор	Механизмы отчетности: табличный редактор
ЛОЦМАН	(+)	(-)	(-)	(-)	(+) встроенный редактор	(+) встроенный редактор
SERCH	(+)	(-)	(-)	(-)	(+) встроенный редактор	(+) встроенный редактор, внешний редактор: MS EXCEL
LOTUS	(+)	(-)	(-)	(-)	(+) внешний редактор: MS Word WordPad встроенный редактор: Crystal Reports	(+) внешний редактор: MS Excel

Таблица 10.

Наименование системы электронного документооборота	Возможности интеграции с другим ПО (каким именно)	Механизмы автоматического импорта документов	Механизмы автоматического импорта шаблонов документов	Администрирование доступа к функциям	Администрирование доступа к документам /задачам /поручениям /распоряжениям	Возможности интеграции с почтовыми клиентами (какими именно)
ЛОЦМАН	(+) Microsoft Office	(-)	(-)	(+)	(+)	(+) Microsoft Outlook Microsoft Express
SERCH	(+) Microsoft Office	(+)	(+)	(+)	(+) Ролевое администр ирование	(+) Microsoft Outlook
LOTUS	(+) Microsoft Office, 1C v8.0	(+) Автомат ические обработч ики - роботы	(+)	(+)	(+) Ролевое администр ирование	(+) Microsoft Outlook Express

нологической документации.

Перечисленные предприятия находятся на территории города Омска и занимаются выпуском промышленной продукции.

Системы электронного документооборота:

- ФГУП ОмПО «Иртыш» - система «Людман PLM»;
- ЗАО «Релеро» - система «Serch»;
- Холдинговая компания «Три Эф» - система «Lotus - домино».

Рассмотрим стоимость лицензий СЭД и работ по внедрению и техническому сопровождению в каждом конкретном случае.

При исследовании функциональности систем электронного документооборота была предпринята попытка оценить эффективность работы системы не только качественно, но и количественно. Для этого были использованы наиболее объективные критерии функциональности [3]. Все критерии рассмотрим в таблицах 4 – 10. Если система удовлетворяет критерию, ставим плюс, если нет – минус. Некоторые ячейки таблиц сопровождаются комментариями.

Анализируя таблицы 3 – 10, можно смело сказать, что исследуемые три системы электронного документооборота являются современными и оснащены практически всеми функциями. Однако, проведя опрос административного аппарата предприятий, можно сделать вывод, что исследуемые системы хоть и внедрены на крупнейших трех промышленных предприятиях Омска, но до конца не адаптированы. И несмотря на то что предприятия разные по своей структуре и значимости, они сталкиваются с необходимостью решить следующие задачи:

- не хватает подпрограммы документоучета. Вопрос состоит в том, что любой инженерно-технический работник может создать канцелярский документ типа: извещение; служебная записка; техническое решение; акт и т.д. Все исследуемые предприятия имеют большой штат инженерно-технических работников. Поэтому очень трудно отследить нумерацию, создание и аннулирование этих документов;
- проблемы с передачей файлов в архив. Разработчик часто создает документ, минуя файл-сервер;
- проблемы защиты и внедрения ЭЦП и т.п.

Разработанный нами модуль «Документоучет», который без особых трудностей адаптируется в описанных выше системах документооборота, решает эти проблемы.

Описание модуля мы дадим в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Российские предприятия задумались об автоматизации //Логинфо. N. 5. 2001.
2. – <http://www.consult.ru>
3. – <http://www.iteam.ru>

Математические структуры и моделирование

Выпуск 18

Журнал

Редактор Е.В. Брусницына

Подписано в печать 20.09.2008.
ОП. Формат 60 × 84 1/8. Печ.л. 12,7. Уч.-изд.л. 21,0.
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Полиграфическом центре КАН
644050, г. Омск, пр. Мира, 32, ком. 11, тел. (381-2) 65-47-31
Лицензия ПЛД № 58-47 от 21.04.97 г.