

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

Выпуск 16

Омск 2006

Журнал «Математические структуры и моделирование». – Омск:
Омск. гос. техн. ун-т, 2006. – Вып. 16. – 102 с.

ISBN 5-8149-0250-7

Редакционная коллегия

Главный редактор

А.К. Гуц

д-р физ.-мат. наук, профессор

В.А. Топоногов

д-р физ.-мат. наук, профессор

Институт математики СО РАН (г. Новосибирск)

Н.Ф. Богаченко

к-т физ.-мат. наук

Е.В. Палешева

к-т физ.-мат. наук

Художественное оформление

В.В. Коробицын

Адрес научной редакции

Россия, 644053, Омск - 53, ул. Грозненская, 11
Омский государственный университет
факультет компьютерных наук

E-mail: guts@univer.omsk.su

msm@cmm.univer.omsk.su

ISBN 5-8149-0250-7

© Омский госуниверситет, 2006

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
и
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, и размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества.

Публикуются также статьи по информационным технологиям, компьютерным наукам, защите информации, философии и истории математики.

Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Журнал является реферлируемым. Рефераты статей публикуются в журналах «Zentralblatt für Mathematik» (Германия), «Mathematical Reviews» (США), ВИНТИ (Россия).

Электронная версия журнала представлена в сети «Интернет» по адресу:

<http://cmm.univer.omsk.su>

Журнал издается на коммерческие средства факультета компьютерных наук Омского государственного университета.

Наш E-mail:

msm@cmm.univer.omsk.su

Подробную информацию можно найти на Web-сервере:

<http://cmm.univer.omsk.su>

СОДЕРЖАНИЕ

Информационные технологии

- О.Л. Епанчинцева, Т.А. Погромская. *Формирование единого конкурсного пространства омского региона* 5
- А.С. Дрозд. *Организация биллинговой системы* 11

Фундаментальная математика

- А.Г. Гринь. *Минимальные условия слабой зависимости в предельных теоремах для максимумов* 21

Прикладная математика и моделирование

- П.С. Гладкий. *Модель образования неформальных подгрупп* 26
- Д.Н. Василенко, Е.В. Головачев, С.Н. Чуканов. *Использование грамиана наблюдаемости для диагностики отказов в нелинейных системах* 37
- Е.В. Головачев, С.Н. Чуканов. *Оценивание взаимодействия каналов систем управления, инвариантное к преобразованию вектора состояния* 45

Теоретическая физика

- А.К. Гуц. *Уравнения для физических полей и времени в мультиверсе* 51
- В.В. Карбановский, Т.В. Каиров. *Замечания к статье Е.В. Палешевой «Физические следствия многомерного времени»* 56
- Ю.А. Лебедев. *Феноменологический формализм описания взаимодействующих ветвей мультиверса, мультивидуума и явления «склеек ветвей мультиверса»* 59

продолжение на след.странице



И.В. Широков. *Символы операторных функций на алгебрах Ли*.....67

Математическая экономика

О.С. Ёлкина. *Зависимость как первичная категория социально-экономической деятельности*.....77

Защита информации

С.В. Белим, С.Ю. Белим. *Нахождение времени заражения локальной сети вирусами на основе сети формальных нейронов*.....84

И.В. Русинович. *Использование MIDI-форматов для стеганографических контейнеров*.....88

ФОРМИРОВАНИЕ ЕДИНОГО КОНКУРСНОГО ПРОСТРАНСТВА ОМСКОГО РЕГИОНА

О.Л. Епанчинцева, Т.А. Погромская

В статье рассказывается об участии Омского государственного университета в апробации единой системы приема в высшие учебные заведения. В данном эксперименте приняли участие 14 вузов из разных регионов России.

Начиная с 1998 г. законодательством РФ абитуриенту разрешено предоставлять в приемную комиссию копию документа об образовании, что повлекло за собой одновременную подачу заявлений не только на несколько специальностей в рамках одного вуза, но и в несколько вузов. Дополнительным фактором, который усложнил этот процесс, стал единый государственный экзамен (далее — ЕГЭ), совмещающий итоговую аттестацию и вступительные испытания. Введение ЕГЭ избавляет абитуриента от многократной сдачи вступительных испытаний. Более того, заявление о приеме в вуз абитуриент теперь может направить заказным письмом с копиями документа об образовании и свидетельства с результатами ЕГЭ. Можно ожидать, что абитуриент подаст документы в большее количество вузов/факультетов/специальностей, чем до введения ЕГЭ, следовательно, пересечение вузов по родственным специальностям автоматически повлечет почти полное пересечение по абитуриентам. Однако зачисление на бюджетные места происходит только в тот вуз/специальность, в который абитуриент предоставил оригинал документа об образовании.

Абитуриенту необходимо принять решение о том, в какой вуз предоставить оригинал, причем это решение принимается им в состоянии неопределенности, т.к. не всегда приемные комиссии могут предоставить полную информацию о складывающейся конкурсной ситуации в своем вузе.

И приемные комиссии проводят зачисление в состоянии неопределенности: им неизвестны истинные предпочтения абитуриента. А после проведения зачисления вузы сталкиваются с проблемой «потерянных» бюджетных мест, связанной с тем, что зачисленный на это место абитуриент может забрать документы и уйти в другое, более привлекательное для него учебное заведение. В результате вуз теряет качественно подготовленных абитуриентов и имеет «недобор» на специальность.

Как один из вариантов комплексного решения данной проблемы предлагается создание единого конкурсного пространства региона (далее — ЕКПР) [6], [11].

Упрощенная модель единой системы приема одного вуза уже пять лет успешно работает в Омском государственном университете.

В ОмГУ в 2000 году была разработана технология ведения приемной кампании в едином конкурсном пространстве, при которой абитуриент подает заявление в вуз с указанием приоритетов для всех выбранных им специальностей [2].

Для успешной реализации этой технологии была разработана автоматизированная информационно-аналитическая система «Абитуриент» [1, 7]. Система опробована и успешно эксплуатировалась также в Томском государственном университете в приемных кампаниях 2003 и 2004 годов. Имеются соответствующие акты о внедрении системы в ОмГУ и ТГУ. В рамках системы был реализован модуль автоматического зачисления [8]. Полученные в результате работы модуля «Автозачисление» рейтинг-листы вывешиваются на стендах и публикуются на портале приемной комиссии. В результате существенно снизилась степень неопределенности для абитуриентов, появилась возможность своевременно проинформировать их о складывающейся конкурсной ситуации, повысилась степень открытости на протяжении всей приемной кампании. Публикация рейтинг-листов начинается в процессе сдачи вступительных испытаний и позволяет также информировать членов приемной комиссии о складывающемся проходном балле [9, 10].

Технология ведения приемной кампании и алгоритм автоматического зачисления являются базовыми элементами для предлагаемой модели ЕКПР.

Наши предложения о региональном межвузовском зачислении впервые прозвучали в журнале «Открытое и дистанционное образование» в 2002 году: «Идеология и технология созданной системы позволяют проводить и межвузовский конкурсный отбор. Причем каждый вуз может проводить прием заявлений и вступительные испытания по собственным правилам, а для одновременного конкурсного отбора в несколько вузов достаточно предоставить линейно упорядоченные по набранным баллам и дополнительным критериям списки абитуриентов. Проблемы, которые предстоит решить:

- указание сквозного рейтинга конкурсных позиций из регионального межвузовского справочника;
- идентификация абитуриента (по фамилии, имени, отчеству, дате рождения, удостоверению личности), подавшего заявления в разные вузы;
- стандартизация информации об абитуриенте для межвузовского обмена;
- подача абитуриентом оригинала об образовании в один из вузов и засчитывание этого факта во всех вузах, участвующих в межвузовском конкурсном отборе» [2].

В 2004 году в условиях расширения эксперимента по введению единого государственного экзамена в рамках федеральной целевой программы «Развитие единой образовательной информационной среды (2001–2005гг.)» одним из

ключевых направлений объявлена разработка федеральной системы единого конкурсного приема по результатам ЕГЭ.

В приказе №2235 от 19.05.2004 были перечислены вузы — участники эксперимента по апробации единой системы приема (далее — ЕСП). В апробации предполагалось участие 17 вузов, но реально только 14 вузов были задействованы в этом эксперименте. Не все вузы смогли выполнить требования, предъявленные к участникам единой системы приема. Обязательным условием для всех проходящих апробацию было требование предоставить абитуриенту возможность подачи заявлений на несколько специальностей с указанием приоритетов.

Апробация автоматизированной системы «Единый конкурсный прием» (далее — ЕКП), являющейся информационной основой единой системы приема, была осуществлена Омским государственным университетом в ходе приемной кампании 2004 года.

В процессе апробации участники последовательно решали поставленные задачи: предоставление данных о вузе, включающее перечень направлений и специальностей, по которым ведется подготовка, заполнение данных о контрольных цифрах приема, в том числе целевой прием, перечень вступительных испытаний на направления и специальности, уровень оценки для медалистов, уровень положительной оценки. Данные передавались через Интернет, посредством заполнения экранных форм сервера <http://www.admin.novsu.ac.ru/fsekr.nsf>. Затем сведения были загружены работчиками в базу данных ЕКП.

Следующей задачей было обеспечение обмена данными между информационной системой вуза и базой данных ЕКП. Отметим, что состав файлов обмена корректировался в ходе апробации. Для обмена данными формировались три типа файлов: «Персональные данные», «Заявления-оценки», «Рейтинги-листы/Листы зачисления».

В таблице 1 отражены статистические данные о ходе загрузки данных в ЕКП различными вузами.

Следует отметить, что Омский государственный университет первым справился с задачей предоставления полного комплекта данных. Несмотря на общие для всех вузов сроки проведения ЕГЭ, мы смогли раньше всех провести зачисление. Это оказалось возможным благодаря нескольким базовым принципам проведения приемной кампании, которыми мы уже давно руководствуемся:

1. Единая приемная комиссия вуза.
2. Подача заявления в вуз с указанием приоритетов заявленных специальностей/ направлений (число заявляемых специальностей ограничивается только списком специальностей, по которым ведется подготовка).
3. Формирование единого личного дела абитуриента.
4. Одновременное автоматизированное зачисление в вуз на все формы обучения.

Работы по созданию единой системы приема будут продолжаться, надеемся, с нашим участием. Но миграция абитуриентов за пределы нашего региона очень

мала. Близость Казахстана обеспечивает устойчивый дополнительный приток абитуриентов. Все вузы региона сосредоточены в пределах одного мегаполиса. Вузы имеют большое количество родственных специальностей. Расширение эксперимента по ЕГЭ освобождает абитуриентов от многократных сдач вступительных испытаний. Стоимость обучения на внеплановых местах не каждому по карману. Все это побуждает абитуриентов использовать все возможности для поступления на плановое место. Пересечение вузов региона по родственным (и не очень) специальностям влечет огромное пересечение по абитуриентам. Предложенная нами схема создания единого конкурсного пространства региона (ЕКПР) [6, 11] наиболее актуальна и реализуема в пределах одного региона.

Участники единого конкурсного приема:

1. *Организационный центр ЕКПР*, выполняющий функцию накопления и обработки информации, взаимодействия с федеральной базой свидетельств ЕГЭ. Результат работы организационного центра — публикация правил приема в вузы, рейтинг-листов абитуриентов по конкурсным позициям вузов-участников единой системы приема, результатов зачисления.
2. *Приемные комиссии вузов*, предоставляющие информацию о специальностях вуза: план набора, перечень вступительных испытаний, профильные экзамены, нижние границы положительных оценок; данные об абитуриентах: ФИО, дата рождения, документ, удостоверяющий личность, заявленные конкурсные позиции с приоритетами абитуриента, набранные баллы абитуриента. Из ЕКПР приемные комиссии получают информацию о складывающемся проходном балле на специальности.
3. *«Абитуриент»* — участник, который является основным потребителем информации, публикуемой организационным центром ЕКПР. К участнику «Абитуриент» относятся не только абитуриенты, но и их родители, учителя и т.п.

Процесс взаимодействия ЕКПР и приемных комиссий вузов можно разделить на четыре основных этапа:

1. Формирование информационного пространства ЕКПР в части предоставления данных о правилах приема вузами-участниками ЕКПР.
2. Формирование единого заявления абитуриента в вузы-участники ЕКПР с указанием приоритетов заявляемых специальностей.
3. Формирование и публикация рейтинг-листов абитуриентов в информационном пространстве ЕКПР.
4. Процедура зачисления абитуриентов в приемных комиссиях вузов. Передача информации о зачисленных абитуриентах в ЕКПР.

После введения единого государственного экзамена как средства итоговой аттестации и одновременно вступительного испытания в вузы идея организации единого конкурсного пространства региона для абитуриента стала особенно реальной. Предоставление возможности абитуриентам подавать заявления в несколько вузов, а в вузе — на несколько специальностей требует от приемных комиссий вузов новых технологических решений в организации приема.

Таблица 1. Загрузка данных в ЕКП по состоянию на 12.08.2004.

<i>Наименование вуза</i>	<i>Загруж. персон. данных</i>	<i>Загруж. заявле- ний</i>	<i>План приема общий</i>	<i>Целев. прием</i>	<i>Зачис- лено</i>
Астраханский государственный технический университет	3224	16893	647	60	
Великолукская государственная академия физической культуры и спорта	212	211	155		140
Великолукская государственная сельскохозяйственная академия	586	612	450	110	412
Воронежский государственный университет	4041	9185	1533		1417
Магнитогорский государственный университет	2092		955	60	
Марийский государственный педагогический институт им. Н.К. Крупской	1958	3414	570	183	507
Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого	3525	6657	1815		1866
Омский государственный университет	5889	20524	1020	242	1034
Оренбургский государственный университет	5156	15954	2002	117	
Псковский государственный педагогический институт им. С.М. Кирова	826	1046	249		380
Псковский государственный политехнический институт	965	5136	485	242	249
Ростовский государственный университет путей сообщения	28	28	10	5	10
Томский государственный педагогический университет	2419	7396	1270		868
Итого по базе данных	30921	87056	11161	1019	6883

ЛИТЕРАТУРА

1. А.с. 2003611045 РФ, Роспатент. Информационно-аналитическая система «Абитуриент» (ИАС «Абитуриент») / Горнева И.С., Епанчинцева О.Л., Захаров А.М., Картешкина Е.В., Костюшина Е.А., Погромская Т.А., Рапаева И.А., Сергеева Т.И. (RU). №2003610757: Заяв. 07.04.2003. Оpubл. 30.04.2003. Бюл. N.3(44). С.98.
2. Горнева И.С., Епанчинцева О.Л., Костюшина Е.А., Погромская Т.А., Пролубников А.В., Рапаева И.А., Хорошевский М.В. Информационные технологии в Приемной кампании ОмГУ // Открытое и дистанционное образование. Томск. 2002. N.1 (5). С.55-58.
3. Епанчинцева О.Л. Технология проведения приемной кампании в связи с введением ЕГЭ // Открытое и дистанционное образование. Томск. 2002. N.4 (8). С.130-131.
4. Епанчинцева О.Л., Костюшина Е.А., Погромская Т.А. Задачи управления при формировании единого конкурсного пространства // Менеджмент высшего образования: проблемы и перспективы. Омск. 2004. С.154-174.
5. Епанчинцева О.Л. Апробация автоматизированной системы «Единый конкурсный прием» / Единая образовательная информационная среда: проблемы и пути развития / Материалы III Всероссийской научно-практической конференции-выставки, посвященной 30-летию ОмГУ. Омск. 2004. С.54-56.
6. Епанчинцева О.Л., Костюшина Е.А., Погромская Т.А. К вопросу формирования единого конкурсного пространства региона / «Человеческое измерение в информационном обществе» / Тезисы докладов по материалам Всероссийской научно-практической конференции / Всероссийский форум «Образовательная среда-2003». Москва: ВВЦ. 2003. С.102-103.
7. Информационно-аналитическая система «Абитуриент». Свидетельство об отраслевой регистрации разработки N 2224 от 27 ноября 2002 г. в Отраслевом Фонде алгоритмов и программ.
8. Костюшина Е.А. Автоматизированная подсистема «Абитуриент». Формализация алгоритма функции «Автозачисление» // Математические структуры и моделирование. Омск. 2001. Вып.7. С.157-161.
9. Костюшина Е.А. Опыт эксплуатации модуля «Автозачисления» информационно-аналитической системы «Абитуриент» ОмГУ // Математические структуры и моделирование. Омск. 2001. Вып.8. С.121-125.
10. Костюшина Е.А. Автоматизация процесса зачисления абитуриентов в условиях подачи заявлений на несколько конкурсных позиций // Материалы Всероссийской научной молодежной конференции «Под знаком «Сигма». Омск. 2003. С.21.
11. Костюшина Е.А. Организация единого конкурсного пространства региона // Открытое и дистанционное образование. Томск. 2003. N.3-4 (11-12). С.35-41.

ОРГАНИЗАЦИЯ БИЛЛИНГОВОЙ СИСТЕМЫ

А.С. Дрозд

Рассматривается создание биллинговой системы и безопасного шлюза для домашних локальных сетей, а также для небольших и средних организаций.

Существует множество способов реализовать биллинговую систему (систему для подсчета трафика). Учет можно вести как на клиенте, так и на маршрутизаторе. В свою очередь, маршрутизатор может быть как аппаратный, так и программный, построенный на базе операционных систем типа Unix или Windows.

Перед автором была поставлена задача построения биллинговой системы, а точнее, подсчета Интернет-трафика для пользователей домашней локальной сети.

Попытки реализовать стандартными средствами, такими, как прокси сервер (Squid, Socks), NAT, не удовлетворяли ни пользователей, ни заказчика, ни автора. Основные требования реализации проекта были следующими:

- точный подсчет трафика без ограничения возможностей пользователя (клиенту должны быть доступны все порты, любые протоколы);
- система должна автоматически осуществлять блокировку доступа пользователя в случае превышения лимита по трафику;
- возможность получения информации о состоянии счета в режиме реального времени;
- необходимость получения пользователем информации о посещении сетевых ресурсов;
- невысокая стоимость проекта;
- использование некоммерческого программного обеспечения.

Результатом работы должен оказаться шлюз с высоким уровнем безопасности и программа, написанная на языке C. Программа должна работать под

Unix-подобными операционными системами (с поддержкой pcap). Также создание версии программы для операционных систем типа Windows возможно в рамках реализации проекта.

Поставленная автором задача не нова, однако в рамках ее рассмотрения проблема информационной безопасности проекта является актуальной, но она широко не исследовалась.

Один из первых вариантов, который приходит в голову, – построить локальную сеть, поставить сервер, который будет считать входящий, при необходимости и исходящий, трафик. Установить на него Unix-подобную операционную, настроить ipfw, iptables или ipchains. Данный вариант достаточно хорош в малых коммерческих организациях, где каждый друг друга знает, где администратор знает возможности пользователей, где компьютеры пользователей настраивает сам администратор (запрещает изменять IP-адрес клиенту), а самое главное — где есть административные механизмы борьбы со злоумышленниками. Данный же проект был разработан для домашних локальных сетей, в которых описанный способ борьбы неприменим.

1. Решение

Использование VPN для безопасности выхода и аутентификацию на основе Radius-сервера. Если пользователь захотел выйти в Интернет, то достаточно создать сетевое подключение типа «Подключение к виртуальной частной сети через Интернет» (в Windows-е, а у пользователей, скорее всего, именно эта операционная система), что не сложнее создания обычного модемного соединения.

На сервере создана база данных, в которой хранится информация о пользователе, его платежах, информация о прошедшем трафике, ошибки соединения (удобно для нахождения злоумышленника).

Сама программа всегда «работает» на интерфейсе и по необходимости добавляет информацию о прошедшем трафике.

Предусмотрены скрипты для администратора и рядового пользователя, с помощью которых можно добавлять, изменять информацию о пользователе, просматривать ошибки и просматривать пользователем статистику.

1.1. Выбор операционной системы

Аппаратный маршрутизатор не подходит для решения поставленной задачи (основная проблема – цена), в связи с этим возникает новая подзадача – выбор программного маршрутизатора, а точнее, выбор операционной системы, она должна удовлетворять нескольким основным требованиям:

- безопасность;
- стабильность;
- гибкость в настройке.

Предпочтение было отдано программному серверу платформы Unix (FreeBSD), так как этот программный продукт зарекомендовал себя как наиболее стабильная и защищенная система из существующих серверных операционных систем.

1.2. Аутентификация и авторизация

В качестве аутентификации была использована технология RADIUS.

Radius (Remote Authentication Dial In User Service) – служба удаленной аутентификации входящих звонков пользователей. Он является протоколом для передачи информации по аутентификации, авторизации и конфигурации между сервером доступа, далее NAS, и сервером аутентификации – RADIUS.

Стандартно существует два шага в процессе аутентификационного запроса, приходящего от NAS (Network Access Server): авторизация и аутентификация.

Аутентификация должна быть разрешена в период авторизации. Основная причина этого состоит в том, что пользователь может быть не допущен до метода аутентификации в период авторизации.

В данном проекте Radius (программа freeradius) использует базу данных для хранения имен пользователей, IP-адрес, который будет выдаваться пользователю, его пароль. Этот способ хранения информации о пользователе, очевидно, очень удобен. Можно будет добавлять пользователя с помощью Perl-скрипта через Web-интерфейс, что будет показано ниже. В качестве базы данных была выбрана СУБД MySQL.

1.3. Выбор СУБД. Создание базы данных

В настоящее время существует множество бесплатно распространяемых СУБД, таких, как PostageSQL, mSQL, MySQL и так далее. Конечно, эти открытые СУБД не сравнятся с такими коммерческими гигантами, как Oracle или MS SQL Server. Но при правильной настройке, при малых и средних задачах они будут выглядеть достаточно достойно. Журналы «PC Magazine», «eWEEK» проводили тестирование пяти СУБД: DB2 7.2, MySQL 4.01, Oracle 9i, SQL Server 2000, ASE 12.5.0.1.

«Из пяти баз данных, которые мы тестировали, только Oracle 9i и MySQL были способны выполнить наше приложение 8 часов без каких-либо проблем».

«SQL Server и MySQL были самыми простыми в настройке, Oracle 9i – был самым сложным, потому что у него слишком много разделенных кешей памяти, которые можно регулировать».

В качестве СУБД был выбран MySQL. Как было показано выше, ряд его преимуществ впечатляет. Второй причиной нашего выбора был опыт работы с этой СУБД и разработка нескольких простых баз данных для компании «Компас-М». Как уже говорилось, база данных, назовем ее billing, состоит из четырех таблиц:

- Users – информация о пользователе;

- Traffic – информация о проходящем через роутер трафике;
- Money – информация о поступивших взносах от пользователей;
- Rejects – информация о всех попытках, которые отброшены по той или иной причине.

Очевидно, что самой большой таблицей в базе данных является Traffic, у MySQL есть ограничение на размер таблицы, в версии 3.22 имеет предел по размеру 4 Гб. В MySQL версии 3.23, где используется новый тип таблиц, максимальный размер таблицы доведен до 8 миллионов терабайтов (2^{63} bytes).

Доступ к MySQL осуществляется на языке C и Perl, так как сама биллинговая система написана на C, а web интерфейс на языке Perl. У СУБД MySQL идет поддержка большинства операционных систем (так как проект MySQL – является «open source»). В дальнейшем, естественно, будет рассмотрено программирование под Unix.

Рассмотрим, как писать программы на языке C, взаимодействующие с сервером MySQL. При работе с клиентской библиотекой MySQL необходимо включить в программу файл mysql.h, а затем подключить файл библиотеке на этапе компоновки программы.

Листинг 1

```
#include <stdio.h>
# include <mysql/mysql.h>
int main (int argc, char *argv[])
{
MYSQL mysql;
MYSQL_RES *result;
MYSQL_ROW row;
uint num_fields, i;
ulong *lengths;
if (!mysql_init(&mysql))
{
printf (“Невозможно инициализировать структуру !);
exit();
}
if (!mysql_real_connect(&mysql, “localhost”,
“kursuser”, “mypassword”, “billing”, 0, NULL,0))
{
printf (“%d: %s”, mysql_errno(&mysql),
mysql_errno(&mysql));
exit();
}
if (mysql_query(&mysql, “SELECT username, ip
FROM users ORDER BY 1,2”)){
```

```
printf ("%d: %s", mysql_errno(&mysql),
mysql_errno(&mysql));
}
else
{
result = mysql_store_result(&mysql);
num_fields = mysql_num_fields(result);
while (row = mysql_fetch_row(result))
{
length = mysql_fetch_length(result);
for (i=0;i < num_fields;i++)
{
printf ("%.*s", (int) length[i], row[i] ? row[i] : "NULL")
}
printf ("\n");
}
mysql_free_result (result) ;
}
mysql_close(&mysql);
}
```

1.4. Написание программы

За основу написания программы была взята программа `tcpdump`, а точнее, использовалась библиотека `pcap` (Packet Capture library), которая, в свою очередь, основана на `bpf` (Berkley Packet Filter).

Для понимания гибкости и функциональных возможностей `pcap` приведем простейший пример с пояснениями.

Листинг 2

```
#include <pcap.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <errno.h>
#include <sys/socket.h>
#include <netinet/in.h>
#include <arpa/inet.h>
#include <netinet/if_ether.h>
// Вызывается каждый раз, когда получен пакет
void analyze (u_char *useless,const struct pcap_pkthdr* pkthdr,const u_char*
packet)
{
static int count = 1;
fprintf(stdout,"Пришел пакет - %d, ",count);
```

```
if(count == 7)
fprintf(stdout, "Конец эксперимента!! ");
fflush(stdout);
count++;
}
int main(int argc, char **argv)
{
int i;
char *dev;
char errbuf[PCAP_ERRBUF_SIZE];
pcap_t* descr;
const u_char *packet;
struct pcap_pkthdr hdr; // pcap.h
struct ether_header *eptr; // net/ethernet.h
if(argc != 2)
{
fprintf(stdout, "Используйте: %s количество пакетов \n", argv[0]);
return 0;
}
// какой интерфейс использовать
dev = pcap_lookupdev(errbuf);
if(dev == NULL)
{
printf("%s\n", errbuf);
exit(1);
}
// открывает для чтения
descr = pcap_open_live(dev, BUFSIZ, 0, -1, errbuf);
if(descr == NULL)
{
printf("pcap_open_live(): %s\n", errbuf);
exit(1);
}
pcap_loop(descr, atoi(argv[1]), analyze, NULL);
fprintf(stdout, "\nУстановленное число пакетов принято!\n");
return 0;
}
```

1.5. Web-интерфейс и написание программы

При проектировании биллинговой системы еще ни разу не говорилось об удобстве пользователя. Пользователь должен в любой момент знать, сколько трафика у него осталось, сколько он уже использовал. Естественно, что пользователь должен иметь доступ к СУБД. Был выбран Web-интерфейс, так как у него есть ряд преимуществ:

- нет необходимости в написании множества клиентов для разных операционных систем (вариант с Java не рассматриваем в связи с медлительностью приложений, написанных на нем);
- у пользователя должен быть только web-браузер, который существует во всех современных операционных системах, что придает гибкость системе;
- нет необходимости в установке клиентской части, что достаточно большой плюс для начинающих пользователей.

Первое, что нужно сделать для поставленной задачи, – выбрать web-сервера. Web-серверы, бесспорно, являются самыми известными в мире сервисами системы Unix. Существует много других установленных сервисов, но ни один из них не известен так, как web-сервер (или HTTP-сервер). В качестве Web-сервера был выбран Apache, так как он зарекомендовал себя с наилучшей стороны.

Некоторые Web-серверы содержат встроенный интерпретатор Perl, что позволяет генерировать документы на Perl без запуска нового процесса. Системные издержки на чтение не изменившейся страницы пренебрежимо малы для страниц с редкими обращениями (даже порядка нескольких обращений в секунду). Однако вызовы CGI существенно замедляют компьютер, на котором работает Web-сервер.

Приведем простейший сценарий для проверки пользователем своего баланса. Большая часть скрипта должна быть уже понятна (простой доступ к базе данных).

Листинг 3

```
#!/usr/bin/perl
use DBI;
use CGI qw (:standart : html3);
$name = param ("Name");
# использование модуля CGI делает разработку программы более удобной.
print header(),
start_html ("Limit Query"),
start_form(),
p("Введите имя пользователя", textfield ("Name")),
submit(),
end_form();
if (defined $name)
{
$dbh = DBI->connect ("DBI:mysql:billing:localhost:3306","root","mypassword");
or die "Connecting: $DBI::errstr";
$sth=$dbh->prepare ("SELECT username, limit FROM users WHERE
username = $name")
or die "Preparing: ", $dbh->errstr;
$sth->execute
```

```
or die "Executing: ", $sth->errstr;
print h1("Результат запроса"), "<TABLE BORDER =1>";
while (@row = $sth->fetchrow())
{
print Tr( td(\@row));
}
print "</TABLE> \n";
$sth->finish;
$dbh->disconnect;
}
print end_html();
```

2. Результаты

В результате получилась достаточно стабильная система, которая проверялась на следующем оборудовании в течение нескольких месяцев: Celeron-1000/256Mb/20Gb, с пропускной способностью канала 115.5 Кб/с, на 15 машин. Средняя нагрузка на канал — 4-5 Гб в месяц.

2.1. Примеры использования

Данная система применялась в компании «Компас-М» и в домашней локальной сети по улице Масленникова 45.

2.2. Перспективы развития

Данную систему можно серьезно улучшить как в управлении, так и в установке. Перспективы развития описаны в нескольких пунктах:

- изменение структуры базы данных, добавление возможности зон (например, местный трафик дешевле и тому подобное);
- улучшение web-интерфейса;
- добавление возможности конфигурационного файла;
- возможно построение e-mail рассылки пользователям (например, каждую неделю посылать в письме, сколько трафика у них осталась, или же если лимит стал равным критическому, то посылать письмо и администратору и пользователю);
- написание порта для ОС FreeBSD.

Полученный опыт и отдельные части программы могут использоваться в других задачах, таких, как:

- поиск злоумышленника внутри компании, использующего доступ в Интернет не для работы;

- обнаружение всевозможных атак, с помощью скриптов существует возможность блокирования злоумышленника;
- любые задачи, связанные с анализом сетевого трафика.

3. Заключение

Стабильная, надежная, безопасная биллинговая система является необходимым условием для успешной работы провайдинговых компаний. Разработанная система удовлетворяет основным требованиям, которые поставил заказчик. Можно выделить следующие плюсы данного проекта:

- не требует денежных затрат;
- не использовались коммерческие программы, что делает систему в какой-то мере независимой;
- возможно детальное протоколирование пакетов;
- гибкость системы;
- стабильность гарантируется операционной системы FreeBSD (у автора сервер на базе этой операционной системы пробыл без перезагрузки более пяти месяцев, что не является рекордом, перезагрузка осуществилась из-за долгосрочного отключения электричества);
- сложность в воровстве трафика у пользователя достигается за счет использования Radius-сервера, VPN-технологии (не рассматривается случай, когда пользователь сам выдаст пароль по собственной невнимательности);
- простота в настройке пользовательского компьютера.

В результате проведенной работы сформировалась биллинговая система, которая, к сожалению, неприменима в коммерческих целях из-за законодательства Российской Федерации, разрешающего использовать только сертифицированные биллинговые системы. В начале работы данный факт не был известен ни автору, ни заказчику. В итоге возможна сертификация данной системы, но существует большая проблема – деньги, которые нужно отдать за сертификацию. К сожалению, одному заказчику заниматься этим просто невыгодно, легче купить сертифицированный продукт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристиансен Т., Торкингтон. Perl библиотека программиста. СПб.: Питер, 2001.
2. Аткинсон Т. MySQL. М.: Издательский дом «Тильямс», 2002.
3. Руководство FreeBSD. – <http://www.freebsd.org.ua/handbook/p42.html>

4. Manpage IPFW. – <http://www.opennet.ru/docs/RUS/ipfw/ipfw.html>
5. An Analysis of the RADIUS Authentication Protocol.
– <http://www.untruth.org/josh/security/radius/radius-auth.html>
6. MySQL Manual. – <http://www.mysql.com/doc/ru/index.html>
7. Making a Connection with tcpdump.
– <http://www.linuxjournal.com/article.php?sid=6446&mode=thread&order=0>
8. Manpage of PCAP. – http://www.tcpdump.org/pcap3_man.html
9. Programming with pcap. – <http://www.tcpdump.org/pcap.htm>
10. Packet Capture With libpcap and other Low Level Network Tricks.
– <http://www.cet.nau.edu/~mc8/Socket/Tutorials/section1.html>

МИНИМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ МАКСИМУМОВ

А.Г. Гринь

In this article suggests a minimal in a certain sense conditions of weak dependence, which provided convergence of distributions of maximum random variables to a nondegenerate limit laws.

В статье [1] введено минимальное в некотором смысле условие слабой зависимости для стационарных последовательностей, обеспечивающее выполнение центральной предельной теоремы. В настоящей работе получено аналогичное минимальное условие слабой зависимости, при котором существует невырожденное предельное распределение для максимума n первых членов стационарной последовательности.

Пусть $\{\xi_n\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $X_n = \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$, $F_n(x) = \mathbf{P}\{X_n < x\}$. Пусть $F_n \Rightarrow F$ означает, что $\{F_n\}$ слабо сходится к F . Следуя [3], назовем $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ , если $a_{[x]}$, $x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ , где $[x]$ – целая часть x .

Если $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных величин, $F_1(x) < 1$, $x > 0$, то для того, чтобы при некотором выборе нормирующих констант a_n имело место соотношение $F_n(xa_n) \Rightarrow F_\xi(x)$, $n \rightarrow \infty$, где ξ – невырожденная случайная величина, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\}$ являлась правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$, $\rho > 0$. При этом предельное распределение имеет вид $F_\xi(x) = G_\rho(x) = \exp\{-cx^{-\rho}\}$, $x > 0$, $c > 0$, а нормирующие постоянные a_n можно найти из соотношения $n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq a_n\} \rightarrow c$, $n \rightarrow \infty$. [4, с. 319]. Такая последовательность $\{a_n\}$ существует и является правильно меняющейся порядка $1/\rho$ [3, с. 29].

Как и в [1], символ $n + m \rightarrow \infty$ в каком-либо соотношении будет означать, что указанное соотношение выполняется при $n \rightarrow \infty$ и при любой последовательности натуральных чисел $m = m(n)$.

Copyright © 2006 А.Г. Гринь.

Омский государственный университет.

E-mail: grin@math.omsu.omskreg.ru

Работа поддержана грантом РФФИ 06–01–00127.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ – стационарная последовательность, у которой $\mathbf{P}\{\xi_1 \geq x\}$ является правильно меняющейся функцией порядка $-\rho$, $\rho > 0$ и пусть $\{a_n\}$ таковы, что $n\mathbf{P}\{\xi_1 \geq a_n\} \rightarrow c$, $c > 0$, $n \rightarrow \infty$. Для того, чтобы $F_n(xa_n) \Rightarrow G_\rho(x)$, $n \rightarrow \infty$, $x > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие утверждения:

а)

$$F_{n+m}(xa_{n+m}) - F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m}) \rightarrow 0, \quad n + m \rightarrow \infty; \quad (\text{R}_1)$$

б) при любом $x > 0$ и при любой достаточно медленно растущей последовательности $k = k(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} \sim n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{R}_2)$$

■

Замечание 1. Теорему 1 можно интерпретировать так: условия (R₁) и (R₂) являются минимальными условиями слабой зависимости, при которых выполняются предельные теоремы для максимумов с той же нормировкой, что и в предельных теоремах для независимых величин.

Приведем достаточные условия для выполнения (R₁) и (R₂) в терминах «традиционных» условий слабой зависимости.

Пусть $\mathcal{F}_{\leq n}$ и $\mathcal{F}_{\geq n}$ – σ -алгебры, порожденные семействами $\{\xi_i : i \leq n\}$ и $\{\xi_i : i \geq n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания, если

$$\alpha(n) = \sup_{A \in \mathcal{F}_{\leq 0}, B \in \mathcal{F}_{\geq n}} |\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Замечание 2. Если последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию сильного перемешивания, то выполнено условие (R₁). Действительно, пусть Y_n и Z_n – последовательности случайных величин и $Z_n \rightarrow 0$ по вероятности. Тогда при $x > 0$

$$0 \leq \mathbf{P}\{Y_n < x\} - \mathbf{P}\{\max\{Y_n, Z_n\} < x\} \leq \mathbf{P}\{Z_n \geq x\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Пусть, скажем, K и N - множества натуральных чисел, содержащие k и n элементов соответственно и пусть $k = o(n)$. Так как $\mathbf{P}\{\xi_1 > x\}$ – правильно меняющаяся функция порядка $-\rho$, то

$$n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_n\} \sim \frac{c\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_n\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 > a_n\}} \rightarrow cx^{-\rho}, \quad (2)$$

так что

$$\mathbf{P}\{\max_{i \in K} \xi_i > x\} \leq k\mathbf{P}\{\xi_1 \geq xa_n\} \sim \frac{ck}{nx^\rho} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и в силу (1)

$$\mathbf{P}\{\max_{i \in N \cup K} \xi_i \geq xa_n\} - \mathbf{P}\{\max_{i \in N} \xi_i \geq xa_n\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

С помощью (3) и определения условия сильного перемешивания получаем

$$\begin{aligned} F_{n+m}(xa_{n+m}) &= \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq n+m} \xi_i < xa_{n+m}\right\} = \\ &= \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i < xa_{n+m}, \max_{n+k \leq j \leq n+m+k} \xi_j < xa_{n+m}\right\} + o_n(1) = \\ &= \mathbf{P}\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i < xa_{n+m}\right\} \mathbf{P}\left\{\max_{n+k \leq j \leq n+m+k} \xi_j < xa_{n+m}\right\} + o_n(1) + \alpha(k) = \\ &= F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m}) + o_n(1). \end{aligned}$$

Замечание 3. Если для некоторой функции $\lambda(x) > 0$ такой, что $\lambda(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$

$$\sup \left\{ \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\lambda(\mathbf{P}(B))} : A \in \mathcal{F}_{\geq 1}, B \in \mathcal{F}_{\leq 0} \right\} \leq 1,$$

то говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию λ -перемешивания* (см. [5]).

Если последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию λ -перемешивания, то в условиях теоремы 1 имеет место (R₂)

Действительно,

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n \{\xi_i > xa_{kn}\}\right\} \leq n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\}. \quad (4)$$

Далее, обозначив $A_i = \{\xi_i > xa_{kn}\}$, с помощью условия λ -перемешивания получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{i-1}A_i\} = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{P}\{A_i\} - \mathbf{P}\left\{A_i \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right\} \right) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{P}\{A_i\} - \mathbf{P}\{A_i\} \lambda \left(\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right\}\right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Если $k = k(n) \rightarrow \infty$ достаточно медленно, то в силу (2)

$$\mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right\} \leq n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\} \sim \frac{1}{kx^\rho} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и из последнего соотношения, (4) и (5) следует (R₂).

Замечание 4. Обозначим

$$\alpha_{r,s}(n) = \sup \left\{ \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}^r(A)\mathbf{P}^s(B)} : A \in \mathcal{F}_{\leq 0}, B \in \mathcal{F}_{\geq n}, \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0 \right\}.$$

(см. [6]). Если $\beta = r + s > 1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{r,s}(n) < \infty$, то в условиях теоремы 1 имеет место (R₂).

В обозначениях замечания 3

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} \geq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbf{P}\{A_i A_j\}. \quad (6)$$

Так как $\mathbf{P}\{A_1\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \geq xa_{kn}\} \rightarrow 0$, $n \rightarrow 0$ и $\beta > 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mathbf{P}\{A_i A_j\} &\leq 2\mathbf{P}^\beta\{A_1\} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{r,s}(j-i) = 2\mathbf{P}^\beta\{A_1\} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\alpha_{r,s}(k) \leq \\ &\leq 2n\mathbf{P}^\beta\{A_1\} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{r,s}(k) = o(n\mathbf{P}\{A_1\}). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (4), (6) и (7) следует (R₂).

Лемма 1. Последовательность $\{a_n^\rho\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1 (а a_n – правильно меняющейся последовательностью порядка $1/\rho$, $\rho > 0$) тогда и только тогда, когда

$$a_{n+m}^\rho \sim a_n^\rho + a_m^\rho, \quad n + m \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Доказательство, по существу, повторяет доказательство леммы 1 в [1].

Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть $F_n(xa_n) \Rightarrow G_\rho(x)$, $n \rightarrow \infty$. Функция $G_\rho(x)$ непрерывна при $x > 0$, поэтому слабая сходимость равносильна поточечной: $F_n(xa_n) \rightarrow G_\rho(x)$, $x > 0$. Пусть $m = m(n)$ – произвольная последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$\Delta(n) = |F_{n+m}(xa_{n+m}) - F_n(xa_{n+m})F_m(xa_{n+m})|.$$

Поскольку a_n^ρ – правильно меняющаяся последовательность порядка 1, то в силу леммы 1

$$a_{n+m}^\rho \sim a_n^\rho + a_m^\rho, \quad n \rightarrow \infty,$$

так что для любой последовательности натуральных чисел $\{n_1\}$ существуют $0 \leq a \leq 1$ и подпоследовательность $\{n_2\} \subseteq \{n_1\}$ такая, что

$$a_{n_2+m_2}^{-\rho} a_{n_2}^\rho \rightarrow a, \quad a_{n_2+m_2}^{-\rho} a_{m_2}^\rho \rightarrow 1-a, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $m_2 = m(n_2)$. Пусть сначала $0 < a < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta(n_2) &= \left| F_{n_2+m_2}(xa_{n_2+m_2}) - F_{n_2} \left(xa_{n_2} \frac{a_{n_2+m_2}}{a_{n_2}} \right) F_{m_2} \left(xa_{m_2} \frac{a_{n_2+m_2}}{a_{m_2}} \right) \right| \rightarrow \\ &\rightarrow \left| G_\rho(x) - G_\rho \left(xa^{-\frac{1}{\rho}} \right) G_\rho \left(x(1-a)^{-\frac{1}{\rho}} \right) \right| = \\ &= \left| \exp \{-cx^{-\rho}\} - \exp \{-acx^{-\rho}\} \exp \{-(1-a)cx^{-\rho}\} \right| = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Если же $a = 0$ ($a = 1$), то при $n \rightarrow \infty$ $a_{n_2+m_2}^{-1} X_{n_2} \rightarrow 0$ ($a_{n_2+m_2}^{-1} X_{m_2} \rightarrow 0$) по вероятности, следовательно, при $x > 0$ $F_{n_2}(xa_{n_2+m_2}) \rightarrow 1$ ($F_{m_2}(xa_{n_2+m_2}) \rightarrow 1$), а с помощью (1) легко выводится, что

$|F_{n_2+m_2}(xa_{n_2+m_2}) - F_{m_2}(xa_{n_2+m_2})| \rightarrow 0$ ($|F_{n_2+m_2}(xa_{n_2+m_2}) - F_{n_2}(xa_{n_2+m_2})| \rightarrow 0$), то есть $\Delta(n_2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Вместе с (8) это означает, что из любой последовательности $\{\Delta(n_1)\}$ можно выделить сходящуюся к нулю подпоследовательность. Следовательно, $\Delta(n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и мы показали, что выполнено условие (R₁).

Докажем (R₂). Если $k = k(n) \rightarrow \infty$ растет достаточно медленно, то в силу (2)

$$n\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_{kn}\} \sim \frac{c}{kx^\rho}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Так как $a_{kn}^\rho \sim ka_n^\rho$ ($\{a_n^\rho\}$ - правильно меняющаяся последовательность порядка 1), то по предположению

$$\mathbf{P}\{X_n > xa_{kn}\} = 1 - F_n(xa_{kn}) = 1 - \exp\left\{-\frac{c}{kx^\rho}\right\} + o_n(1) = \frac{c}{kx^\rho} + o_n(1) + o_k(1),$$

что вместе с (9) дает нам условие (R₂).

Достаточность.

Пусть выполнены условия (R₁) и (R₂), $k = k(n) \rightarrow \infty$, $n = km+r$, $0 \leq r < m$. С помощью (3) и условия (R₁) при k , растущем достаточно медленно, получаем

$$F_n(xa_n) = F_m^k(xa_n) + o_n(1) = (1 - \mathbf{P}\{X_m > xa_n\})^k + o_n(1). \quad (10)$$

Из условия (R₁) и (2) следует

$$\mathbf{P}\{X_m > xa_n\} \sim m\mathbf{P}\{\xi_1 > xa_n\} \sim \frac{mc}{nx^\rho} \sim \frac{c}{kx^\rho}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) выводим

$$F_n(xa_n) = \left(1 - \frac{c}{kx^\rho} + o_n(1)\right)^k + o_n(1) \rightarrow \exp\{-cx^{-\rho}\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринь А.Г. О минимальном условии слабой зависимости в центральной предельной теореме для стационарных последовательностей // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т.47, N.3. С.554-558.
2. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
3. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1984.
5. Гринь А.Г. Области притяжения для последовательностей с перемешиванием // Сибирский математический журнал. 1990. Т.31, N.1. С.53-63.
6. Bradley R. Basic properties of strong mixing conditions // In: Dependence in Probability and Statistics (Ser. Progress in Probability and Statistics. V.11). Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser. 1986. P.165-192.

МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ НЕФОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

П.С. Гладкий

A simple model of social interaction based on Luhmann theory is proposed. Emerging of informal social subgroups is considered. Hypotheses about behavior of model characteristics are formed.

1. Общество как система коммуникаций

Никлас Луман предлагает рассматривать общество как оперативно замкнутую, аутопойетическую систему коммуникаций [3]. «Аутопойетические системы – это такие системы, которые производят не только свои структуры, но и свои элементы в сети именно этих элементов» [3, с.68]. Элементы являются единицами применения для производства последующих элементов.

Понятие системы в трактовке Лумана тесно связано с понятием формы Г. Спенсера Брауна. Форма является различием собственных сторон, в случае систем – различием системы и окружающей среды. В ходе аутопойезиса система постоянно воспроизводит свою форму, различая себя и окружающую среду.

Система производит определённые операции, в том числе и операции по воспроизводству собственных компонент. Оперативная замкнутость системы означает, что операции непосредственно не затрагивают окружающей среды системы. Это не говорит о том, что система является закрытой для материи и информации. Границы системы проницаемы также и для казуальных отношений: последствия операций системы могут быть ощутимы для среды и наоборот. Посредством структурных сопряжений в систему вводятся очаги самораздражения. Они делают возможным адекватную реакцию системы на состояние окружающей среды.

Аутопойетической операцией общества является коммуникация. Она же полагается единственным типом элементов системы общества. Коммуникации, происходящие в обществе, приводят к возникновению других коммуникаций.

Коммуникация подразумевает наличие участников, которые, однако, в систему коммуникаций (т.е. общество) не входят. Их влияние на коммуникации

как на элементы оперативно замкнутой системы обусловлено структурными сопряжениями, к которым относят язык. Коммуникация является направленной, то есть происходит от одного субъекта к другому. Субъект-источник коммуникации именуется как *alter*, приемник – *ego* [2]. Важно отметить, что сознание субъекта само является оперативно замкнутой аутопойетической системой.

Коммуникация представляет собой единство информации, сообщения и понимания. Под информацией понимается различие, производящее различие. Сообщение фиксирует контекст коммуникации. Понимание субъектом коммуникации создает предпосылки для новой коммуникации, в случае принятия данной, присоединяющейся к ней. Принимающий коммуникацию субъект *ego* различает (понимает) как передаваемую в коммуникативном акте информацию, так и мотивы субъекта *alter* к осуществлению коммуникации. Если этого различения не происходит, то имеет место восприятие, не являющееся коммуникацией.

2. Описание модели

2.1. Структура модели

Рассматривается множество субъектов коммуникации $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Каждому субъекту i приписывается идентичность $Id_i \in [0, 1]$, являющаяся кумулятивной характеристикой субъекта. Чем ближе идентичности двух субъектов, тем больше они похожи друг на друга (например, чертами характера, образованием, интересами, профессиональными навыками и т.д.). Восприятие субъектами других субъектов зависит от множества факторов и, вообще говоря, несколько отличается от объективной ситуации. Субъекты принимают решения к коммуникации на основе своих представлений об идентичностях других, которые формируются в ходе общения. Для хранения этих представлений используется матрица идентичностей $Id = \{Id_{ij} \in [0, 1] | i, j \in S\}$. Элемент матрицы Id_{ij} является идентичностью субъекта j с точки зрения субъекта i . Диагональные элементы содержат собственные идентичности субъектов $Id_{ii} = Id_i$.

Время в модели полагается дискретным. На каждом шаге времени происходит пересчет матрицы идентичностей Id . Диагональные элементы матрицы идентичностей со временем не меняются.

Объективным расстоянием между субъектами полагается следующая функция:

$$d_o(i, j) = |Id_i - Id_j|.$$

В силу свойств модуля эта функция задает метрику на множестве субъектов S .

Вводится также i -субъективное расстояние между субъектами:

$$d_i(k, l) = |Id_{ik} - Id_{il}|.$$

В силу свойств модуля эта функция тоже задает метрику на множестве субъектов S . Она может интерпретироваться как расстояние между субъектами с позиции некоторого субъекта-наблюдателя.

В ходе развития модели субъекты осуществляют коммуникации друг с другом. Каждый субъект на протяжении одного шага модели может быть занят не более, чем в одной коммуникации. Важно заметить, что коммуникация в смысле модели отличается от коммуникации в смысле Лумана. Последняя понимается как атомарная (то есть неразделимая на другие коммуникации) операция системы общества, которая может подсоединяться к другим коммуникациям и тем самым образовывать во времени цепочки коммуникаций между двумя субъектами (например, беседы). Однако не вызывает сомнения факт, что такие цепочки всегда конечны. Поэтому коммуникации в модели считаются такими цепочками некоторой конечной длины. Они передают в обе стороны некоторую информацию, в том числе и относительно идентичности собеседников, и требуют для своего существования понимания обоих субъектов. Далее термин «коммуникация», если не будет указано обратное, понимается именно в смысле модели.

Коммуникация между субъектами происходит на основании их идентичностей. Конкретный субъект инициирует коммуникацию с субъектом с близкой идентичностью с большей вероятностью, чем с субъектом, чья идентичность дальше. При этом, как было сказано выше, субъекты оперируют своими представлениями об идентичностях других, отраженными в строках матрицы идентичностей Id . Вступая в коммуникации, субъекты корректируют свои представления друг о друге на основании результатов своего состоявшегося общения. По различным причинам субъекты все равно усваивают несколько искаженные представления друг о друге. Здесь сказываются как оперативная замкнутость индивидуальных сознаний как аутопойэтических систем, так и, например, сознательное желание субъектов произвести необходимое впечатление [1].

2.2. Динамика модели

При инициализации модели задаются значения матрицы Id : диагональные элементы заполняются случайными значениями, а элементы строк полагаются равными соответствующим диагональным элементам.

Итерация модели включает в себя два этапа: определение коммуницирующих пар и пересчет матрицы идентичностей.

На первом этапе выбираются пары коммуницирующих субъектов, для чего строится множество коммуникаций субъектов.

Определение 1. Множество $d = \{i, j\}$, где $i, j \in S$ называется коммуникацией субъектов i и j .

Замечание 1. Коммуникация субъектов d не является упорядоченной парой.

Определение 2. Множество коммуникаций – конечное множество коммуникаций субъектов $D = \{d_k\}$.

Построение множества коммуникаций выполняется следующим образом. Для каждого незанятого в коммуникации субъекта на основании содержимого

матрицы Id выбирается партнер (собеседник). Для этого на множестве возможных партнеров по коммуникации определяется распределение, согласно которому осуществляется выбор актуального партнера. Вероятность коммуникации субъекта i с субъектом j определяется следующим образом:

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \vee \exists d_k \in D : j \in d_k \\ \frac{1}{\tilde{C}} f_p(d_i(i, j)), & \text{иначе} \end{cases}, \quad (1)$$

где $f_p()$ – некоторая неотрицательная, монотонно убывающая на отрезке $[0, 1]$ функция; \tilde{C} – нормирующая константа, такая, что:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{p}_{ij} = 1.$$

Таким образом, выбор в качестве партнера по коммуникации самого себя или уже занятого в другой коммуникации субъекта является невозможным событием. Это означает, что для любого субъекта из S либо существует единственная коммуникация с его участием, либо он ни в какой коммуникации не участвует.

На основании распределения (1) для субъекта i выбирается партнер j , формируется коммуникация $d = \{i, j\}$ и добавляется в множество D . Определение участников коммуникаций продолжается до тех пор, пока имеется достаточное множество нераспределенных субъектов.

Второй этап заключается в пересчете матрицы идентичностей Id , который происходит следующим образом. Последовательно просматривается множество коммуникаций D . Пусть очередная коммуникация из D имеет вид $d_k = \{i, j\}$. Тогда матрица идентичностей будет обновлена следующим образом:

$$Id'_{ij} = \alpha_i Id_{ij} + (1 - \alpha_i) Id_j^r, \quad (2)$$

где Id'_{ij} – новое значение элемента матрицы, α_i – некоторый коэффициент, Id_j^r – идентичность, сообщенная субъектом j в ходе коммуникации (сообщенная идентичность). Вычисление элемента Id_{ji} производится согласно (2) с соответствующей заменой индексов.

Коэффициент $\alpha_i \in [0, 1]$ определяет приоритетную компоненту восприятия субъектом i идентичности субъекта j : при $\alpha_i = 1$ субъект не учитывает передаваемой идентичности («не хочет сомневаться в своих оценках»), при $\alpha_i = 0$ субъект полностью отбрасывает свои прошлые представления и воспринимает другого субъекта так, как тот проявляется в коммуникации.

Сообщенная идентичность Id_j^r субъекта j выбирается случайным образом на отрезке $[\max(Id_j - \epsilon, 0), \min(Id_j + \epsilon, 1)]$. Распределение сообщаемой идентичности обозначается $p_j(x)$. В настоящей модели используется равномерное распределение $p_j(x) = \frac{1}{2\epsilon}$.

Заметим, что $Id'_{ij} \leq 1$. Поскольку $Id_{ij} \leq 1$ и $Id_j^r \leq 1$, то

$$Id'_{ij} = \alpha_i Id_{ij} + (1 - \alpha_i) Id_j^r \leq \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Таким образом, новое значение Id'_{ij} не противоречит определению матрицы идентичностей Id .

Таким образом, предложенная модель параметризуется следующим набором: $(n, \alpha, \epsilon, f_p(x))$.

3. Анализ модели

Основным носителем информации в данной модели является матрица идентичностей Id . Целесообразно ввести ряд величин, вычисляемых на основании матрицы идентичностей Id , которые помогут в интерпретации результатов.

3.1. Предпочтительные коммуникации и определенность субъекта

Во время итераций модели субъекты выбирают себе партнеров случайным образом, основываясь на матрице идентичностей Id . Для выяснения вероятности выбора того или иного партнера на конкретной итерации модели рассматривается произвольный субъект i в ситуации, когда другие субъекты еще не определились, с кем будут коммуницировать ($D = \emptyset$). Тогда на множестве субъектов S вводится распределение вероятностей, аналогичное (1). Поскольку субъекты еще не участвуют в коммуникациях, формула для p_{ij} имеет следующий вид:

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j \\ \frac{1}{C} f_p(d_i(i, j)), & i \neq j \end{cases}, \quad (3)$$

где C выбирается из условия нормировки:

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

Чем больше вероятность p_{ij} , тем для субъекта i предпочтительнее коммуникация с субъектом j . При этом субъект i может иметь различные по количеству и качеству предпочтения. Для оценки предпочтений субъекта i удобно воспользоваться величиной энтропии множества вероятностей $\{p_{ij} | j \in S \setminus \{i\}\}$ [5] следующим образом:

$$c_i = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{ij} \log_{n-1} p_{ij}.$$

В качестве характеристики всей модели определенность усредняется по всем субъектам:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i.$$

3.2. Чистота восприятия

Чистота восприятия является характеристикой, позволяющей оценить адекватность восприятия субъектом идентичностей других субъектов. Она вычисляется следующим образом:

$$Clarity_i = 1 - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n |Id_{ij} - Id_{jj}|.$$

Максимальное значение характеристики $Clarity_i = 1$ означает объективную осведомленность субъекта i относительно идентичностей остальных субъектов.

Как и в случае с определенностью, чистота восприятия всей модели может быть вычислена как среднее арифметическое чистот восприятия субъектов:

$$Clarity = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Clarity_i.$$

3.3. Выделение подгрупп

В ходе развития модели у субъектов появляются определенные предпочтения в коммуникациях. На основании этих предпочтений возможно выделение совокупностей субъектов, вступающих в коммуникации друг с другом с той или иной интенсивностью. Взаимоотношения отдельных субъектов и совокупностей субъектов могут быть оценены с помощью предпочтений (3).

Отношение субъекта к совокупности может быть оценено параметром лояльности.

Определение 3. Лояльностью субъекта i совокупности A называется величина

$$l(i, A) = \sum_{j \in A} p_{ij}.$$

Лояльность численно равна вероятности выбора субъектом i своим партнером по коммуникации какого-нибудь члена совокупности A . Чем больше эта величина, тем вероятнее субъект i коммуницирует с членами группы A .

Из (3) следует, что если $i \in G$, то $l(i, A) = l(i, A \setminus \{i\})$. Это верно, поскольку при $i \in A$ сумма в правой части определения лояльности содержит слагаемое p_{ii} , которое равно нулю в силу (3).

Лояльность субъекта описывает только одно направление взаимоотношений субъекта и совокупности субъектов. По аналогии можно оценить и обратное отношение совокупности субъектов к субъекту как среднее лояльностей субъектов совокупности одноэлементной совокупности, состоящей из данного субъекта.

Определение 4. Потребностью совокупности A в субъекте i называется величина

$$n(A, i) = \frac{1}{|A|} \sum_{j \in A} l(j, \{i\}).$$

Легко видеть, что

$$n(A, i) = \frac{1}{|A|} \sum_{j \in A} p_{ji}.$$

Совокупности состоят из субъектов, которые каждый по-своему относятся к другим группам. Можно говорить о некотором отношении одной совокупности к другой как о некотором суммарном отношении составляющих ее субъектов к субъектам второй совокупности.

Определение 5. Отношением совокупности A_1 к совокупности A_2 называется величина

$$r(A_1, A_2) = \frac{1}{|A_1|} \sum_{i \in A_1} l(i, A_2) = l(A_1, A_2) = n(A_1, A_2).$$

Отношение совокупностей является средней лояльностей членов совокупности A_1 совокупности A_2 . Легко показать, что эта величина также является суммой потребностей совокупности A_1 в членах совокупности A_2 .

Определение 6. Совокупность субъектов A называется группой, если выполнено

$$\forall i \in A \ l(i, A) \geq l(i, S \setminus A). \quad (4)$$

Группа как совокупность субъектов в некотором смысле «замкнута», т.е. любой субъект группы с большей вероятностью вступит в коммуникацию с другим субъектом этой же группы, чем с кем-нибудь за ее пределами. Не всякая совокупность субъектов удовлетворяет свойству (4).

Нетрудно заметить, что в силу (3)

$$l(i, A) + l(i, S \setminus A) = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} = \sum_{j \in S} p_{ij} = 1.$$

Пользуясь этим соотношением, легко переписать условие (4) следующим образом:

$$\forall i \in A \ l(i, A) \geq 1/2.$$

Множество групп для множества субъектов S обозначается $G(S)$. На этом множестве вводится частичный порядок, определяемый следующим образом:

$$x \prec y \Leftrightarrow x \subset y.$$

Множество $G(S)$ имеет один наибольший элемент S (в силу того, что $l(i, S) = 1$) и непустое множество минимальных элементов $\min G(S)$. Не все элементы множества $G(S)$ сравнимы между собой. Более того, не исключена ситуация

$$\exists g_1, g_2, g_3 \in G(S) : (g_1 \prec g_2) \& (g_1 \prec g_3) \& (g_2 \neq g_3).$$

Численные статистические характеристики групп определяются следующим образом.

Определение 7. Средней идентичностью группы \overline{Id}_G называется среднее арифметическое идентичностей входящих в нее субъектов:

$$\overline{Id}_G = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} Id_i.$$

Определение 8. Групповой дисперсией идентичности называется среднее арифметическое квадратов отклонений идентичностей субъектов группы от средней идентичности группы

$$D_G(Id) = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} (Id_i - \overline{Id}_G)^2.$$

Определение 9. Средней лояльностью группы $\bar{l}(G)$ называется среднее арифметическое лояльностей субъектов данной группы:

$$\bar{l}(A) = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} l(i, G).$$

Определение 10. Групповой дисперсией лояльности группы называется среднее арифметическое квадратов отклонений лояльностей субъектов группы от средней лояльности группы:

$$D_G(l) = \frac{1}{|G|} \sum_{i \in G} (l(i, G) - \bar{l}(G))^2.$$

Более детальное изучение возникающих структур выходит за рамки данной статьи и будет предпринято в дальнейших публикациях. Некоторые результаты приведены в 4.2.

4. Анализ результатов

На основании приведенных ниже результатов формулируется ряд гипотез, касающихся поведения характеристик модели и структур возникающих групп.

Для получения данных были произведены три серии экспериментов, каждая из которых состояла из 10 запусков модели по 200 итераций в каждом. Для всех моделей одинаково определены следующие параметры: $n = 10$, $\alpha = 0,5$, $\epsilon = 0,001$. Для моделей первой серии положено $f_p(x) = 1 - x$, для второй серии $f_p(x) = e^{-1}$, для третьей серии $f_p(x) = e^{-10x}$.

4.1. Характеристики модели

На рисунках 1 и 2 представлены графики поведения соответствующих величин, осредненных по запускам в серии. Графики демонстрируют постепенный рост как определенности субъектов, так и чистоты их восприятия. В качестве гипотезы можно принять, что такое качественное поведение характеристик не зависит от параметров модели. Пределы насыщения и скорость их достижения уже зависят от параметров модели, в частности от выпуклости функции $f_p(x)$.

Третья серия демонстрирует более высокий уровень определенности субъектов, что связано с большей выпуклостью $f_p(x)$ и, как следствие, большей неоднородностью набора предпочтений. Более пологий рост графика чистоты восприятия третьей серии может быть объяснен тем, что субъекты, обнаруживая в самом начале более предпочтительных с их точки зрения партнеров, в дальнейшем отдают им предпочтения, меньше коммуницируя с другими и тем самым не меняя свое представление о них. Субъекты первых двух серий менее категоричны в своих предпочтениях (что видно из низкого уровня насыщения их графиков определенности), поэтому коммуницируют со всеми остальными.

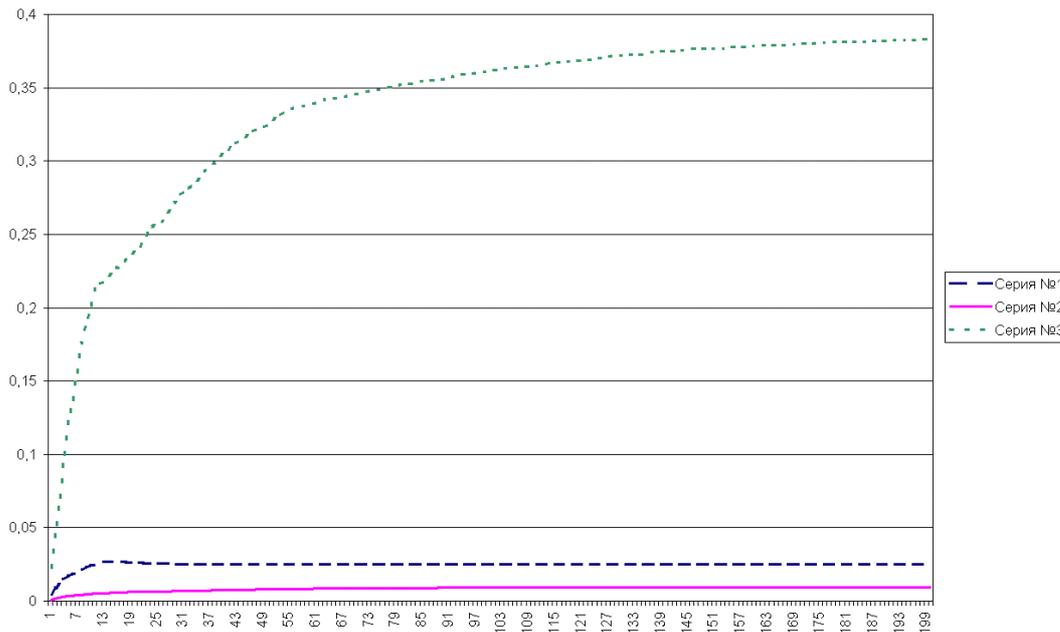


Рис. 1. Динамика средних определенностей субъектов.

Таблица 1. Результаты выделения подгрупп.

№ серии	Среднее число групп	Средняя численность групп	Среднее групповых дисперсий идентичностей	Среднее групповых дисперсий лояльности
1	1,1	6,2	0,027666201	0,002100014
2	1	6,4	0,035246524	0,001180636
3	2,5	2,916666667	0,001216633	0,002603558

4.2. Неформальные группы

В рамках данной статьи ограничимся рассмотрением минимальных подгрупп.

Вообще, задача поиска минимальных подгрупп в силу конечности множества субъектов может быть решена полным перебором возможных вариантов. Этот вариант имеет сложность, экспоненциально зависящую от числа субъектов.

Более рациональным выглядит использование алгоритма иерархической кластеризации [4]. Данные алгоритмы формируют иерархию кластеров сгущения. На самом первом уровне находятся одиночные субъекты, и каждый кластер последующего уровня является объединением двух «близких» кластеров предшествующего. Близость кластеров определяется мерой близости μ . В данном случае, поскольку каждый кластер представляет собой совокупность субъектов, мера близости определяется через их отношения:

$$\mu(A_1, A_2) = \min(r(A_1, A_2), r(A_2, A_1)).$$

Иными словами, на каждом шаге алгоритма объединяются максимально лояль-

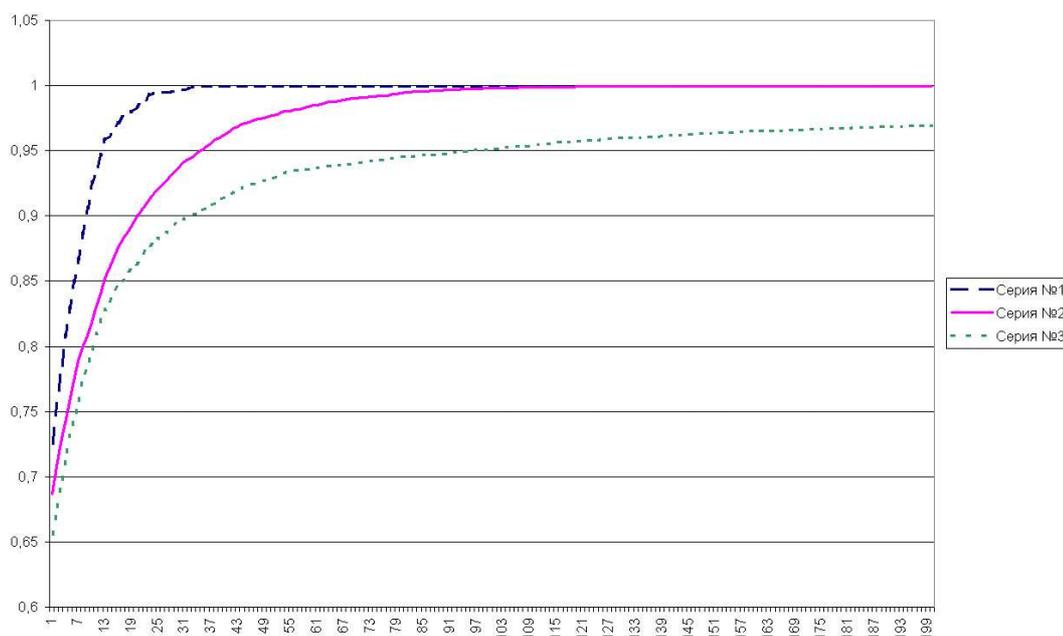


Рис. 2. Динамика средних чистот восприятия.

ные друг другу совокупности среди доступных.

Поиск минимальных групп производится в полученном дереве кластеров, начиная с листовых элементов. Как только кластер удовлетворяет условию (4), дальнейший поиск групп в содержащей его ветви становится излишним.

В таблице 1 приведены результаты проведения трех серий экспериментов. В каждом эксперименте по завершении 200 итераций проводилось выделение подгрупп и вычисление их характеристик. Средние групповых дисперсий вычислялись как средние арифметические групповых дисперсий. В таблице представлены значения характеристик, осредненные по числу экспериментов в серии.

В первой и второй сериях экспериментов выделялось мало групп довольно большого размера. Более выпуклая функция $f_p(x)$ в третьей серии дает, как было замечено выше, более неоднородный набор предпочтений, в который попадают субъекты с близкими идентичностями. В таких группах дисперсия идентичности меньше (как видно из таблицы, примерно на порядок). Сами группы при этом примерно в два раза компактнее, чем в первых двух сериях.

Последний столбец таблицы показывает, насколько одинакова лояльность субъектов к своей группе. Эти величины имеют одинаковый порядок для всех трех серий. Группы, получающиеся в третьей серии, так же сплочены, как и группы первых двух серий. Это также является следствием выпуклости функции $f_p(x)$ и получающейся большей неоднородности предпочтений.

Окончательная гипотеза может быть сформулирована следующим образом: выпуклость функции $f_p(x)$ значительно влияет на структуру получающихся минимальных подгрупп (их количество и качественный состав).

5. Заключение

В данной работе описана модель социального взаимодействия, основанная на предложениях теории Н. Лумана, определены ее основные характеристики, введено понятие неформальной группы. Также сформулированы гипотезы поведения основных характеристик модели, нуждающиеся в более серьезном обосновании. В последующих публикациях будет представлен более полный анализ поведения характеристик в зависимости от параметров модели, а также будет осуществлено более пристальное изучение структур неформальных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоффман Э. Представление себя другими / Современная зарубежная социальная психология. Тексты. Под ред. Г.М. Андреевой, Н.Н. Богомоловой, Л.А. Петровской. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1984. С.188-196.
2. Луман Н. Медиа коммуникации. М.: Издательство «Логос», 2005.
3. Луман Н. Общество как социальная система. М.: Издательство «Логос», 2004.
4. Маңдель И. Д. Кластерный анализ. М.: Финансы и статистика, 1988.
5. Шеннон Э. Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. С.243-333.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАМИАНА НАБЛЮДАЕМОСТИ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ОТКАЗОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Д.Н. Василенко, Е.В. Головачев, С.Н. Чуканов

В работе рассматривается возможность многократного оценивания элементов вектора состояния сложной системы управления на основе построения пересечений множеств оценок вектора состояния. Также рассматривается способ количественной оценки процесса наблюдения возмущения вектора состояния системы по информации вектора изменения при помощи грамиана наблюдаемости.

Использование мажоритарной логики для идентификации отказов требует применения нескольких приборов, измеряющих один параметр (или нескольких каналов в приборе, измеряющих один параметр). Если учитывать аналитическую избыточность системы управления (с учетом уравнений динамики объекта), то можно измерять различные параметры и затем оценивать другие параметры по информации измерительных приборов с помощью, например, наблюдателей Люенбергера. Однако определение одного и того же параметра по информации различных измерителей приводит к разным оценкам из-за разницы моделей оценивания, шумовых характеристик и др. Поэтому следует сравнить оценки параметра, полученные по информации различных измерителей.

1. Декомпозиция системы с множеством входов и выходов (MIMO - Multi Input/Multi Output)

Пусть имеется гладкая нелинейная система с множеством входов и выходов [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{x})u_i; \\ y_i &= h_i(\mathbf{x}); \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\mathbf{x} \in R^n; \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in R^n; \quad g_j(\mathbf{x}) \in R^n; \quad \forall j = 1, \dots, m;$$

$$\begin{aligned} y_i &\in R; \quad h_i(\mathbf{x}) \in R; \quad \forall i = 1, \dots, p; \\ \mathbf{y} &\in R^p; \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) \in R^p. \end{aligned}$$

Сформулируем для системы (1) матрицу декомпозиции

$$A_{decom} = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{k_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_j} L_f^{k_1-1} h_1(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_m} L_f^{k_1-1} h_1(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{k_i-1} h_i(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_j} L_f^{k_i-1} h_i(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_m} L_f^{k_i-1} h_i(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{k_p-1} h_p(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_j} L_f^{k_p-1} h_p(\mathbf{x}) & \dots & L_{g_m} L_f^{k_p-1} h_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

где вектор относительных степеней $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_p\}$ определяется из выполнения соотношений:

$$\begin{aligned} L_{g_j} L_f^\alpha h_i(\mathbf{x}) &= 0; \quad 0 \leq \alpha \leq k_i - 2; \\ L_{g_j} L_f^{k_i-1} h_i(\mathbf{x}) &\neq 0. \end{aligned}$$

Здесь L_f, L_{g_j} — производные Ли.

Для линейной системы:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \sum_{j=1}^m b_j u_j; \\ y_i &= c_i \mathbf{x}; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in R^n; \quad \mathbf{F} \in R^{n \times n}; \quad b_j \in R^{n \times 1}; \quad \forall j = 1, \dots, m; \\ y_i &\in R; \quad \mathbf{y} \in R^p; \quad c_i \in R^{1 \times n}; \quad \forall i = 1, \dots, p; \\ \mathbf{C} &\in R^{n \times p}; \end{aligned}$$

матрица декомпозиции будет иметь форму:

$$A_{decom} = \begin{bmatrix} c_1 F^{k_1-1} \mathbf{b}_1 & \dots & c_1 F^{k_1-1} \mathbf{b}_j & \dots & c_1 F^{k_1-1} \mathbf{b}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_i F^{k_i-1} \mathbf{b}_1 & \dots & c_i F^{k_i-1} \mathbf{b}_j & \dots & c_i F^{k_i-1} \mathbf{b}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_p F^{k_p-1} \mathbf{b}_1 & \dots & c_p F^{k_p-1} \mathbf{b}_j & \dots & c_p F^{k_p-1} \mathbf{b}_m \end{bmatrix},$$

где вектор относительных степеней $\mathbf{k} = \{k_1, \dots, k_p\}$ определяется из выполнения соотношений:

$$\dim(\text{span}\{c_i, c_i F, c_i F^2, \dots, c_i F^n\}) = k_i; \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Для оценивания вектора состояния линейной системы (2) можно построить наблюдатель [3]

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{F}\xi + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{L}(\mathbf{C}\xi - \mathbf{y}); \quad \xi \in R^n; \quad \mathbf{L} \in R^{n \times m};$$

для оценивания вектора состояния нелинейной системы (1) наблюдатель может быть построен в форме [4]:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathbf{f}(\xi) + \sum_{j=1}^m g_j(\xi)u_j + \mathbf{L}(\mathbf{h}(\xi) - \mathbf{y}); \quad \xi \in R^n,$$

где $\mathbf{L}(\cdot) \in R^p$ в данном случае является гладкой нелинейной функцией.

Наряду с матрицей декомпозиции \mathbf{A}_{decom} сформируем матрицу множеств компонент вектора состояния \mathbf{A}_s :

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1j} & \cdots & S_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{i1} & \cdots & S_{ij} & \cdots & S_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{p1} & \cdots & S_{pj} & \cdots & S_{pm} \end{bmatrix},$$

в которой любой элемент S_{ij} ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, m$) представляет собой подмножество компонент вектора состояния со свойством управляемости по входу u_j и свойством наблюдаемости по выходу y_i . Тогда

$$S_{*j} = \cup_{i=1}^m S_{ij}$$

— подмножество компонент вектора состояния, управляемых по входу j , а

$$S_{i*} = \cup_{j=1}^m S_{ij}$$

— подмножество компонент вектора состояния, наблюдаемых по выходу i .

Один и тот же элемент может быть наблюдаем по нескольким соотношениям $y_i = c_i x$, т.е. находится в нескольких множествах S . Отсюда следует, что пересечения таких множеств (содержащих одинаковые компоненты вектора \mathbf{x}) могут быть непустыми. В общем случае для системы с m соотношениями $y_i = c_i \mathbf{x}$ может быть максимальное количество пересечений:

$$Z = \sum_{i=2}^m C_m^i.$$

2. Построение грамиана наблюдаемости для гладкой нелинейной системы

Рассмотрим систему (1) с $g_j \equiv 0, \forall j$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathbf{f}(x); \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(x); \quad \mathbf{x} \in R^n; \\ \mathbf{f}(\cdot) &\in R^n; \quad \mathbf{y} \in R^m; \quad \mathbf{h}(\cdot) \in R^m, \end{aligned}$$

с заданной базовой траекторией, описываемой соотношениями:

$$\frac{dx_b}{dt} = \mathbf{f}(x_b); \quad \mathbf{y}_b = \mathbf{h}(x_b); \quad \mathbf{x}_b \in R^n; \quad \mathbf{y}_b \in R^m.$$

Тогда возмущения

$$\delta \mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) \in R^n$$

и

$$\delta \mathbf{y} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_b) \in R^m$$

могут быть определены из соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta \mathbf{x})}{dt} &= \mathbf{A} \delta \mathbf{x}, \\ \delta \mathbf{y} &= \mathbf{C} \delta \mathbf{x}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{A} = \left\| \left\| \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}_i} \right\| \right\| \in R^{n \times n}, \quad \mathbf{C} = \left\| \left\| \frac{\partial h_p}{\partial \mathbf{x}_i} \right\| \right\| \in R^{m \times n},$$

$$k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, n, \quad p = 1, \dots, m.$$

Соотношение для распространения возмущения $\delta \mathbf{x}_0 = \delta \mathbf{x}(0)$ при $|\delta \mathbf{x}(0)| \rightarrow 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}(t) &= \exp(\mathbf{A}t) \delta \mathbf{x}(0), \\ \delta \mathbf{y} &= \mathbf{C}[\exp(\mathbf{A}t) \delta \mathbf{x}(0)]. \end{aligned}$$

По фундаментальной матрице $\mathbf{F}(t) = \exp(\mathbf{A}t)$ построим грамиан наблюдаемости:

$$\mathbf{G}_o(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\tau)^T \mathbf{F}(\tau) \mathbf{C}(\tau)^T \mathbf{C}(\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau,$$

то есть матрицу с неотрицательными собственными значениями размерности $(n \times n)$, которая может служить количественной оценкой процесса наблюдения возмущения вектора состояния $\delta \mathbf{x}(t)$ по информации вектора измерения $\delta \mathbf{y}(t)$. Если $\det(\mathbf{G}_o) = 0$, то по информации вектора измерения $\delta \mathbf{y}(t)$ невозможно определить весь вектор возмущения вектора состояния $\delta \mathbf{x}(t)$; в этом случае необходимо выбрать подпространство вектора $\delta \mathbf{x}(t)$ и редуцированный вектор $\delta \mathbf{x}^r(t) \in R^r$, $r < n$, такой, что грамиан, построенный в редуцированном подпространстве будет неособой матрицей.

Рассмотрим случай покомпонентного оценивания вектора состояния:

$$\begin{aligned} y_p &= h_p(x); \quad y_p \in R; \quad h_p \in R; \\ y_p^b &= h_p^b(x_b); \quad y_p^b \in R; \quad h_p^b \in R; \\ \delta y_p &= \mathbf{C}_p \times \delta x; \quad \delta y_p \in R; \\ \mathbf{C}_p &= \left\| \left\| \frac{\partial h_p^b}{\partial \mathbf{x}_i} \right\| \right\| \in R^{1 \times n}; \quad p = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Далее построим грамианы

$$\mathbf{G}_p : \mathbf{G} \mathbf{G}_p(t) = \int_0^t \mathbf{F}(\tau)^T \mathbf{F}(\tau) \mathbf{C}_p(\tau)^T \mathbf{C}_p(\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau$$

на максимальных подпространствах вектора $\delta \mathbf{x}(t)$, удовлетворяющих условию $\det(\mathbf{G}_p) \neq 0$. Тогда для каждого такого p , что $\det(\mathbf{G}_p) \neq 0$, существует набор индексов S_p компонент редуцированного вектора $\delta \mathbf{x}^r(t)$, наблюдаемого по информации только канала y_p измерителя; например, если

$$S_3 = (\delta x_1, \delta x_3, \delta x_5)^T,$$

то по информации канала y_3 измерителя могут быть оценены компоненты $\delta x_1, \delta x_3, \delta x_5$ вектора состояния.

Для количественной оценки уровня наблюдаемости компонент вектора состояния по информации p -го канала измерителя могут быть определены спектры собственных значений o -грамиана G_p , а для симметричной оценки уровня наблюдаемости можно определить симметрические функции от собственных значений грамианов G_p после получения характеристического полинома:

$$\det(tI - \mathbf{G}_p) = t^{n_j} - \sigma_1(\mathbf{G}_p)t^{n_j-1} + \dots + (-1)^{n_j}\sigma_{n_j}(\mathbf{G}_p).$$

Следует отметить факт монотонного возрастания собственных значений λ грамиана \mathbf{G}_p при изменении времени t . Построим симметрические функции σ_i :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + g\lambda_n, \\ \sigma_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n, \\ \sigma_3 &= \lambda_1\lambda_2 \dots g\lambda_n \end{aligned}$$

и усредненные оценки:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sigma_1 n^{-1}, \\ \lambda_2 &= (\sigma_2 2n^{-1}(n-1)^{-1})^{1/2}, \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_i &= (\sigma_i (n!)^{-1}(n-i)!i!)^{1/i}, \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_n &= (\sigma_n)^{1/n}. \end{aligned}$$

Предположим, что первые j ($n > j$) усредненных собственных чисел грамиана \mathbf{G}_p больше нуля, а остальные равны нулю:

$$\begin{aligned} \lambda_k &\neq 0, \quad \text{если } j \geq k \geq 0, \\ \lambda_k &= 0, \quad \text{если } n \geq k \geq n - j + 1. \end{aligned}$$

Тогда по информации p -го канала измерителя можно оценить j компонент вектора состояния системы.

Для диагностики отказов необходимо определить, на сколько усредненные собственные числа грамиана \mathbf{G}_p превышают значение нуля.

Пример 1. Пусть имеется линейная система, представленная в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1, & y_1 &= x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1, & y_2 &= x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_2, & y_3 &= x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_3, & y_4 &= x_4. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{1*} &= (x_1, x_2, x_3, x_4), \\ S_{2*} &= (x_2, x_3, x_4), \\ S_{3*} &= (x_3, x_4), \\ S_{4*} &= (x_4). \end{aligned}$$

Непустые пересечения множеств S_{i*} :

$$\begin{aligned} S_{4*} \cap S_{3*} &= S_{4*} \cap S_{2*} = S_{4*} \cap S_{1*} = (x_4), \\ S_{3*} \cap S_{2*} &= S_{3*} \cap S_{1*} = (x_3, x_4), \\ S_{2*} \cap S_{1*} &= (x_4, x_3, x_2), \\ S_{4*} \cap S_{3*} \cap S_{2*} &= S_{4*} \cap S_{3*} \cap S_{1*} = S_{4*} \cap S_{2*} \cap S_{1*} = (x_4), \\ S_{3*} \cap S_{2*} \cap S_{1*} &= (x_4, x_3), \\ S_{1*} \cap S_{2*} \cap S_{3*} \cap S_{4*} &= (x_4). \end{aligned}$$

Таким образом, компонент вектора состояния x_4 может быть оценен по выходной информации y_4, y_3, y_2, y_1 ; x_3 — по информации y_3, y_2, y_1 ; x_2 — по информации y_2, y_1 ; x_1 — по информации y_1 .

Пример 2. Пусть имеется линейная система, представленная в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3 + u_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4 + u_3, \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_3 + u_4, \\ y_4 &= x_4. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{*1} &= (x_1), \\ S_{*2} &= (x_1, x_2), \\ S_{*3} &= (x_1, x_2, x_3), \\ S_{*4} &= (x_1, x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

Непустые пересечения множеств S_{*j} :

$$\begin{aligned} S_{1*} \cap S_{2*} &= S_{1*} \cap S_{3*} = S_{1*} \cap S_{4*} = (x_1), \\ S_{2*} \cap S_{3*} &= S_{2*} \cap S_{4*} = (x_1, x_2), \\ S_{3*} \cap S_{4*} &= (x_1, x_2, x_3), \\ S_{1*} \cap S_{2*} \cap S_{3*} &= S_{1*} \cap S_{2*} \cap S_{4*} = S_{1*} \cap S_{3*} \cap S_{4*} = (x_1), \\ S_{2*} \cap S_{3*} \cap S_{4*} &= (x_1, x_2), \\ S_{1*} \cap S_{2*} \cap S_{3*} \cap S_{4*} &= (x_1). \end{aligned}$$

Таким образом, компонент вектора состояния x_1 управляем по входным сигналам u_1, u_2, u_3, u_4 ; x_2 — по u_2, u_3, u_4 ; x_3 — по u_3, u_4 ; x_4 — по u_4 .

Пример 3. Линейный гармонический осциллятор.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \varpi_1 x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varpi_2 x_1, \\ \varpi &= (-\varpi_1 \varpi_2)^{0,5}, \quad \varpi_1 \varpi_2 < 0, \\ y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ x_2(0) &= x_{20}, \\ x_1(t) &= x_{10} \cos(\omega t) + \omega_1 \omega^{-1} x_{20} \sin(\omega t), \\ x_2(t) &= x_{20} \cos(\omega t) + \omega_2 \omega^{-1} x_{10} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} \cos(\varpi t) & \varpi_2 \varpi^{-1} \sin(\varpi t) \\ \varpi_2 \varpi^{-1} \sin(\varpi t) & \cos(\varpi t) \end{bmatrix}.$$

$$C_1(t) = [1 \ 0], \quad C_2(t) = [0 \ 1].$$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \mathbf{F}^T(\tau) \mathbf{C}_1^T(\tau) \mathbf{C}_1(\tau) \mathbf{F}(\tau) d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} 0, 5t + 0, 25\varpi^{-1} \sin(2\varpi t) & 0, 5\varpi_1 \varpi^{-2} \sin^2(\varpi t) \\ 0, 5\varpi_1 \varpi^{-2} \sin^2(\varpi t) & -0, 5t + 0, 25\varpi^{-1} \sin(2\varpi t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Заключение

Предложенный в работе метод формирования матрицы пересечений множеств компонент наблюдаемого вектора состояния системы управления может использоваться для диагностики отказов в системе управления. Методы построения грамианов наблюдения для каждого компонента измерителя в непрерывных системах управления динамическим объектом могут быть распространены на дискретные системы управления динамическим объектом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Battilotti S. Noninteracting control with stability for nonlinear systems. Springer-Verlag, 1994. 180 p.
2. Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach / Isidori A., A.Krener, G.Giorgi, S.Monaco // IEEE Transactions on Automatic control. 1981. N.26. P.331-345.
3. Luenberger D.G. Introduction to observers // IEEE Transactions on Automatic control. 1971. N.16. P.596-602.
4. Tsiniias J. Observer design for in nonlinear systems // Systems & Control Letters. 1989. N.13. P.135-142.

ОЦЕНИВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАНАЛОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ИНВАРИАНТНОЕ К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Е.В. Головачев, С.Н. Чуканов

Рассмотрен метод оценивания взаимодействия каналов систем управления, основанный на формировании сингулярных значений Ганкеля для систем с единичным входом и выходом, входящих в состав системы управления с множеством входов и выходов.

Введение

Взаимодействие каналов – свойство систем управления, создающее трудности при формировании требуемого управления вектором состояния, без возмущения других каналов. Наиболее значительная работа в области исследования взаимного влияния каналов – работа Е. Бристол [1], в которой представлен метод RGA (Relative Gain Array). Однако метод RGA имеет ограничение – в нем рассматриваются только частотные характеристики процесса. Метод основан на построении матрицы мер взаимодействия всех возможных SISO-систем (систем с единичным входом и выходом), включенных в состав MIMO-системы (системы с множеством входов и выходов). Метод RGA обеспечивает информацию об управляемости и робастности MIMO-системы [2, 4].

Рассмотрим систему, которая может быть описана моделью $\mathbf{z}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$, где $\mathbf{u}(s)$, $\mathbf{z}(s)$ – n -мерные векторы преобразований Лапласа входных/выходных сигналов соответственно; $\mathbf{G}(s)$ – $n \times n$ матрица устойчивых передаточных функций и матрица $\mathbf{G}(0)$ – несингулярная. Матрица относительных коэффициентов усиления RGA системы определяется как $\Lambda(\mathbf{G}) = \mathbf{G} \circ \mathbf{G}^{-T}$, где \circ – поэлементное умножение (произведение Шура). Относительный коэффициент усиления $\lambda_{ij}(\mathbf{G})$ для пары $u_j - z_i$ задается как $\lambda_{ij}(\mathbf{G}) = \frac{g_{ij}}{\bar{g}_{ij}}$, где g_{ij} – коэффициент усиления разомкнутого контура $u_j - z_i$; \bar{g}_{ij} – коэффициент усиления контура $u_j - z_i$, когда остальная часть системы замкнута контуром интегральной обратной связи. Пусть $\bar{\mathbf{G}}$ – матрица, полученная приравниванием нулю всех компонентов матрицы \mathbf{G} , которые не соответствуют паре входа/выхода в заданной структуре

децентрализованного управления. Индекс Нидерлински (Niederlinski) [5] для этой структуры определяется как [3]:

$$NI(\mathbf{G}) = \frac{\det(\mathbf{G})}{\det(\bar{\mathbf{G}})}.$$

1. Постановка задачи

Рассмотрим конечномерную линейную инвариантную по времени динамическую систему $[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}]$, которая может быть представлена в пространстве состояний (SS - state space) соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ - вектор входных управляющих сигналов, $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^p$ - вектор выходных сигналов. При этом матричная передаточная функция системы $\mathbf{G}(s)$: $\mathbf{G}(s) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. Отклик выходного сигнала для начального состояния \mathbf{x}_0 и входа $\mathbf{u}(t)$ можно записать в виде [7]:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (2)$$

Для системы с реализацией: $[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{0}]$ можно сформировать грамиан наблюдаемости [7]:

$$\mathbf{W}_o = \int_0^{\infty} (e^{\mathbf{A}^T t})\mathbf{C}^T \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} dt, \quad (3)$$

являющийся положительно определенным решением уравнения Ляпунова: $\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{C}^T = 0$. Грамиан управляемости системы:

$$\mathbf{W}_c = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad (4)$$

положительно определен решением уравнения Ляпунова:

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0.$$

Требуется найти параметры, инвариантные по отношению к преобразованию подобия вектора состояния

2. Формирование параметров SISO-систем, инвариантных к преобразованию вектора состояния

Грамианы \mathbf{W}_c , \mathbf{W}_o и матричная передаточная функция $\mathbf{G}(s)$ зависят от реализации; после преобразования подобия $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{x}$ грамианы преобразуются как

$\mathbf{W}_c \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{W}_c\mathbf{T}^T \mathbf{W}_o \Rightarrow \mathbf{T}^{-T}\mathbf{W}_o\mathbf{T}^{-1}$ соответственно. Собственные значения матрицы $\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o$ инвариантны относительно действия преобразования подобия \mathbf{T} . Если \mathbf{T} - такая матрица, что:

$$\mathbf{T}\mathbf{W}_c\mathbf{W}_o\mathbf{T}^{-1} = \Sigma = \text{diag}\{\sigma_{i_1}^2, \sigma_{i_2}^2, \dots, \sigma_{i_n}^2\}, \quad (5)$$

то сингулярные значения Ганкеля (HSV - Hankel singular value) системы:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$$

не зависят от \mathbf{T} .

С MIMO-системой $[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{0}]$ свяжем совокупность SISO-систем с входом $u_j: j=1..m$ и выходом $z_i: i=1..p$; SS-реализация каждой такой системы задается как $[\mathbf{A}, \mathbf{b}_i; \mathbf{c}_i^T, \mathbf{0}]$ с грамианами $\mathbf{W}_{oi}, \mathbf{W}_{cj}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{W}_{oj} + \mathbf{W}_{oj}\mathbf{A} + \mathbf{c}_j\mathbf{c}_j^T &= 0; \\ \mathbf{A}\mathbf{W}_{ci} + \mathbf{W}_{ci}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^T &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{b}_i - i^{\text{ый}}$ столбец матрицы \mathbf{B} ; $\mathbf{c}_j - j^{\text{ый}}$ столбец матрицы \mathbf{C}^T . HSV пары $(\mathbf{W}_{oi}, \mathbf{W}_{cj})$ оценивают возможность входа u_j и выхода z_i управлять и наблюдать вектором состояния системы соответственно.

Пусть \mathbf{W}_{oi} и \mathbf{W}_{cj} - грамианы управляемости и наблюдаемости для SISO-системы $[\mathbf{A}, \mathbf{b}_i; \mathbf{c}_i^T, \mathbf{0}]$. Тогда грамианы управляемости и наблюдаемости $\mathbf{W}_o, \mathbf{W}_c$ всей MIMO-системы:

$$\mathbf{W}_o = \sum_{i=1}^p \mathbf{W}_{oi}, \quad \mathbf{W}_c = \sum_{j=1}^m \mathbf{W}_{cj}.$$

Произведение $\mathbf{W}_o\mathbf{W}_c$ MIMO-системы можно представить в виде:

$$\mathbf{W}_o\mathbf{W}_c = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m \mathbf{W}_{oi}\mathbf{W}_{cj},$$

то есть как сумму произведений $\mathbf{W}_{oi}\mathbf{W}_{cj}$ для SISO-систем, входящих в состав MIMO-системы управления. Так как HSV матриц $\mathbf{W}_{oi}\mathbf{W}_{cj}$ не зависят от SS-реализации, то они могут выступать в качестве базиса меры взаимодействия SISO-систем с входным управляющим сигналом u_j и выходным сигналом z_i .

После определения HSV пары $(\mathbf{W}_{oi}, \mathbf{W}_{cj})$ найдем симметрические функции от собственных значений:

$$\varsigma_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n, \quad \varsigma_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \dots + \sigma_{n-1}\sigma_n, \quad \dots, \quad \varsigma_n = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n.$$

Для каждого $\varsigma_k, 1 \leq k \leq n$; определим такие максимальное ς_k^{\max} и минимальное ς_k^{\min} значения, что при:

- $\varsigma_k \leq \varsigma_k^{\min}$ - будем считать процессы не взаимодействующими и подсистемы могут исследоваться без учета влияния других подсистем (декомпозиция ММО-системы на основе количественной оценки);
- $\varsigma_k \geq \varsigma_k^{\max}$ - будем считать процессы взаимодействующими (формирование искусственного взаимодействия систем на основе количественной оценки ММО-системы).

3. Пример оценивания взаимодействия каналов системы управления

Рассмотрим твердое тело (ТТ), центр масс O_1 которого движется по круговой орбите под действием гравитационных сил, создаваемых притягивающим центром O [6]. Пусть $O_1X_oY_oZ_o$ - правая прямоугольная орбитальная система: ось O_1Z_o направлена по радиусу-вектору OO_1 ТТ; ось O_1X_o расположена в плоскости орбиты и направлена в сторону движения ТТ. Система координат $O_1X_oY_oZ_o$ вращается вокруг притягивающего центра O с угловой скоростью ω_o , вектор которой направлен параллельно оси O_1Y_o . Введем далее правую связанную систему координат O_1XYZ , оси которой направим по главным центральным осям инерции ТТ. Пусть выполнены малые повороты относительно осей x, y, z на углы крена γ , тангажа ϑ и рыскания ψ соответственно. Линеаризованные уравнения движения ТТ по круговой орбите с учетом влияния гравитационного поля планеты [6] и формирования обратной связи по производным углов γ, ϑ, ψ :

$$\begin{aligned}
J_x \frac{d\gamma_1}{dt} + \omega_o(J_x + J_z - J_y)\psi_1 + 4\omega_o^2(J_y - J_z)\gamma + k_\gamma\gamma_1 &= M_x; \\
J_y \frac{d\vartheta_1}{dt} + 3\omega_o^2(J_x - J_z)\vartheta + k_\vartheta\vartheta_1 &= M_y; \\
J_z \frac{d\psi_1}{dt} + \omega_o(J_y - J_x - J_z)\gamma_1 + \omega_o^2(J_y - J_x)\psi + k_\psi\psi_1 &= M_z; \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \gamma_1; \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \vartheta_1; \\
\frac{d\psi}{dt} &= \psi_1
\end{aligned} \tag{7}$$

или в соответствии с [1]:

$$\mathbf{x} = \left[\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \gamma, \vartheta, \psi \right]^T; \quad \mathbf{u} = \left[\frac{M_x}{J_x}, \frac{M_y}{J_y}, \frac{M_z}{J_z} \right]^T; \quad \mathbf{z} = [\gamma, \vartheta, \psi]^T;$$

ненулевые компоненты матрицы \mathbf{A} :

$$a_{11} = \frac{-k_\gamma}{J_x}; \quad a_{13} = \omega_o \frac{J_y - J_x - J_z}{J_x}; \quad a_{14} = 4\omega_o^2 \frac{J_z - J_y}{J_x};$$

$$a_{22} = \frac{-k_{\vartheta}}{J_y}; \quad a_{25} = 3\omega_o^2 \frac{J_z - J_x}{J_y};$$

$$a_{31} = \omega_o \frac{J_x + J_z - J_y}{J_x}; \quad a_{33} = \frac{-k_{\psi}}{J_z}; \quad a_{36} = \omega_o^2 \frac{J_x - J_y}{J_z}; \quad a_{41} = a_{52} = a_{63} = 1;$$

$$\mathbf{b}_1 = [1, 0, 0, 0, 0, 0]^T; \quad \mathbf{b}_2 = [0, 1, 0, 0, 0, 0]^T; \quad \mathbf{b}_3 = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^T;$$

$$\mathbf{c}_1 = [0, 0, 0, 1, 0, 0]; \quad \mathbf{c}_2 = [0, 0, 0, 0, 1, 0]; \quad \mathbf{c}_3 = [0, 0, 0, 0, 0, 1],$$

где J_x, J_y, J_z - компоненты тензора инерции ТТ относительно его главных центральных осей; M_x, M_y, M_z - компоненты момента внешних сил; все компоненты матрицы \mathbf{D} равны нулю.

При значениях: $\omega_o = 0,0012 \text{ с}^{-1}$, $J_y = 100 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_x = 80 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_z = 60 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $k_{\gamma} = 0,001 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $k_{\vartheta} = 0,001 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$, $k_{\psi} = 0,001 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ найдем суммы HSV:

$$\zeta_1^{u_1 \rightarrow z_1} = 35000000; \quad \zeta_1^{u_1 \rightarrow z_2} = 4,7 \cdot 10^{-10}; \quad \zeta_1^{u_1 \rightarrow z_3} = 18000000;$$

$$\zeta_1^{u_2 \rightarrow z_1} = 1,7 \cdot 10^{-7}; \quad \zeta_1^{u_2 \rightarrow z_2} = 78000000; \quad \zeta_1^{u_2 \rightarrow z_3} = 4,9 \cdot 10^{-7};$$

$$\zeta_1^{u_3 \rightarrow z_1} = 9000000; \quad \zeta_1^{u_3 \rightarrow z_2} = 4,9 \cdot 10^{-9}; \quad \zeta_1^{u_3 \rightarrow z_3} = 52000000.$$

Относительные значения влияния управляющих сигналов на выходные при $\zeta_1^{\min} = 1$ приведены в таблице 1.

Таблица 1.

	Крен γ	Тангаж ϑ	Рыскание ψ	Сумма по строке
Влияние u_1 на	0,66	0	0,34	1
Влияние u_2 на	0	1	0	1
Влияние u_3 на	0,15	0	0,85	1

Из таблицы следует, что существует возможность декомпозиции системы управления на подсистему крена-рыскания и подсистему тангажа.

Заключение

Предложенный метод оценивания взаимного влияния каналов в системах управления может быть использован при проектировании подсистем диагностики отказов. В дальнейших работах авторы предполагают распространить метод на гладкие нелинейные системы управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bristol E.H. On a new measure of interaction for multivariable process control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. N.11. P.133-134.

2. Campo P.J., Morari M. Achievable closed-loop properties of systems under decentralized control: Conditions involving the steady-state gain // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. N.39. P.932-943.
3. Chiu M, Arkun Y. A new result on relative gain array, Niederlinski index and decentralized stability condition: 2×2 plant case // Automatica. 1991. N.27(2). P.419-421.
4. Grosdidier P., Morari M. Interaction measures for systems under decentralized control // Automatica. 1986. N.22. P.309-319.
5. Niederlinski A. A heuristic approach to the design of linear multivariable control systems // Automatica. 1971. N.7. P.691-701.
6. Боевкин В.И., Гуревич Ю.Г., Павлов Ю.Н. Ориентация искусственных спутников в гравитационных и магнитных полях. М.: Наука, 1976. 304 с.
7. Калман Р.Е., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ВРЕМЕНИ В МУЛЬТИВЕРСЕ

А.К. Гуц

Для теоретико-топосной теории мультиверса, т.е. в теории параллельных миров, в которой фундаментальные физические константы являются суммой постоянного вещественного числа и бесконечно малого числа, находятся уравнения физических полей: электромагнитного и гравитационного.

В монографии [1] была предложена формальная теория мультиверса \mathcal{T} , т.е. теория параллельных миров, основанная на инфинитозимальном анализе Кока-Ловера [2]. Переход от классического дифференциального и интегрального исчисления к анализу Кока-Ловера означает переход от классической двузначной логики к интуиционистской логике. Теория множеств не может уже служить способом моделирования объектов такой теории и приходится использовать теорию топосов [3].

В исчислении Кока-Ловера «множество вещественных чисел» является коммутативным кольцом R , которое содержит «подмножество» инфинитозималов $D \subset R$, состоящее из элементов $d \in R$, таких, что $d^2 = 0$.

При интерпретации i теории \mathcal{T} в гладкой теоретико-топосной модели \mathfrak{M} – топосе $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$, объекты $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ которого являются конечно порожденными C^∞ -кольцами вида $C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$, где I идеал вида $(f_1, f_2, \dots, f_k)^1$, вещественные числа r представляются гладкими функциями $f(a)$ действительной переменной $a \in \mathbb{R}^m$, а инфинитозималы $d \in D$ классом гладких функций $d(a)(\text{mod } I)$ действительной переменной $a \in \mathbb{R}^m$, таким, что $d^2(a) \in I$ [4].

Важно отметить, что при интерпретации i отношения $r \in R$, $d \in D$ и другие размножаются, т.е. появляются в разных многочисленных вариантах в зависимости от выбора объекта ℓA . Это следствие неклассической логики, используемой в теории \mathcal{T} . «Размножение» отношений $r \in R$, $d \in D$ в интерпретации \mathfrak{M} записываем в виде

$$i(r) \in_{\ell A} i(R), \quad i(d) \in_{\ell A} i(D),$$

Copyright © 2006 А.К. Гуц.
Омский государственный университет.
E-mail: guts@univer.omsk.su

¹Через (f_1, \dots, f_k) обозначается идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, порожденный функциями $f_1, \dots, f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т.е. имеющий вид $\sum_{i=1}^k g_i f_i$, где $g_1, \dots, g_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – произвольные гладкие функции.

где

$$i(R) = C^\infty(\mathbb{R}), \quad i(D) = C^\infty(\mathbb{R})/(x^2).$$

Размножение, как показало подробное исследование [1], происходит за счет того, что фундаментальные физические константы не являются в действительности тем, что называется вещественным числом, т.е. неизменяемым объектом. Экспериментально это проявляется в том, что физические константы никогда не могут быть точно измеренными: всегда присутствует то, что физики называют погрешностью измерения.

Физическая константа – это функция, измеряемое значение которой соответствует конкретной физической вселенной, конкретному миру. Варьирование физической константы – это варьирование, перебор миров. Согласно антропному принципу, впервые сформулированному Г.М.Иддисом, тот или иной набор значений физических констант, реализующийся в некоторой вселенной, соответствует форме сознания/осознания, наблюдающему данную вселенную, данный мир. Форма осознания есть не что иное, как форма времени. Следовательно, варьирование физических констант – это варьирование, перебор типов времен, типов восприятия, осознания миров.

1. Уравнения Максвелла

Рассматриваем лагранжиан для электромагнитного поля в плоском пространстве-времени Минковского [5, с.103]:

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\mathbb{R}^4} F_{ik} F^{ik} dx - \frac{1}{c^2} \int_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx. \quad (1)$$

Начнем варьирование физических констант. В случае кольца R примем, что скорость света, например, есть сумма константы $c_0 \in \mathbb{R}$ (классическая физическая константа – скорость света $3 \cdot 10^{10}$ см/с²) и инфинитозимала $d \in D$, т.е.

$$c = c_0 + d.$$

Надо понять, что понимается под «числами» $1/c$ и $1/c^2$. Примем, что

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} \left(1 - \frac{d}{c_0}\right), \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c_0^2} \left(1 - \frac{2d}{c_0}\right).$$

Очевидно, что с учетом $d^2 = 0$ получаются нужные соотношения:

$$c \cdot \frac{1}{c} = 1 \quad \text{и} \quad c^2 \cdot \frac{1}{c^2} = 1.$$

Лагранжиан (1) в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m/I)$ берем, следовательно, в виде

$$S_{em} = \int_{\mathbb{R}^m} da \left[-\frac{1}{16\pi c_0} \left(1 - \frac{d(a)}{c_0}\right) \int_{\mathbb{R}^4} F_{ik} F^{ik} dx - \right.$$

$$-\frac{1}{c_0^2} \left(1 - \frac{2d(a)}{c_0} \right) \int_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx \Big] \pmod{I}. \quad (2)$$

Здесь инфинитезималь $d \in S$ представляется функцией $d(a)$, такой, что $d^2(a) \in I$.

С целью получения полевых уравнений варьируем функционал (2) по A_i и по $d(a)$. Соответственно получаем

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c_0} \left(1 - \frac{d(a)}{c_0} \right) j^i \pmod{I} \quad (3)$$

– аналог уравнений Максвелла и

$$\frac{1}{16\pi c_0^2} \int_{\mathbb{R}^4} F_{ik} F^{ik} dx + \frac{2}{c_0^3} \int_{\mathbb{R}^4} A_i j^i dx = 0 \pmod{I} \quad (4)$$

– дополнительное уравнение времени в мультиверсе.

2. Уравнение для гравитационного поля в пустом пространстве

Рассматриваем лагранжиан для гравитационного поля в пустом пространстве для теории \mathcal{T} :

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}^4} R \sqrt{-g} dx. \quad (5)$$

Имеем для $d, d_1 \in D$

$$c^3 = (c_0 + d)^3 = c_0^3 + 3c_0^2 d, \quad \frac{1}{G} = \frac{1}{G_0} \left(1 - \frac{d_1}{G_0} \right)$$

и

$$\frac{c^3}{G} = \frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2} d_1 + \frac{3c_0^2}{G_0} d - \frac{3c_0^2}{G_0^2} dd_1.$$

Тогда, варьируя лагранжиан

$$S_g = -\frac{1}{16\pi} \int_{\mathbb{R}^m} da \left[\frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2} d_1 + \frac{3c_0^2}{G_0} d - \frac{3c_0^2}{G_0^2} dd_1 \right] \int_{\mathbb{R}^4} R \sqrt{-g} dx \quad (6)$$

по g_{ik} , d_1 и d , получаем соответственно:

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0} - \frac{3}{c_0 G_0} dd_1 \right] R_{ik} = 0 \pmod{I} \quad (7)$$

– уравнения гравитационного поля в пустом пространстве и

$$(c_0 + 3d) \int_{\mathbb{R}^4} R \sqrt{-g} dx = 0 \pmod{I}, \quad (8)$$

$$(G_0 - d_1) \int_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \pmod{I} \quad (9)$$

– дополнительные уравнения времени в мультиверсе.

Заметим, что классические решения Эйнштейна для пустого пространства удовлетворяют уравнениям (7)-(9).

Заметим, что в случае, когда $dd_1 \in I$, вместо (7)-(8) имеем:

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0}\right] R_{ik} = 0 \pmod{I}, \quad (10)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \pmod{I}. \quad (11)$$

В любом случае, классические решения $R_{ik} = 0$ с постоянными константами c, G (т.е. $d(a) = d_1(a) = 0$) удовлетворяют уравнениям поля (7)-(9) или (10), (11).

3. Уравнение для гравитационного поля

Рассматриваем лагранжиан для гравитационного поля в пространстве, заполненном материей:

$$S_{gm} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx + \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx. \quad (12)$$

Тогда, варьируя лагранжиан для теории \mathcal{T}

$$S_{gm} = -\frac{1}{16\pi} \int_{\mathbb{R}^m} da \left\{ \left[\frac{c_0^3}{G_0} - \frac{c_0^3}{G_0^2} d_1 + \frac{3c_0^2}{G_0} d - \frac{3c_0^2}{G_0^2} dd_1 \right] \int_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx + \frac{1}{c_0} \left(1 - \frac{d}{c_0}\right) \int_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx \right\} \quad (13)$$

по g_{ik}, d и d_1 , получаем

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0} - \frac{3}{c_0 G_0} dd_1\right] \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) = \frac{8\pi G_0}{c_0^4} \left(1 - \frac{d}{c_0}\right) T_{ik} \pmod{I} \quad (14)$$

– уравнения гравитационного поля, и

$$(c_0 + 3d) \int_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \pmod{I}, \quad (15)$$

$$\frac{3c_0^2}{G_0^2} (G_0 - d_1) \int_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = \frac{1}{c_0^2} \int_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx \pmod{I} \quad (16)$$

– дополнительные уравнение времени в мультиверсе.

Заметим, что в случае, когда $dd_1 \in I$, вместо (17)-(19) имеем:

$$\left[1 - \frac{d_1}{G_0} + \frac{3d}{c_0}\right] \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) = \frac{8\pi G_0}{c_0^4} \left(1 - \frac{d}{c_0}\right) T_{ik} \pmod{I}, \quad (17)$$

$$\int_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = 0 \pmod{I}, \quad (18)$$

$$\frac{3c_0^2}{G_0} \int_{\mathbb{R}^4} R\sqrt{-g}dx = \frac{1}{c_0^2} \int_{\mathbb{R}^4} \Lambda\sqrt{-g}dx \pmod{I}. \quad (19)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К. Элементы теории времени. Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2004. 364 с.
2. Kock A. Synthetic Differential Geometry. Cambridge University Press, 1981.
3. Гольдблатт Р. Теория топосов. М.: Мир, 1983.
4. Moerdijk I., Reyes G.E. Models for Smooth Infinitesimal Analysis. Springer-Verlag, 1991.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ Е.В. ПАЛЕШЕВОЙ «ФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕНИ»

В.В. Карбановский, Т.В. Каиров

Даны некоторые замечания к статье Е.В. Палешевой «Физические следствия многомерного времени». Предлагается другая интерпретация полученных автором результатов. Отмечается, в частности, что одним из предсказаний, рассматриваемой в анализируемой статье концепции, является переменность массы всех движущихся тел.

В работе [1] была предложена концепция, в соответствии с которой время является многомерным и входит в метрику СТО:

$$dS^2 = dT^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1)$$

в виде положительно определенной квадратичной формы

$$dT^2 = t_{ik} d\tau^i d\tau^k. \quad (2)$$

В результате параметризации выражение (2) было переписано следующим образом:

$$dT^2 = t_{ik} \beta^i \beta^k dt^2, \quad (3)$$

здесь $\beta^k = \frac{\partial \tau^k}{\partial t}$, t –параметр преобразования. Следует отметить, что предложенное автором работы [1] преобразование

$$\tau^i = \tau^i(t, x, y, z), x = x, y = y, z = z \quad (4)$$

приводит не к выражению (3), а к

$$dT^2 = t_{ik} \frac{\partial \tau^i}{\partial x^l} \frac{\partial \tau^k}{\partial x^n} dx^l dx^n.$$

Посредством выбора в качестве параметра одной из «временных переменных» τ^s квадрат интервала (1) был представлен в форме

$$dS^2 = (\beta^{(s)})^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

где $(\beta^{(s)})^2 = t_{ik}\beta^{(s)i}\beta^{(s)k}$,

$$\beta^{(s)k} = \frac{\partial \tau^k}{\partial \tau^s}.$$

Однако если все τ^i независимы, то $\beta^{(s)k} = \delta^{(s)k}$, где

$$\delta^{(s)k} = \begin{cases} 1, & \text{при } s = k, \\ 0, & \text{при } s \neq k. \end{cases}$$

Поэтому для дальнейшего анализа результатов работы [1] целесообразно ограничиться представлением интервала в форме

$$dS^2 = \beta^2 dt^2 - dl^2, \quad (5)$$

где $\beta^2 = t_{ik}\beta^i\beta^k$.

Следует отметить, что выражение вида (5) можно получить и в четырехмерном пространстве Минковского, если, по аналогии с метрикой Робертсона-Уокера для однородной изотропной Вселенной, ввести несинхронную временную координату

$$d\tau = b(t)dt. \quad (6)$$

В [2] было показано, что в этом случае проблему начальной космологической сингулярности можно «заменить» начальным горизонтом событий. Поэтому представляют интерес возможные следствия перехода к метрике вида (5) для релятивистской механики.

По аналогии с рассуждением автора [1] можно, используя (5), записать лагранжиан «свободной частицы»:

$$L = -\alpha\beta + \frac{\alpha v^2}{2\beta}. \quad (7)$$

Очевидно, что в результате предельного перехода к классической механике, с учетом неизменности параметра α , мы получим для массы частицы выражение

$$m = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Таким образом, масса m в предложенной теории оказывается зависимой от функции β , которая, в свою очередь, может быть интерпретирована как переменная скорость света. Поэтому в качестве одного из предсказаний, рассматриваемых в [1] концепции, следует указать переменность масс (вообще говоря, всех!) движущихся тел «синхронно» с изменением $\beta(t)$. Экспериментальная проверка данного вывода представляется интересной, но затруднена отсутствием «эталонов» с фиксированной массой.

Что касается первого слагаемого в (7), интерпретируемого автором [1] как «негравитационное силовое поле», то из классической механики известно (см., например [3], [4]), что заданная функция времени не делает вклад в уравнения движения частицы (т.е. представляет собой фактически калибровочное преобразование функции Лагранжа). Однако если использовать класс преобразований вида (4), то можно построить аналог функции β , зависящий от пространственных координат. В этом случае действительно получим некоторое силовое

поле. Причина его появления связана с тем, что такие преобразования не относятся к группе Лоренца. Следовательно, они не описывают допустимый в рамках СТО переход между инерциальными системами отсчета. Поэтому их можно интерпретировать как преобразования координат пространства-времени к некоторой неинерциальной системе отсчета. Тогда силовое поле в (7) соответствует силам инерции, действующим в этой системе.

Можно указать, что аналогичное (6) преобразование временной переменной для уравнения движения частицы в классической механике было рассмотрено в [5]. Там это также привело к появлению дополнительных сил, представляющих собой некоторые силы инерции, поскольку данное преобразование не входит, вообще говоря, в группу Галилея.

ЛИТЕРАТУРА

1. Палешева Е.В. Физические следствия многомерного времени // Математические структуры и моделирование. Омск: ОмГУ. 2003. Вып.12. С.140-145.
2. Karbanovski V.V., Kozhevnikov V.Yu., Grebnev K.Yu., Reentova E.Yu., Dubinin Ye.V., Mironova M.V. Event Horizon as alternative to cosmological singularity // International Journal of Theoretical Physics. 1996. V.35, N.10. P.2191–2193.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988.
4. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. М.: МГУ, 1991.
5. Герштейн С.С., Логунов А.А., Мествиришвили М.А. Об одном фундаментальном гравитационном поле в полевой теории // Доклады Академии Наук. 2005. Т.402, N.1. С.34-36.

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ОПИСАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВЕТВЕЙ МУЛЬТИВЕРСА, МУЛЬТИВИДУУМА И ЯВЛЕНИЯ «СКЛЕЕК ВЕТВЕЙ МУЛЬТИВЕРСА»

Ю.А. Лебедев

В данной работе рассмотрен один из важных вопросов эвереттики – вопрос о возможных подходах к корректному описанию возможности взаимодействия классических эвереттических ветвей мультиверса.

Эвереттический подход к рассмотрению картины мира в последнее время не только распространился из физики в другие области познавательной и – шире – творческой деятельности [6], но и добился впечатляющих успехов в интеграции отдельных научных дисциплин. Ярким примером может служить последняя книга М.Б. Менского [5], в которой феномен сознания рассмотрен с квантовомеханических позиций.

В данной работе рассмотрен один из важных вопросов эвереттики - вопрос о возможных подходах к корректному описанию возможности взаимодействия классических эвереттических ветвей мультиверса.

Постулируем, что физическая реальность не продуцирует сознания (а сознание, согласно утверждению М.Б. Менского, «как психологический феномен на самом деле тождественно квантовомеханическому понятию выбора альтернативы» [5, с. 156]), а также согласимся с концепцией внефизичности времени Барбура [7]. Исходя из этого постараемся на языке квантовых состояний феноменологически описать явление склеек ветвей мультиверса, введенное ранее [2, с. 106].

В данном случае, опираясь на работу М.Б. Менского, будем рассматривать взаимодействие ветвей мультиверса с позиции примата Сознания в индивидуализации классических состояний из «континуального квантового кристалла Менского» — мультиверса. Под склейкой будем понимать такой результат взаимодействия двух «классических эвереттовских универсумов» (или, иными словами, двух классических состояний мультиверса), при котором в сознании наблюдателя формируется образ реальности, содержащей взаимоисключающие элементы обоих универсумов.

Для этого проведем мысленный эксперимент. Можно было бы рассмотреть систему из шариков и фотоаппаратов, но, думается, интереснее будет вариант, основанный на анализе какого-то апокрифического исторического факта. Их достаточно много — например, известный филадельфийский эксперимент 1943 года с американским эсминцем «Элдридж» или случай дорожно-транспортного происшествия в 1950 году в США, когда под колеса автомобиля попал пропавший в 1879 году прохожий. Подобные примеры можно обнаружить в литературе во множестве. Для определенности остановимся на факте, который многократно приводился в различных периодических и интернет-изданиях. Вот как он изложен в журнале «Вокруг света» [3]:

В Великобритании летом 1912 года среди бела дня в экспрессе, следовавшем из Лондона в Глазго, в присутствии двух пассажиров — инспектора Скотленд-Ярда и молодой медсестры — совершенно неожиданно на сиденье у окна появился со страшным криком пожилой мужчина. Его длинные волосы были заплетены в косу, на ногах — ботинки с большими пряжками, на голове — старинная треуголка. В одной руке он держал длинный бич, а в другой — надкушенный кусок черного хлеба.

Сразу было ясно, что он просто умирает от страха. Инспектор и медсестра хотели его успокоить: «Как вас зовут? Откуда вы? Неужели вы никогда не ездили в поезде?» — наперебой спрашивали они, желая успокоить странного человека. «Я — Пимп Дрейк! Я — возница из Четнема! Где я? Куда я попал?» — выкрикнул человек и зарыдал от страха. Инспектор побежал за кондуктором. Когда они появились вместе — возница исчез. Выглянули в окно — насыпь просматривалась, и никого на ней не было видно. Кондуктор, возможно, и не поверил бы в то, что рассказал инспектор, если бы не оставшиеся на сиденье бич и треуголка, да и медсестра находилась в глубоком обмороке. . .

События так заинтересовали попутчиков таинственного незнакомца, что они решили заняться добровольным расследованием. Этнографы, увидев шляпу и бич, уверенно определили время, к которому они относились, — вторая половина XVIII века. Через какое-то время инспектор и медсестра отправились в район, где проезжали во время странного происшествия. В магистрате они узнали, что железная дорога проходит через местность, где еще в начале XIX века находилась деревушка Четнем.

Пастор прихода, к которому когда-то принадлежал Четнем, нашел в церковных книгах XVIII века запись о человеке по имени Пимп Дрейк. В книге записи умерших 150 лет тому назад священник нашел не только имя несчастного возницы, но и заметку тогдашнего пастора, сделанную на полях. Из нее следовало, что, будучи уже немолодым человеком, Дрейк однажды ночью, возвращаясь на повозке домой, увидел прямо перед конями «дьявольский экипаж» — железный, огромный, длинный как змей, пышущий огнем и дымом. Неизвестно, как Дрейк оказался внутри. Были там какие-то люди в странных одеждах, вероятно, слуги дьявола. Испугавшись, Дрейк воззвал к Господу о спасении и вдруг увидел, что лежит в придорожном рве. Дорога была пуста — никаких следов коней и повозки. Дрейк дотащился домой, ослабев от страха, творя молитвы. Жена встретила его сообщением, что час назад человек из

соседней деревни привел коней, он нашел их в семи милях отсюда.

Все, что удалось узнать, инспектор сообщил Королевскому Обществу, которое досконально проверило это сообщение, повторив весь путь розысков Дрейка. Треуголка до сих пор хранится в музее Общества.

Лично мне не удалось найти независимого подтверждения этого факта, а также дополнительной информации о том, в каком именно Королевском Обществе хранится треуголка Дрейка. Однако для проведения мысленного эксперимента совершенно неважно — существует ли какое-то подтверждение изложенной Н. Непомнящим истории.

Для наглядности слегка упростим ситуацию и для этого предположим, что мы располагаем следующими фактами. В вагоне поезда в 1912 году едут двое пассажиров. На свободном месте неожиданно возникает фигура Пимпа Дрейка, которая, после короткого диалога с пассажирами, исчезает. В XVIII веке в поле, по которому ехал Пимп Дрейк, стоит пастор, который тут же эту историю записывает.

При таком упрощении ситуации появление в вагоне поезда в начале XX века человека из XVIII века «ниоткуда» само по себе не является склейкой двух ветвей эвереттовского мультиверса в смысле данного выше определения. Оно является только необходимым условием возникновения склейки. Обстоятельства, при которых это событие приобретет и достаточные основания и, таким образом, станет склейкой, должны быть рассмотрены особо.

Возможно ли описание приведенных событий 1912 года и XVIII века на языке квантовой механики?

Введем ряд обозначений:

- U_1 — универс 1912 года;
- U_2 — универс XVIII века времен Пимпа Дрейка;
- ψ_{M1} — состояние ветви мультиверса в купе поезда в U_1 ;
- ψ_{M2} — состояние ветви мультиверса вблизи придорожного рва в U_2 ;
- ψ_{U1}^1 — состояние U_1 , в котором в купе поезда появляется Пимп Дрейк;
- ψ_{U1}^2 — состояние U_1 , в котором в купе поезда не появляется Пимп Дрейк;
- ψ_{U2}^1 — состояние U_2 , в котором Пимп Дрейк едет по дороге в повозке;
- ψ_{U2}^2 — состояние U_2 , в котором Пимп Дрейк лежит в придорожном рве;
- χ_{U1} — состояние наблюдателя (инспектора Скотленд-Ярда или молодой медсестры) в U_1 ;
- χ_{U1}^1 — состояние наблюдателя (инспектора Скотленд-Ярда или молодой медсестры) в U_1 , в котором он видит Пимпа Дрейка;
- χ_{U1}^2 — состояние наблюдателя (инспектора Скотленд-Ярда или молодой медсестры) в U_1 , в котором он не видит Пимпа Дрейка;

- χ_{U_2} — состояние наблюдателя (пастора) в U_2 ;
- $\chi_{U_2}^1$ — состояние наблюдателя (пастора) в U_2 , в котором он видит исчезновение Дрейка и последующее появление его в канаве и записывает это свое наблюдение;
- $\chi_{U_2}^2$ — состояние наблюдателя (пастора) в U_2 , в котором он видит проезжающего мимо Дрейка и ничего не записывает в книгу.

В соответствии с предложенными обозначениями, ситуация в ветви мультиверса U_1 может быть записана следующим образом:

$$\psi_{M_1} = (C_1\psi_{U_1}^1 + {}_2\psi_{U_1}^2)\chi_{U_1} \rightarrow C_1\psi_{U_1}^1\chi_{U_1}^1 + {}_2\psi_{U_1}^2\chi_{U_1}^2, \quad (1)$$

где C_1 и C_2 — числовые множители для нормированной формы входящих в (1) ψ -функций, подчиняющиеся соотношению

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1. \quad (2)$$

Иными словами, ψ_{M_1} в (1) до стрелки в плане корреляции сознания инспектора и состояния дел в купе является сепарабельным состоянием. Именно в этом случае купе представляет собой с точки зрения инспектора ящик с «котом Шредингера» (инспектор не может утверждать ни того, что он видит Пимпа Дрейка в купе, ни того, что его там нет). После стрелки ψ_{M_1} в (1) представляет собой перепутанное состояние.

Ситуация в ветви мультиверса U_2 описывается аналогично:

$$\psi_{M_2} = (D_1\psi_{U_2}^1 + D_2\psi_{U_2}^2)\chi_{U_2} \rightarrow D_1\psi_{U_2}^1\chi_{U_2}^1 + D_2\psi_{U_2}^2\chi_{U_2}^2, \quad (3)$$

где для D_1 и D_2 справедливо:

$$|D_1|^2 + |D_2|^2 = 1. \quad (4)$$

Здесь ψ_{M_2} в (3) до стрелки в плане корреляции сознания пастора и событий с экипажем Пимпа Дрейка является сепарабельным состоянием. Именно в этом случае дорога в поле представляет собой с точки зрения пастора ящик с «котом Шредингера» (пастор не уверен ни в том, что все время видел Пимпа Дрейка на повозке, ни в том, что в какой-то момент Дрейк исчезал и потом появлялся в канаве). После стрелки ψ_{M_2} в (3) представляет собой перепутанное состояние.

Поскольку в рассматриваемой задаче явно присутствует точка зрения внешнего наблюдателя, осознающего наличие и U_1 и U_2 , причем такая точка зрения является имманентной всему классу подобных задач (рассмотрение взаимодействия «со стороны»), введем ещё два обозначения:

- ψ_{M_3} — «мета-состояние» мультиверса, включающее U_1 , U_2 ;
- χ_3 — состояние мета-наблюдателя в этом состоянии мультиверса.

Здесь важно отметить, что физический мультиверс в состоянии M_3 содержит в данном случае только две ветви — U_1 и U_2 . Но это, как мне кажется, абсолютно не нарушает общности полученных выводов и для случая N_ϵ ветвей, где N_ϵ — эвнергетически большое число (область натуральных чисел, простирающихся за углом).

Выведение сознания наблюдателя как квазипсихологического феномена за рамки физики в соответствии с постулатом Менского позволяет более четко сформулировать понятие мультивидуума, известное в психологии и психиатрии [4]. При таком подходе мультивидуум представляется *самосогласованной системой квантовомеханических альтернативных выборов физической реальности той или иной ветви физического мультиверса в качестве «классической картины мира» для конкретного индивидуума.*

Самосогласованность системы проявляется в том, что мультивидуум в целом способен идентифицировать одни и те же объекты в разных ветвях мультиверса (в нашем мысленном эксперименте — и девушка-медсестра и пастор, будучи индивидуумами одного мультивидуума, осознают, что перед ними именно Пимп Дрейк).

В рамках этого предположения становится понятным и такой известный из психиатрии факт, что отдельные индивидуумы мультивидуума могут иметь разный пол, возраст и «жизненный опыт» (память) [4].

Вернемся к рассматриваемой системе. По аналогии с (1) и (3) для ψ_{M_3} можно записать:

$$\psi_{M_3} = (F_1\psi_{M_1} + F_2\psi_{M_2})\chi_{M_3} \rightarrow F_1\psi_{M_1}\chi_{M_3}^1 + F_2\psi_{M_2}\chi_{M_3}^2, \quad (5)$$

где $\chi_{M_3}^1$ — состояние мультивидуума мета-наблюдателя, воспринимающее (осознающее) U_1 и не воспринимающее U_2 ; $\chi_{M_3}^2$ — состояние мультивидуума мета-наблюдателя, воспринимающее (осознающее) U_2 и не воспринимающее U_1 ; и

$$|F_1|^2 + |F_2|^2 = 1. \quad (6)$$

Подставляя M_1 из (1) и M_2 из (3) в (5), получим:

$$\begin{aligned} \psi_{M_3} &= \{F_1(C_1\psi_{U_1}^1\chi_{U_1}^1 + C_2\psi_{U_1}^2\chi_{U_1}^2) + F_2(D_1\psi_{U_2}^1\chi_{U_2}^1 + D_2\psi_{U_2}^2\chi_{U_2}^2)\} \chi_{M_3} \rightarrow \\ &\rightarrow F_1C_1\psi_{U_1}^1\chi_{U_1}^1\chi_{M_3}^1 + F_1C_2\psi_{U_1}^2\chi_{U_1}^2\chi_{M_3}^1 + \\ &\quad + F_2D_1\psi_{U_2}^1\chi_{U_2}^1\chi_{M_3}^2 + F_2D_2\psi_{U_2}^2\chi_{U_2}^2\chi_{M_3}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим физический смысл каждого из слагаемых уравнения (7), т.е. каждого состояния в суперпозиции состояний мультиверса 3.

Первое слагаемое — это состояние в U_1 , в котором в купе присутствует Пимп Дрейк, наблюдатель (инспектор или медсестра) его видят, а мета-наблюдатель, присутствующий при этом, не осознает — видят инспектор и медсестра Пима Дрейкат или нет? Т.е. для метанаблюдателя купе подобно коробке с котом Шредингера — там и есть Пимп Дрейк, и его нет. Вероятность этого состояния — $|F_1C_1|^2$.

Второе слагаемое — это состояние в U_1 , в котором Пимп Дрейк отсутствует в купе, наблюдатель (инспектор или медсестра) его не видят, а мета-наблюдатель,

присутствующий при этом, не осознает – видит инспектор и медсестра Пимпа Дрейка или нет? Т.е. для метанаблюдателя и в этом случае купе подобно той же коробке с котом Шредингера. Вероятность этого состояния – $|F_1C_2|^2$.

Третье слагаемое — это состояние в U_2 , в котором Пимп Дрейк едет в повозке, наблюдатель (пастор) его видит, но мета-наблюдатель не осознает – Пимп Дрейк в повозке или в канаве? Вероятность этого состояния – $|F_2D_1|^2$.

Четвертое слагаемое — это состояние в U_2 , в котором Пимп Дрейк лежит во рве, наблюдатель (пастор) его видит, но мета-наблюдатель по-прежнему не осознает – Пимп Дрейк в повозке или в канаве? Вероятность этого состояния – $|F_2D_2|^2$.

Как видим, суперпозиция (7) охватывает все возможные с физической точки зрения ситуации в универсах U_1 и U_2 и не включает каких-либо противоречащих физике или психологии ситуаций — например, когда бы Пимп Дрейк присутствовал в купе, но был бы ненаблюдаем или когда бы мультивидуум получал информацию от мета-наблюдателя, несовместимую с физической ситуацией в универсуме или наблюдениям индивидуумов.

Интересно то, что мультивидуум в (7) во всех случаях (и до, и после стрелок) присутствует в состояниях некогерентных смесей по причине скоррелированности состояния всех наблюдателей (и инспектора, и пастора, и метанаблюдателя), но все состояния каждого из универсумов U_1 и U_2 являются когерентными разной степени общности, т.е. состояниями, которые совместимы со всеми «классическими» вариантами состояния соответствующего универса.

Если рассматривать это с теологических позиций, то можно было бы сказать, что предложенная процедура является формальным описанием «божественного всеведения». Тогда декогеренция этого состояния мультивидуума в данном универсе может рассматриваться как описание «божественного всемогущества», творящего все реальности этого универсума. Однако всемогущество это ограничено — реализуются только *физически возможные* состояния универсума.

Легко показать, что в каждом отдельном универсуме (U_1 или U_2) мета-наблюдатель будет иметь распределения вероятностей наблюдения каждого из состояний соответственно (2) или (4), но для мультивидуума эти вероятности будут согласованы так, чтобы выполнялось уравнение (6).

Теперь рассмотрим более сложный случай. В условия описываемой ситуации включим тот факт, что полицейский инспектор, услышав от странного пассажира его имя, искал подтверждение реальности существования Пимпа Дрейка. Это обстоятельство приведет к необходимости учета того факта, что состояние инспектора $\chi_{U_1}^1$ «распадается» на два состояния – когда он нашел книгу с записями пастора XVIII века ($\chi_{U_1}^{11}$) и когда - нет ($\chi_{U_1}^{12}$).

Соответственно уравнение (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \psi_{M1} = (C_1\psi_{U_1}^1 + 2\psi_{U_1}^2)\chi_{U_1} \rightarrow C_1\psi_{U_1}^1(\chi_{U_1}^{11} + \chi_{U_1}^{12}) + 2\psi_{U_1}^2\chi_{U_1}^2 \rightarrow \\ \rightarrow C_1\psi_{U_1}^1\chi_{U_1}^{11} + C_1\psi_{U_1}^1\chi_{U_1}^{12} + 2\psi_{U_1}^2\chi_{U_1}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Физический смысл всех трех слагаемых уравнения (8) ясен: первое соответствует случаю, когда инспектор и видел Дрейка и нашел запись пастора

о приключении Пимпа в XVIII веке, второе – случаю, когда инспектор видел Дрейка, но никаких доказательств его реальности не обнаружил, а третье – ничего не видел и ничего специально не искал. Оно, кстати, в принципе может само распасться на два, где в одном инспектор случайно натывается на забавную историю в старой книге, каковая история, естественно, не вызывает у него никаких особых ассоциаций, а во втором никакой находки старой книги и вовсе не происходит.

Разумеется, при строгом рассмотрении «распад» χ -состояний должен описываться с помощью линейных суперпозиций с соответствующими «вероятностными коэффициентами», однако строгое рассмотрение вопроса не является целью данной работы. Здесь хотелось бы выразить надежду на то, что высказанные соображения могут послужить основой для разработки детальной методики описания систем «взаимодействующих ветвей мультиверса», содержащих наблюдателей.

Возвращаясь к анализу (8), можно отметить, что особый интерес с точки зрения заявленного рассмотрения явлений склеек представляет первое слагаемое после стрелки. Наличие в нем произведения $\psi_{U1}^1 \chi_{U1}^{11}$ обеспечивает и необходимые и достаточные условия образования склейки в соответствии с принятым выше определением. Именно ее и будет описывать первое слагаемое в (8) – инспектор и видел сам Дрейка и знает, что этого «не может быть», поскольку Дрейк – человек из XVIII века! Второе слагаемое описывает состояние инспектора, сомневающегося в своей адекватности окружающему миру (знакомое всем состояние при поисках очков, которые «вот только что здесь лежали»).

Аналогично можно описать и образование склеек в XVIII веке. Рассмотренная модель является абсолютно статичной – время присутствует в ней не в качестве аргумента, а в качестве параметра, характеризующего набор состояний «определенной эпохи» (1912 год и XVIII век в данном случае). И параметр этот *не физический*, а логический, упорядочивающий совокупные множества состояний. Более того, если внимательно рассмотреть ситуацию, то и пространство как *физический параметр* также отсутствует. Квантовое состояние системы представляет собой *информационный объект*, т.е. объект, который определенным образом формирует состояние наблюдателя, точнее – конкретные образы в его восприятии (его *реальность*) и содержание его памяти. А динамика и связанное с ней перемещение в пространстве, обусловленные определенными логическими правилами, облеченными в форму «физических законов», оказываются при таком подходе *внефизическими* инструментами упорядочивания памяти наблюдателя на базе аксиомы о причинности. И вполне логично то, что пространство-время является единым объектом в СТО Эйнштейна. Признавая за этой теорией так же, как и за копенгагенской интерпретацией квантовой механики, исключительно важную практическую значимость, считаю необходимым подчеркнуть, что, по моему мнению, обе они отражают не свойства «первичного физического мира», а характеризуют способ фиксации квантовых состояний познающим эти состояния сознанием в своей памяти.

Что же в таком случае представляет собой «настоящая физика»? По-другому этот же вопрос можно переформулировать так: что стоит *за* поня-

тием квантового состояния? Мне кажется, что очередной рукав «философской спирали» замкнулся, и мы должны в соответствии с логикой теоремы Геделя обратиться к «новой метафизике» и начать осмысливать картину мира в рамках «струнных ландшафтов» мультиверса [1].

Автор выражает особую признательность Л.В. Ильичеву за ряд принципиальных рекомендаций, а также благодарит А.М. Костерина, П.В. Полуяна, П.Р. Амнуэля и А.И. Алешковского за полезные советы в ходе работы над текстом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг С. Образ жизни в Мультиверсе.
– <http://www.everettica.org/art/VajnLiving.pdf>
2. Лебедев Ю.А. Неоднозначное мироздание. Кострома, 2000. 32 с. Эл. копии:
– <http://www.newcontinent.ru/lebedev/>
– <http://pyramid.express.ru/disput/lebedev/text/titul.htm>
– <http://www.sciteclibrary.com/rus/catalog/pages/923.html>
– <http://maks.omskreg.ru/omsk/Sci/Everett/1.htm>
3. Непомнящий Н. Странное происшествие в малом Трианоне // Вокруг света. 1997. N.12. Цит. по
– http://www.vokrugsveta.ru/publishing/vs/archives/?item_id=1130
4. Никонов Ю.В. Диссоциативные расстройства психики (многомировая интерпретация) – <http://www.everettica.org/article.php3?ind=45>
5. Менский М.Б. Человек и квантовый мир. Фрязино: Изд-во «Век», 2005. 317 с.
6. МЦЭИ Международный Центр Эвереттических Исследований.
– <http://www.everettica.org/>
7. Barbour Julian The End of Time. Phoenix 2004. 374 p.

СИМВОЛЫ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ НА АЛГЕБРАХ ЛИ

И.В. Широков

В статье выведены формулы, позволяющие заменить работу с операторными функциями (от некоммутирующих переменных) из обертывающей алгебры на работу с ассоциативной алгеброй гладких функций на дуальном пространстве, т.е. функций от коммутирующих переменных. Показано, что выбор способа упорядочивания операторов эквивалентен выбору локальных координат в группе Ли.

Введение

Пусть G — связная и односвязная вещественная n -мерная группа Ли, \mathfrak{g} — ее алгебра Ли, базисные элементы которой $\{e_i\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям: $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$. Пусть также задано представление \hat{T} группы G в линейном пространстве \mathcal{H} . Мы будем обозначать одной и той же буквой элемент группы $t \in G$, лежащий в окрестности единицы группы и соответствующий набор его локальных координат $t = (t^1, \dots, t^n) \in I^n$ (I^n — n -мерный открытый куб), причем $e = (0, \dots, 0)$. Линейные операторы \hat{X}_j :

$$\hat{X}_j = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial t^j} \hat{T}(t) \right) \Big|_{t=0}, \quad j = 1, \dots, n = \dim G$$

являются генераторами представления \hat{T} группы G и образуют базис представления алгебры \mathfrak{g} в пространстве \mathcal{H} со следующими коммутационными соотношениями:

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{X}_j, \hat{X}_k] = C_{jk}^m \hat{X}_m.$$

(Здесь \hbar — некоторый вещественный положительный параметр, в квантовой механике ему соответствует постоянная Планка).

В физических приложениях (в квантовой механике) пространство \mathcal{H} является гильбертовым, а операторы \hat{X}_j — самосопряженными. В этом случае представление \hat{T} унитарно. В настоящей работе нет необходимости накладывать условия гильбертовости пространства \mathcal{H} и унитарности представления \hat{T} .

Поставим каждому оператору \hat{X}_j во взаимнооднозначное его символ X_j и распространим по линейности это соответствие на всю алгебру \mathfrak{g} :

$$\hat{X} = \alpha^j \hat{X}_j \longleftrightarrow X = \alpha^j X_j, \quad \alpha^j \in \mathbb{R}.$$

Продолжим введенное соответствие на обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g})$, т.е. каждой операторной функции $f(\hat{X}) \in U(\mathfrak{g})$ поставим в соответствие полиномиальную функцию $\tilde{f}(X)$ от символов X_j . (Под операторной функцией мы понимаем некоторый элемент из представления обертывающей алгебры, порожденного представлением \hat{T}). Символы X_j можно отождествить с координатами линейного функционала $X \in \mathfrak{g}^*$ в двойственном базисе: $X = X_j e^j$, где $\langle e^j, e_i \rangle = \delta_i^j$. Таким образом, мы ставим в соответствие операторной функции на алгебре \mathfrak{g} ее символ — полиномиальную функцию на \mathfrak{g}^* . Произведению двух операторов $f_1(\hat{X})f_2(\hat{X})$ (как элементов ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{g})$) будет соответствовать так называемое *звездное произведение* (*star-product*) их символов:

$$(\widetilde{f_1 f_2})(X) = \tilde{f}_1(X) * \tilde{f}_2(X). \quad (1)$$

Ясно, что соответствие между символами и операторами неоднозначно. Например, функция $X_1 X_2$ из $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ может соответствовать различным операторам $\hat{X}_1 \hat{X}_2$, $\hat{X}_2 \hat{X}_1$, $(\hat{X}_1 \hat{X}_2 + \hat{X}_2 \hat{X}_1)/2$ и т.д. Для однозначности соответствия между символами и соответствующими операторами необходимо выбрать способ упорядочивания. От выбора способа упорядочивания зависит формула для звездного умножения (1).

Пусть M — некоторое пуассоново многообразие (или супермногообразие). Отображение алгебры гладких функций на пуассоновом многообразии M (классические наблюдаемые) в алгебру самосопряженных операторов на лагранжевом подмногообразии в M (квантовые наблюдаемые) такое, что коммутатор операторов в некотором смысле соответствует скобке Пуассона их символов, называется процедурой *квантования* многообразия M . При этом такое отображение должно удовлетворять еще ряду требований, которые зависят от вида квантования (геометрического [1], деформационного [2] и т.д.) и которые мы здесь не приводим.

На коалгебре \mathfrak{g}^* определена скобка Пуассона–Ли¹:

$$\{\tilde{f}_1(X), \tilde{f}_2(X)\}^{Lie} = C_{ij}^k X_k \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial X_i} \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial X_j}, \quad f_1, f_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*). \quad (2)$$

Таким образом, коалгебра \mathfrak{g}^* является пуассоновым многообразием. Однако мы в настоящей работе не будем заниматься проблемой квантования пуассонового многообразия \mathfrak{g}^* . Мы исходим из некоторого известного представления \hat{T} группы Ли, и нашей задачей является получение формулы для звездного произведения.

¹По повторяющимся верхним и нижним индексам, если не оговорено противное, производится суммирование.

1. Операторные функции и их символы

Операторы $\hat{T}(t)$ представления элементов $t \in G$, лежащих в окрестности единицы группы, являются поднятием представления алгебры Ли с помощью экспоненциального отображения

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G,$$

т.е. $\hat{T}(t) = \exp(it\hat{X}/\hbar)$. Под этой операторной экспонентой можно понимать либо произведение операторных экспонент, порядок следования которых определяется некоторой подстановкой $\sigma = (i_1, \dots, i_n)$:

$$e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{X}} = e^{\frac{i}{\hbar}t^{i_1}\hat{X}_{i_1}} \dots e^{\frac{i}{\hbar}t^{i_n}\hat{X}_{i_n}} \quad (\text{суммы по индексам } i_1, \dots, i_n \text{ нет}),$$

что соответствует выбору канонических координат второго рода, либо одной экспоненте

$$e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{X}} = e^{\frac{i}{\hbar}t^j\hat{X}_j},$$

что соответствует выбору канонических координат первого рода, либо некоторой смеси координат первого и второго рода. В этом разделе мы не будем фиксировать выбор координат.

Основной формулой, связывающей операторные функции $f(\hat{X})$ и их символы $\tilde{f}(X)$, является следующее выражение:

$$f(\hat{X}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int e^{-\frac{itX}{\hbar}} \tilde{f}(X) \hat{T}(t) dt dX. \quad (3)$$

Здесь $dt = dt^1 \dots dt^n$, $dX = dX_1 \dots dX_n$. Интегрирование по переменным X_i производится по всему пространству R^n , по переменным t^i — по открытому n -мерному кубу I^n , содержащему 0. Если группа G — экспоненциальная, то $I^n = R^n$.

Из формулы (3) можно вывести эквивалентную и заодно показать, что значение интеграла в правой части равенства (3) не зависит от выбора области I^n . Подставим произвольную полиномиальную функцию

$$\tilde{f}(X) = \sum_k a_{k_1 \dots k_n} X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$$

в выражение (3):

$$\begin{aligned} f(\hat{X}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \sum_k a_{k_1 \dots k_n} \int X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} e^{-\frac{itX}{\hbar}} \hat{T}(t) dX dt = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \sum_k a_{k_1 \dots k_n} \times \\ &\times \int \hat{T}(t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t^1} \right)^{k_1} \dots \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t^n} \right)^{k_n} \exp\left(-\frac{itX}{\hbar}\right) dX dt = \sum_k a_{k_1 \dots k_n} \times \\ &\times \int \hat{T}(t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t^1} \right)^{k_1} \dots \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t^n} \right)^{k_n} \delta(t) dX dt = \tilde{f}\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \hat{T}(t) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Полученный результат распространяется на любую аналитическую функцию. Таким образом, связь между операторной функцией и ее символом дается эквивалентной формулой

$$f(\hat{X}) = \tilde{f}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{T}(t)\Big|_{t=0}. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что *выбор локальных координат в окрестности единицы группы определяет способ упорядочивания операторов в операторных функциях*. В качестве простейшего примера возьмем функцию $\tilde{f}(X) = X_1X_2X_3$ и построим с помощью формулы (4) соответствующие операторные функции для трех видов локальных координат в группе G :

$$\begin{aligned} \hat{T}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}t^1\hat{X}_1}e^{\frac{i}{\hbar}t^3\hat{X}_3}e^{\frac{i}{\hbar}t^2\hat{X}_2}e^{\frac{i}{\hbar}t^4\hat{X}_4}\dots e^{\frac{i}{\hbar}t^n\hat{X}_n}, & f(\hat{X}) &= \hat{X}_1\hat{X}_3\hat{X}_2; \\ \hat{T}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}t^1\hat{X}_1}e^{\frac{i}{\hbar}(t^2\hat{X}_2+t^3\hat{X}_3+t^4\hat{X}_4+\dots+t^n\hat{X}_n)}, & f(\hat{X}) &= \frac{1}{2}\hat{X}_1(\hat{X}_2\hat{X}_3 + \hat{X}_3\hat{X}_2); \\ \hat{T}(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}(t^1\hat{X}_1+t^2\hat{X}_2+t^3\hat{X}_3+t^4\hat{X}_4+\dots+t^n\hat{X}_n)}, & f(\hat{X}) &= \frac{1}{6}(\hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3 + \hat{X}_1\hat{X}_3\hat{X}_2 + \\ &+ \hat{X}_2\hat{X}_1\hat{X}_3 + \hat{X}_2\hat{X}_3\hat{X}_1 + \hat{X}_3\hat{X}_1\hat{X}_2 + \hat{X}_3\hat{X}_2\hat{X}_1). \end{aligned}$$

В первом случае были выбраны канонические координаты второго рода, соответствующие подстановке $\sigma = (1, 3, 2, 4, \dots, n)$. Все операторные функции в этом случае являются суммами операторных выражений, в которых слева будет стоять оператор \hat{X}_1 в некоторой степени, затем операторы $\hat{X}_3, \hat{X}_2, \hat{X}_4, \dots, \hat{X}_n$. Во втором случае выбраны смешанные координаты, в операторных выражениях слева будет стоять оператор \hat{X}_1 в некоторой степени, умноженный на симметризованное выражение от операторов $\hat{X}_2, \hat{X}_3, \dots, \hat{X}_n$. Третий случай соответствует выбору канонических координат первого рода, который определяет симметризованное упорядочивание (или, как его иначе называют, упорядочивание по Вейлю).

2. Звездное произведение символов операторов

По определению представления $\hat{T}(y)\hat{T}(z) = \hat{T}(x(y, z))$, где $x(y, z)$ — функция композиции (умножения) в группе Ли G в локальных координатах. Согласно формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} f_1(\hat{X})f_2(\hat{X}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int \hat{T}(y)\hat{T}(z)e^{-\frac{i}{\hbar}(yY+zZ)}\tilde{f}_1(Y)\tilde{f}_2(Z) dY dZ dy dz = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int \hat{T}(x(y, z))e^{-\frac{i}{\hbar}(yY+zZ)}\tilde{f}_1(Y)\tilde{f}_2(Z) dY dZ dy dz = \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \hat{T}(t)e^{-\frac{itX}{\hbar}}\widetilde{f_1f_2}(X) dX dt, \quad \text{где} \\ \widetilde{f_1f_2}(X) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int e^{\frac{i}{\hbar}(x(y, z)X-yY-zZ)}\tilde{f}_1(Y)\tilde{f}_2(Z) dY dZ dy dz. \end{aligned}$$

Вспоминая определение звездного произведения (3), окончательно получим

$$\tilde{f}_1(X) * \tilde{f}_2(X) = \int K(X; Y, Z) \tilde{f}_1(Y) \tilde{f}_2(Z) dY dZ, \quad (5)$$

$$K(X; Y, Z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}} \int e^{\frac{i}{\hbar}(x(y,z)X - yY - zZ)} dy dz. \quad (6)$$

Учитывая, что функции $\tilde{f}_1(X), \tilde{f}_2(X)$ полиномиальны, и действуя так же, как и при выводе формулы (4), получим формулу для звездного произведения, эквивалентную формуле (5):

$$\tilde{f}_1(X) * \tilde{f}_2(X) = \tilde{f}_1(-i\hbar\partial_y) \tilde{f}_2(-i\hbar\partial_z) e^{\frac{i}{\hbar}x(y,z)X} \Big|_{y=z=0}. \quad (7)$$

Для единичного оператора $\hat{1}$ очевидны равенства $\hat{1} \cdot f(\hat{X}) = f(\hat{X}) \cdot \hat{1} = f(\hat{X})$. Из формулы (4) следует, что единичному оператору соответствует символ $\tilde{f} \equiv 1$ и поэтому должны выполняться равенства $1 * \tilde{f}(X) = \tilde{f}(X) * 1 = \tilde{f}(X)$, справедливость которых следует из формулы (7) и из свойства функции композиции в группе Ли: $x(y, 0) = y, x(0, z) = z$. По определению символа оператора звездное произведение должно быть ассоциативной бинарной операцией. Это легко проверить непосредственно, используя формулы (5), (6) (или формулу (7)) и свойство ассоциативности умножения в группе Ли $x(y, x(z, u)) = x(x(y, z), u)$.

Таким образом, линейное пространство гладких функций на \mathfrak{g}^* , снабженное бинарной операцией «*», является ассоциативной (но некоммутативной) алгеброй $\mathcal{A} = (C^\infty(\mathfrak{g}^*), *)$ с единицей. Отметим, что в схеме геометрического квантования и в некоторых случаях деформационного квантования свойство ассоциативности не выполняется.

Введем на алгебре \mathcal{A} скобку Пуассона:

$$\{\varphi(X), \psi(X)\}^{symb} = \frac{i}{\hbar} (\varphi(X) * \psi(X) - \psi(X) * \varphi(X)), \quad \varphi(X), \psi(X) \in \mathcal{A}. \quad (8)$$

Поскольку формула (5) для звездного произведения зависит от выбранных в группе Ли локальных координат, то каждому такому выбору координат соответствует своя скобка Пуассона (8). Как мы покажем ниже, все различные скобки (8) являются деформациями скобки Ли–Пуассона (2), т.е. $\{\cdot, \cdot\}^{symb} \rightarrow \{\cdot, \cdot\}^{Lie}$ при $\hbar \rightarrow 0$.

Обозначим через ξ, η — лево- и правоинвариантные векторные поля, ω, σ — лево- и правоинвариантные 1-формы на группе G , в координатах имеем:

$$\begin{aligned} [\xi_i, \xi_j] &= C_{ij}^k \xi_k, & [\eta_i, \eta_j] &= C_{ij}^k \eta_k, & [\xi_i, \eta_j] &= 0; \\ \xi_j &= \xi_j^k(z) \frac{\partial}{\partial z^k}, & \eta_j &= \eta_j^k(z) \frac{\partial}{\partial z^k}, & \omega^k &= \omega_j^k(z) dz^j, & \sigma^k &= \sigma_j^k(z) dz^j; \\ \omega_i^j \xi_k^i &= \delta_k^j, & \sigma_i^j \eta_k^i &= \delta_k^j, & \xi_j^i(0) &= -\eta_j^i(0) = \delta_j^i. \end{aligned}$$

Условия лево- и правоинвариантности полей ξ_i, η_i эквивалентны следующим выражениям:

$$\frac{\partial x^j(y, z)}{\partial z^k} = \xi_i^j(x(y, z)) \omega_k^i(z), \quad \frac{\partial x^j(y, z)}{\partial y^k} = \eta_i^j(x(y, z)) \sigma_k^i(z). \quad (9)$$

Используя соотношения (9), перепишем формулу (7) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(X) * \tilde{f}_2(X) &= \tilde{f}_1(-i\hbar\partial_y + X_j\eta_i^j(x(y,z))\sigma^i(y)) \times \\ &\quad \times \tilde{f}_2(-i\hbar\partial_z + X_j\xi_i^j(x(y,z))\omega^i(z)) \cdot 1 \Big|_{y=z=0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из формулы (10) следует

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(X) * \tilde{f}_2(X) &= \tilde{f}_1(X)\tilde{f}_2(X) - i\hbar \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial X_s} \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial X_m} X_j \xi_{m,s}^j(0) + O(\hbar^2), \\ \tilde{f}_2(X) * \tilde{f}_1(X) &= \tilde{f}_1(X)\tilde{f}_2(X) - i\hbar \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial X_s} \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial X_m} X_j \xi_{s,m}^j(0) + O(\hbar^2). \end{aligned}$$

Здесь $\xi_{m,s}^j(0) \equiv \partial \xi_m^j(z)/\partial z^s$ при $z = 0$. Учет равенства $\xi_{m,s}^j(0) - \xi_{s,m}^j(0) = C_{sm}^k$ и определения скобок Пуассона (2), (8) приводит к следующему соотношению:

$$\{\tilde{f}_1(X), \tilde{f}_2(X)\}^{symb} = \{\tilde{f}_1(X), \tilde{f}_2(X)\}^{Lie} + O(\hbar).$$

3. Упорядочивание по Вейлю

Случай симметризованного упорядочивания, или, иначе, упорядочивания по Вейлю, обладает по сравнению с общим случаем рядом полезных свойств. Как показано выше, скобка Пуассона–Ли (2) и скобка Пуассона символов (8) совпадают. Однако в случае симметризованного упорядочивания справедливо более слабое утверждение.

Утверждение. При выборе канонических координат первого рода, или, что эквивалентно, при упорядочивании операторов по Вейлю, имеет место равенство:

$$\{X_i, \tilde{f}(X)\}^{symb} = \{X_i, \tilde{f}(X)\}^{Lie}, \quad i \in \overline{1, n}. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть операторной функции $f(\hat{X})$ соответствует символ $\tilde{f}(X)$, т.е. эти величины связаны соотношением (3). Выберем в группе Ли канонические координаты первого рода и введем параметрическое семейство операторных функций $f_\tau(\hat{X})$:

$$f_\tau(\hat{X}) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{X}} f(\hat{X}) e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat{X}}.$$

Согласно формуле (3) имеем:

$$\begin{aligned} f_\tau(\hat{X}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{X}} \hat{T}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat{X}} e^{-\frac{i}{\hbar}tX} f(X) dX dt = \int \exp \frac{i}{\hbar} \left(t e^{\frac{i}{\hbar}\tau\hat{X}} \hat{X} e^{-\frac{i}{\hbar}\tau\hat{X}} \right) \times \\ &\quad \times e^{-\frac{i}{\hbar}tX} f(X) \frac{dX dt}{(2\pi\hbar)^n} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int e^{\frac{i}{\hbar}t'X'} e^{-\frac{i}{\hbar}t'X'} f(X'A) dX' dt'. \end{aligned}$$

Здесь $t^j = A_k^j(\tau)t^k$, $X'_k = X_j(A^{-1}(\tau))_k^j$, $A(\tau)$ — матрица присоединенного представления. Мы воспользовались также равенствами

$$Xt \equiv X_k t^k = X' t', \quad dX' dt' = dX dt.$$

Убирая штрихи, получим

$$f_\tau(\hat{X}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \hat{T}(t) e^{-\frac{itX}{\hbar}} \tilde{f}(XA(\tau)) dXd t.$$

Иначе говоря, операторной функции $f_\tau(\hat{X})$ соответствует символ

$$\tilde{f}_\tau(X) = \tilde{f}(XA(\tau)).$$

Для окончания доказательства Утверждения осталось заметить, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau^j} f_\tau(\hat{X}) \right|_{\tau=0} = \frac{i}{\hbar} [\hat{X}_j, f(\hat{X})], \quad \left. \frac{\partial}{\partial \tau^j} \tilde{f}_\tau(X) \right|_{\tau=0} = \{X_j, \tilde{f}(X)\}^{Lie}.$$

■

Отметим еще одно полезное свойство симметрического упорядочивания. Пусть представление \hat{T} унитарно, т.е. операторы \hat{X} эрмитовы. Тогда

$$\hat{T}^+(t) = \hat{T}(-t)$$

и

$$(f(\hat{X}))^+ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int e^{\frac{itX}{\hbar}} \tilde{f}^*(X) \hat{T}^+(t) dt dX = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int e^{-\frac{itX}{\hbar}} \tilde{f}^*(X) \hat{T}(t) dt dX,$$

т.е. эрмитову сопряжению операторной функции соответствует комплексное сопряжение ее символа. В частности, самосопряженным операторам при вейлевском упорядочивании соответствуют вещественные функции на \mathfrak{g}^* .

4. Примеры

4.1. Алгебра Гейзенберга

Простейшим нетривиальным примером является трехмерная алгебра Гейзенберга. С другой стороны, алгебра Гейзенберга играет огромную роль в квантовой механике, и на ее основе базируются важные для приложений конструкции (например, когерентные состояния, континуальные интегралы и т.д.)

Трехмерная алгебра Гейзенберга с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ имеет одно ненулевое коммутационное соотношение $[e_1, e_2] = e_3$. Определим неприводимое представление этой алгебры в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(R^1, dq)$:

$$\hat{X}_1 \equiv \hat{P} = -i\hbar\partial_q, \quad \hat{X}_2 \equiv \hat{Q} = q, \quad \hat{X}_3 = 1$$

и обозначим через P, Q символы операторов \hat{P}, \hat{Q} соответственно, единичному оператору \hat{X}_3 поставим в соответствие число 1. Как говорилось выше, в зависимости от выбора упорядочивания операторов мы будем иметь различные виды звездного произведения.

4.1.1. qp-символы

Выберем упорядочивание, при котором в каждом мономе оператор \hat{Q} стоит левее оператора \hat{P} , т.е.

$$f(\hat{Q}, \hat{P}) = \sum_{j,k} a_{jk} \hat{Q}^j \hat{P}^k. \quad (12)$$

Такому выбору упорядочивания соответствует следующий выбор координат: $\hat{T}(t) = \exp(\frac{i}{\hbar} t^3 \cdot 1) \exp(\frac{i}{\hbar} t^2 \hat{Q}) \exp(\frac{i}{\hbar} t \hat{P})$, и операторная функция (12) будет иметь символ

$$\tilde{f}(Q, P) = f(Q, P) = \sum_{j,k} a_{jk} Q^j P^k. \quad (13)$$

Функция композиции $x(y, z)$ в этих координатах выглядит следующим образом:

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad x_3 = y_1 z_2 + y_3 + z_3.$$

Подстановка данной функции композиции в формулы (5), (6) дает

$$f_1(Q, P) * f_2(Q, P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\frac{i}{\hbar}(Q-Q_2)(P-P_1)} f_1(Q, P_1) f_2(Q_2, P) dQ_2 dP_1. \quad (14)$$

По известной функции композиции легко вычислить явный вид лево- и правоинвариантных векторных полей и форм:

$$\begin{aligned} \xi_1 = \partial_1, \quad \xi_2 = \partial_2 + x_1 \partial_3, \quad \xi_3 = \partial_3, \quad \omega^1 = dx_1, \quad \omega^2 = dx_2, \quad \omega^3 = -x_1 dx_2 + dx_3; \\ \eta_1 = -\partial_1 - x_2 \partial_3, \quad \eta_2 = -\partial_2, \quad \eta_3 = -\partial_3, \quad \sigma^1 = -dx_1, \quad \sigma^2 = -dx_2, \quad \sigma^3 = x_2 dx_1 - dx_3. \end{aligned}$$

Здесь принято обозначение $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$. Эквивалентная формула (10) примет вид

$$\begin{aligned} f_1(Q, P) * f_2(Q, P) &= f_1(-i\hbar\partial_{y_2} + X_j \eta_i^j(x) \sigma_2^i(y), -i\hbar\partial_{y_1} + X_j \eta_i^j(x) \sigma_1^i(y)) \times \\ &\times f_2(-i\hbar\partial_{z_2} + X_j \xi_i^j(x) \omega_2^i(z), -i\hbar\partial_{z_1} + X_j \xi_i^j(x) \omega_1^i(z)) \cdot 1|_{y=z=0} = \\ &= f_1(X_2, -i\hbar\partial_{y_1} + X_1) f_2(X_2 + y_1 X_3, X_1)|_{y=z=0}. \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение $X_1 = P$, $X_2 = Q$, $X_3 = 1$, окончательно получим

$$f_1(Q, P) * f_2(Q, P) = f_1(Q, P - i\hbar\partial_{y_1}) f_2(Q + y_1, P)|_{y_1=0}. \quad (15)$$

4.1.2. pq-символы

Пусть теперь символу $f(Q, P)$ (13) соответствует операторное выражение, в котором операторы \hat{P} стоят левее операторов \hat{Q} :

$$f(\hat{Q}, \hat{P}) = \sum_{j,k} a_{jk} \hat{P}^k \hat{Q}^j.$$

Выбранному упорядочиванию операторов соответствует локальное представление $\hat{T}(t) = \exp(\frac{i}{\hbar} t \hat{P}) \exp(\frac{i}{\hbar} t^2 \hat{Q}) \exp(\frac{i}{\hbar} t^3 \cdot 1)$. Функция композиции в этом случае имеет вид:

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad x_3 = -y_2 z_1 + y_3 + z_3.$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, получим формулы для композиции символов:

$$f_1(Q, P) * f_2(Q, P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{i}{\hbar}(Q-Q_2)(P-P_1)} f_1(Q_1, P) f_2(Q, P_2) dQ_1 dP_2, \quad (16)$$

$$f_1(Q, P) * f_2(Q, P) = f_1(Q + i\hbar\partial_{y_2}, P) f_2(Q, P + y_2)|_{y_2=0}. \quad (17)$$

4.1.3. Символы Вейля

Выбору симметризованного упорядочивания соответствует выбор канонических координат первого рода: $\hat{T}(t) = \exp(\frac{i}{\hbar}(t^1\hat{P} + t^2\hat{Q} + t^3 \cdot 1))$. Функция композиции в этом случае имеет вид:

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad x_3 = y_3 + z_3 + (y_1z_2 - y_2z_1)/2.$$

Подставляя явный вид функций композиции в формулы (5), (6), (10), получаем

$$f_1(Q, P) * f_2(Q, P) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int e^{\frac{2i}{\hbar}((Q-Q_2)P_1 + (Q_1-Q)P_2 + (Q_2-Q_1)P)} \times f_1(Q_1, P_1) f_2(Q_2, P_2) dQ_1 dP_1 dQ_2 dP_2; \quad (18)$$

$$f_1(Q, P) * f_2(Q, P) = f_1(Q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial y_2}, P - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial y_1}) f_2(Q + y_1, P + y_2) \Big|_{y_1=y_2=0}. \quad (19)$$

Выше, исходя из общих формул (5), (6), (10), мы получили для частного случая алгебры Гейзенберга выражения для звездного произведения. Следует отметить, что формулы (14)–(18) не являются оригинальными и приведены в монографии [3], в которой они выведены из других соображений.

4.2. Евклидова группа $E(2, \mathbb{R})$

Алгебра Ли вещественной трехмерной евклидовой группы имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

В канонических координатах второго рода $\hat{T}(t) = \exp(t_1 e_1) \exp(t_2 e_2) \exp(t_3 e_3)$ символу

$$f(X_1, X_2, X_3) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} X_1^i X_2^j X_3^k$$

соответствует оператор

$$f(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} \hat{X}_1^i \hat{X}_2^j \hat{X}_3^k.$$

Функция композиции в этих координатах выглядит следующим образом:

$$x_1 = y_1 + z_1 \cos y_3 - z_2 \sin y_3, \quad x_2 = y_2 + z_2 \cos y_3 + z_1 \sin y_3, \quad x_3 = y_3 + z_3.$$

Обобщенная функция $K(X; Y, Z)$ согласно формуле (6) имеет вид:

$$K(X; Y, Z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} \int \exp \frac{i}{\hbar} ((y_1 + z_1 \cos y_3 - z_2 \sin y_3)X_1 + (y_2 + z_2 \cos y_3 + z_1 \sin y_3)X_2 - y_1 Y_1 - y_2 Y_2 - y_3 Y_3 - z_1 Z_1 - z_2 Z_2 - z_3 Z_3) dy dz = \delta(X_1 - Y_1) \times \\ \times \delta(X_2 - Y_2) \delta(X_3 - Z_3) \int \delta(Z_1 - X_1 \cos y_3 - X_2 \sin y_3) \delta(Z_2 - X_2 \cos y_3 + X_1 \sin y_3) \times \\ \times \exp \frac{i}{\hbar} (y_3(X_3 - Y_3)) dy_3 / 2\pi\hbar.$$

Подставляя это выражение в формулу (5), получим

$$f_1(X) * f_2(X) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int f_1(X_1, X_2, Y) f_2(X_1 \cos y + X_2 \sin y, X_2 \cos y - X_1 \sin y, X_3) \times \\ \times e^{\frac{i}{\hbar} y(X_3 - Y)} dY dy.$$

Используя интегральное представление дельта-функции, эту формулу можно переписать в эквивалентном виде:

$$f_1 * f_2 = f_1(X_1, X_2, X_3 - i\hbar\partial_y) f_2(X_1 \cos y + X_2 \sin y, X_2 \cos y - X_1 \sin y, X_3)|_{y=0}.$$

Заключение

В настоящей работе мы вывели формулы, которые позволяют заменить работу с операторными функциями (от некоммутирующих переменных) из обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ на работу с ассоциативной алгеброй \mathcal{A} функций на $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, т.е. функций от коммутирующих переменных. Особенно полезной, на наш взгляд, является формула (11). С помощью этой формулы удалось строго обосновать алгоритм нахождения алгебры инвариантных операторов на однородных пространствах, предложенный в работе [4]. Из этого доказательства, как следствие, получается утверждение о совпадении слабо коммутативных и коммутативных пространств. Приведение этого доказательства далеко выходит за рамки настоящей статьи и будет опубликовано в отдельной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А.А. Геометрическое квантование / Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.4. Динамические системы — 4. М.: ВИНТИ, 1985. С.141-178.
2. Kontsevich M. Deformation Quantization of Poisson Manifolds. – E-print arXiv: q-alg/9709040.
3. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
4. Широков И.В. Тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т.129, N.1. С.3-13.

ЗАВИСИМОСТЬ КАК ПЕРВИЧНАЯ КАТЕГОРИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

О.С. Ёлкина

Исследуется представление о зависимости как одной из первичных категорий социально-экономической деятельности.

Категория зависимости занимает очень важное место в науке. В естественных науках «зависимости принимают главным образом вид различных законов природы. Как правило, отыскивается вид зависимости между явлением или множеством явлений a и явлением b или множеством явлений B » [6, с. 170]. Однако зависимость в более широком смысле является социальной структурой того, что мы называем отношениями. Следовательно, одной из первичных категорий социально-экономической деятельности является зависимость.

Без зависимости осуществление деятельности невозможно, а следовательно, невозможно и управление. Это подтверждают многочисленные утверждения: «Управляющее воздействие предполагает связи людей по поводу осуществления цели и общих функций управления» [2, с. 45]. В основе таких связей лежит волевой характер управления, что непосредственно выражается в «определенной соподчиненности воле людей, являющихся участниками управленческих отношений» [3, с. 302-304], а значит, определенной зависимости.

Люди управляют людьми; управляемые и управляющие наделены волей и сознанием, которые лежат в основе их связей. Однако воля и сознание первых и вторых не идентичны и не равны. Это связано с тем, что управляющие наделены возможностью оказывать определенное воздействие на управляемых. И это воздействие носит сознательно-волевой характер: «управление людьми предполагает определенную власть над ними, а ее носителем является соответствующий субъект управления» [2, с. 46]. Это свидетельствует не только о наличии зависимости, но и об определенном ее типе.

Обратимся к исследованию категории зависимости. Существуют разнообразные точки зрения на эту категорию. В толковых словарях зависимость определяется как «подчиненность другим, чужой воле, чужой власти при отсутствии самостоятельности, свободы» [4, с. 172]. «Зависеть» – означает «полагаться на кого-либо», «зависимый» – значит «нуждающийся в помощи другого для поддержки» [8, с. 44]. «Зависимость – в общем смысле, – отношения между

индивидами или группами, при которых одна из сторон подчинена другой и ее нормальное функционирование в рамках данной социальной системы обусловлено таким подчинением. Отношения зависимости включают как условия неперенное неравенство их участников, фиксацию взаимного положения партнеров в парных категориях статуса, а также предполагают, что подчиненное положение одной из сторон обеспечивает ей частичную компенсацию в форме помощи, покровительства или защиты» [5, с. 54].

Несмотря на многообразие определений этой категории, очевидна идея отношений зависимости: наличие подчиненного и подчиняющего.

Представляет интерес определение, которое дали Шмидц Д. и Гудин Р. Это определение позволяет выделить не только отношения подчинения, но целый ряд переменных для теоретического и эмпирического анализа. По их, Шмидца Д. и Гудина Р., мнению, суть отношений зависимости и подчинения заключается в следующей логической цепочке. Субъект X зависим от субъекта Y в получении некоторого блага, если:

- 1) X получает Z от Y ;
- 2) X нуждается Z с целью удовлетворения некоторых жизненных потребностей;
- 3) Y единственный для X источник Z .

Зависимость X может эксплуатироваться Y , потому что:

- 4) Y по своему усмотрению контролирует распределение Z ;
- 5) баланс власти между X и Y ассиметричен, в нем X более зависим от необходимых ему ресурсов, чем Y [7, с. 116-118].

Для анализа, в частности, субъектами X и Y могут выступать: индивиды; социальные группы; предприятия; рынки; регионы; государства; международное сообщество и т.д. Благом Z могут являться ресурсы: жизнеобеспечения; политического влияния; эмоциональной поддержки; самореализации и т.д. [1, с. 15].

Однако обратимся к содержанию категории зависимости на примере близкой нам концепции, базирующейся на понятии «интерес».

Любая социальная система: индивид, группа лиц, институт и т.д. – обладает собственной структурой, которая имеет два компонента: 1) внутреннюю и внешнюю составляющую, которые в свою очередь связаны 2) отношениями между ними. Внутренняя структура представляет собой систему интересов, внешняя – элементы поведения, отношения – деятельность, в процессе которой реализуются интересы системы, превращаясь в поведение: «В качестве внутренней структуры системы будем рассматривать множество интересов системы и множество отношений между ними; внешнюю структуру представим себе как множество элементов поведения системы вместе с множеством отношений между элементами этого поведения. Что же касается отношения между внешней и

внутренними структурами, то для начала предположим, что в процессе каждой деятельности системы S реализуется один из аспектов ее интересов» [6, с. 171-172]. То есть в процессе деятельности реализуется один из аспектов поведения социальной системы.

Очевидно, что категория зависимости относится одновременно к обеим структурам системы. Точность описания определенной зависимости опирается на то, насколько точно описан характер внешней и внутренней структуры данной системы. Таким образом, понятие зависимости систем является компонентом поведения данных систем. Если зависимость является компонентом поведения системы, то она может быть наблюдаемой.

В процессе деятельности индивид стремится реализовать один из своих интересов. Последствием деятельности могут быть три типа ее результатов.

Деятельность может привести к конкретному результату, если она удовлетворяет конкретный интерес. Например, производство продукта.

Результаты деятельности могут быть менее ощутимы, если аналогичные результаты могут быть достигнуты простым изменением среды системы S .

И, наконец, если в результате деятельности интересы реализуются непосредственно, то деятельность не имеет конкретного результата и не приводит к изменениям среды системы S .

Таким образом: «... деятельность... является единственным первичным средством реализации интересов системы S , поскольку различные продукты и изменения среды системы S фактически представляют собой результаты ее деятельности» [6, с. 172-173].

Поведение системы определяется двумя параметрами: *необходимостью*, которая вытекает из желания реализовать некоторый интерес; и *возможностью* как условием свободы реализации интереса. Большинство систем существует не изолированно, а включены в среду других системы. Поэтому: «... поведение определяется не только необходимостью реализации конкретных видов деятельности системы S как выражения ее внутренней структуры интересов, но также и возможностями реализации этих форм деятельности, определяемыми средой функционирования данной системы, ... то есть интересами некоторой системы, – в которую включена интересующая нас система S как составная часть. В этом отношении поведение системы S зависит от поведения системы, в которую она включена» [6, с. 173].

Поэтому большое значение имеет среда, в которую включена система S , поскольку каждая система является частью другой системы. Признание того факта, что каждая система имеет среду, означает существование зависимости между двумя внешними структурами систем: «... система $S1$ зависит от системы $S2$, если необходимость по крайней мере одного вида деятельности этой системы отлична от возможности его реализации, определяемой системой S » [6, с. 180].

Сила зависимости определяется предсказуемостью поведения среды, в которую включена система $S1$. Чем менее предсказуемо поведение среды, тем сильнее зависимость системы $S1$: «... если поведение доминирующей системы можно предсказать однозначно, положение зависимой системы от доминирую-

щей оказывается гораздо более благоприятным, ее зависимость от доминирующей системы гораздо слабее, чем в случае, когда поведение доминирующей системы непредсказуемо» [6, с. 181]. В результате зависимая система выбирает данный тип поведения исходя, не только из необходимости реализовать свой интерес, но и из интересов доминирующей системы.

Если среда системы состоит из нескольких систем, влияющих на систему S_1 , то зависимость системы S_1 от среды можно рассматривать как средство анализа внутренней структуры среды.

В то же время зависимость можно рассматривать и в информационном аспекте: «... отношения зависимости можно представить себе в виде «каналов информации», по которым эта информация «передается»... В качестве информации мы рассматриваем каждый из элементов новостей или сигналов, которые влияют на принятие решения» [6, с. 183]. Особенность здесь заключается в том, что информация — это только та новость (сигнал, индикатор), которая затрагивает интересы системы.

Воздействуя на средства удовлетворения интересов, мы определяем характер основных зависимостей. При изменении воздействий изменяются зависимости, что приводит к изменению поведения людей. Следовательно, если интерес — это осознанная потребность, то обладание предметами потребностей позволяет управлять поведением их носителей.

Информация связана с силой зависимости системы. И информация является фактором, который изменяет процесс деятельности. Обладание информацией снижает неопределенность деятельности, то есть информация может изменить зависимость, влияя на значимость критерия для социальной системы, а если критериев существует несколько — влияя на их иерархию: «... информация... увеличивает или уменьшает степень заинтересованности или изменяет упорядочение интересов. Релевантным является отношение, при котором с увеличением количества информации в зависимой системе ее зависимость от доминирующей системы ослабевает» [6, с. 184].

Следовательно, если мы стремимся *контролировать* поведение зависимой системы, в первую очередь мы должны контролировать информацию, которая отражает ее интересы. В то же время зависимость проявляется в поведении и выражает интересы системы.

Доминирующая система вынуждает зависимую систему действовать определенным образом, поскольку обладает возможностью удовлетворения интересов. Для этого доминирующая система использует практику «поощрения» за приближение поведения к желаемой линии поведения и «наказания» за удаление от нее: «... зависимость можно рассматривать как некоторую «силу», вынуждающую систему действовать или изменяться определенным образом... Эта сила пропорциональна, прежде всего, интенсивности возможного «наказания», то есть видов деятельности доминирующей системы S_2 , вызванных тем, что действия зависимой системы S_1 шли вразрез с интересами или инструкциями системы S_2 . . . Аналогичным образом может иметь место «поощрение» в случае, когда деятельность зависимой системы S_1 согласуется с интересами доминирующей системы S_2 . Эта «сила» должна быть пропорциональна правдоподобно-

сти вынесения наказания или поощрения и пропорциональна полезности соответствующей системы или индивида – должен соблюдаться некоторый «баланс» интересов» [6, с. 184-185].

Зависимость вынуждает зависимую систему к определенному поведению, которое относительно легко можно предсказать, поскольку она реагирует на информацию доминирующей системы и старается согласоваться с действующей силой (зависимостью). Подобное поведение, которое приравнивается к поведению других систем, в социологии обычно называется ролью: «это такое отношение, при котором множество ролей системы S_1 и S_2 становится ограниченным. Размеры этого множества, очевидно, пропорциональны силе зависимости. Если зависимость максимальна, в него входит лишь одна роль. Зависимость следует расценивать как силу, принуждающую нас к выполнению определенных ролей или отказу от них и к выполнению других ролей. Иначе говоря, зависимость объединяет множество вариантов поведения зависимой системы» [6, с. 187-188].

Следовательно, количество ролей, выполняемых зависимой системой, свидетельствует о силе зависимости от доминирующей системы. Совокупность ролей, которая отражает интересы, постепенно институализируется и превращается в различные социальные классы, группы, которые «фактически являются не чем иным, как особыми подсистемами социальной системы, члены которых вынуждены принять определенные роли под влиянием некоторых зависимостей, например, отношения собственности» [6, с. 189]. Таким образом, интересы определенным образом изменяют социальную реальность.

С одной стороны, интересы определяются зависимостью, с другой — зависимость формируется интересами, лежащими в ее основе. Здесь нет противоречия, все определяется аспектом рассмотрения: статического или динамического. Причем обе структуры как бы «дрейфуют» относительно друг друга, то есть достаточно автономны. Поэтому логичным выступает следующее определение: «зависимость есть противоречие между возможностью и необходимостью реализации некоей деятельности данного социального субъекта, которое разрешается при выполнении им соответствующей роли. Зависимость является причиной человеческих поступков и их результатом» [6, с. 190].

Таким образом, между возможностью и необходимостью лежит роль. В процессе исполнения роли (деятельности) зависимость, лежащая в ее основе, может быть трансформирована. «Посредством своих осознанных и неосознанных действий человек постоянно изменяет возможность реализации им определенных форм деятельности, а значит, и возможность реализации интересов, что, в конечном счете, приводит к появлению совершенно новых возможностей и интересов. Тем самым он изменяет общее поле зависимостей или то, что можно назвать «социальным пространством» [6, с. 190-191]. Последнее, с одной стороны, объективно для человека (является для него «данным»), с другой — человек может изменять зависимость (создавая новую картину социального пространства в определенной точке или в целом). Во втором случае это определяется личными характеристиками человека (биогенетическими) и социальными условиями.

Можно рассматривать историю социального пространства отдельного человека (жизненный путь) в их определенной совокупности (общность) в различных исторических контекстах. Основным фактором, изменяющим как форму, так и содержание социального пространства, является прежде всего деятельность. Правомерно всю историю человеческого общества рассматривать в аспекте зависимостей, их соотношения и взаимодействия. «Общество может изменяться и развиваться лишь благодаря тому, что в нем постоянно возникают и исчезают несоответствия между необходимостями и возможностями реализации данных форм деятельности, а поэтому и интересов, благодаря тому, что внутри него постоянно возникают новые противоречия между возможностями и необходимостями, благодаря тому, что определенные зависимости постоянно возникают и отмирают. История человечества является на самом деле историей зависимостей между людьми» [6, с. 190-191].

Другое понятие — социологическое пространство, элементами которого является «любая возможная роль, которую может принимать на себя лишь один социальный объект. . . Роль — это часть результирующего поведения, которая определяется взаимодействием необходимости различных форм деятельности объекта и его возможностей деятельности, соответствующей им в рамках данного социального пространства. Таким образом, каждая роль соответствует данной зависимости. Каждый вариант поведения социального субъекта фиксируется тогда в виде множества ролей, которое он занимает в социальном пространстве, а также множества соответствующих отношений зависимости» [6, с. 192]. Поэтому индивид находится одновременно в социальном пространстве (как субъект — объект зависимости) и в социологическом (как носитель определенной роли).

Следовательно, можно сделать следующие обобщения относительно зависимости.

- 1) Данная система может быть независима (то есть ее зависимость «равна нулю» на объекте социальной реальности) только сама от себя (две различные системы всегда зависимы).
- 2) Если система $S1$ зависит от системы $S2$, то система $S2$ в равной степени зависит от $S1$ (в «равной степени» означает, что меры зависимости равны).
- 3) Если система $S3$ зависит от системы $S1$, то зависимость $S3$ от $S1$ не уменьшается, если «вставить» систему $S2$ в отношение зависимости между $S3$ и $S1$. Это правомерно в том случае, если зависимость между $S3$ и $S1$ анализируется через систему $S2$, которая является зависимой по отношению к $S1$ и доминирующей по отношению к $S3$ [6, с. 191-192].

Каждая роль как элемент социального пространства характеризуется зависимостью с учетом других ролей, то есть своим «социальным расстоянием». Тогда для любой системы верны следующие утверждения:

- 1) причиной действия системы $S1$ является различие между необходимостью и возможностями реализации ее деятельности с учетом зависимости этой системы от других систем;
- 2) система $S1$ имеет тенденцию к продолжению и выполнению или к принятию вновь таких ролей, которые минимизируют ее зависимость от других систем и максимизируют зависимость этих систем от системы $S1$;
- 3) зависимость как противоречие между необходимостью и возможностями реализации деятельности системы $S1$ (по отношению к среде) изменяется в случае, если эти возможности изменяются как выражение изменения свойств социального пространства, или если изменяется внутренняя структура интересов $S1$; при этом зависимость отражает необходимость для $S1$ изменить формы ее деятельности, или если имеет место и то и другое [6, с. 194].

Одно из основных свойств социального пространства — изменение зависимостей. То есть расстояние в этом пространстве постоянно изменяется, а следовательно, изменяются и свойства этого пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балабанова Е.С. Социально-экономическая зависимость: теория, история и современность. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2004. 269 с.
2. Козлов Ю.М., Фролов Е.С. Научная организация управления и право. М.: Изд-во МГУ, 1986. 246 с.
3. Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. Т. 18.
4. Ожегов С.И. Словарь русского языка / Под ред. Н.Ю. Шведовой, 18-е изд. М.: Прогресс, 1989.
5. Социально-экономические отношения и соционормативная культура. М.: Прогресс, 1986.
6. Харват Ф., Кучера Я. К теории социальной зависимости // Математика в социологии. Моделирование и обработка информации / Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 552 с.
7. Schmidtz, D., Goodin, R. Social Welfare and Individual Responsibility. For and against. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P.116-118.
8. Webster's Dictionary and Thesaurus. Ashland: Landoll, 1993.

НАХОЖДЕНИЕ ВРЕМЕНИ ЗАРАЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ СЕТИ ВИРУСАМИ НА ОСНОВЕ СЕТИ ФОРМАЛЬНЫХ НЕЙРОНОВ

С.В. Белим, С.Ю. Белим

Рассмотрена модель локальной вычислительной сети как сети формальных нейронов со ступенчатой функцией отклика. Проведено моделирование распространения вредоносных программ в локальной сети. Показана зависимость времени распространения вирусов от топологии сети.

Возможность моделирования распространения «вирусных» программ в локальной вычислительной сети вытекает из того, что каждая рабочая станция может находиться только в двух состояниях – «зараженном» и «незараженном». В качестве возможных процессов взаимодействия рабочих станций будем рассматривать обмен информацией. В данной работе рассматривается только случай одноранговой сети, поэтому средняя интенсивность обмена информацией между любой парой рабочих станций считается одной и той же. Также необходимо предусмотреть защиту от вирусов, которая может быть двух видов. Во-первых, это межсетевые экраны, препятствующие проникновению вредоносных программ, а во-вторых, антивирусные программы, обнаруживающие «вирусы» и уничтожающие их.

Построим формальную модель вычислительной сети, отражающую процесс распространения «вирусных» программ. Прежде всего сопоставим локальной сети невзвешенный граф, вершины которого представляют собой отдельные рабочие станции. Случай невзвешенного графа соответствует одноранговой сети, для рассмотрения сети с выделенным сервером необходимо ребрам графа сопоставить веса, соответствующие относительной интенсивности информационного обмена между двумя рабочими станциями.

Зараженность i -ой рабочей станции в момент времени t будем описывать величиной $S_i(t)$, которая может принимать два значения:

$$S_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если «заражен»;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Каждую рабочую станцию будем представлять как формальный нейрон. При этом роль синапсов будут играть ребра графов, а величина $S_i(t)$ – характеристика аксона. Как и в других моделях, время в компьютерной сети

можно рассматривать как дискретную величину, тогда состояние отдельного нейрона в момент времени t будет определяться сигналами, поступившими в предыдущий момент времени $t - 1$. Сигнал, передаваемый по синапсам, может иметь два значения – 0 или 1. Ноль соответствует информации, не содержащей вредоносных программ, а единица – распространению «вируса». Будем считать вирусы активными, то есть «зараженная» рабочая станция передает только «зараженную» информацию.

Наличие межсетевых экранов у рабочих станций будет выражаться величиной r_i , определяющей пороговое значение объема вредоносной информации, выше которого происходит переключение нейрона в единичное значение, что соответствует заражению рабочей станции. Однако это пороговое значение может повышаться или понижаться в результате деятельности пользователя. Причем деятельность пользователя носит случайный характер как по времени воздействия на систему защиты, так и по величине. В результате выполнения задач, решаемых на рабочей станции, уровень защиты может как повышаться, так и понижаться. Кроме того, пользователь может инициировать процессы, которые могут «вылечивать» зараженный компьютер. Этот процесс также носит случайный характер. Чтобы учесть описанные случайные процессы, в модель необходимо ввести случайную величину, воздействующую на уровень защищенности. В дальнейшем межсетевой экран в момент времени t будет записываться в виде $r_i(1 - \zeta(i, t))$, где $\zeta(i, t)$ – случайная величина с нормальным распределением.

Важную роль в нейронных сетях играет функция отклика отдельного нейрона $\theta(v)$, где v – сигнал, подаваемый на синапсы. В данной работе был рассмотрен простейший случай ступенчатой функции отклика:

$$\theta(v) = \begin{cases} 1, & \text{если } v \geq 0; \\ 0, & \text{если } v < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, состояние рабочей станции в i -ом узле в момент времени t может быть найдено из соотношения:

$$\begin{aligned} ot_i &= S_i + \sum S_j(t - 1) - r_i(1 - \zeta(i, t_{n-1})), \\ S_i(t) &= \theta(ot_i - r_i(1 - \zeta(i, t - 1))) = \begin{cases} 1, & \text{если } ot \geq r_i(1 - \zeta(i, t - 1)); \\ 0, & \text{если } ot < r_i(1 - \zeta(i, t - 1)). \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ot_i – суммарное воздействие «вирусов» соседних узлов на i -ую рабочую станцию, суммирование производится по ближайшим соседям (индекс j пробегает номера узлов, непосредственно связанных с i -ым). Рабочая станция переходит в зараженное состояние, если воздействие вирусов превышает порог защиты.

Введем вектор состояния системы в момент времени $V(t)$ в момент времени t в пространстве $\{0, 1\}^N$, где N – количество узлов сети. Координатами $V(t)$ будут величины $S_i(t)$:

$$V(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_N(t)). \quad (4)$$

Обозначим через M матрицу связности графа сети, тогда эволюция системы во времени будет описываться уравнением:

$$V(t) = \Theta(V(t-1) + M \cdot V(t-1) - R \cdot (I - Z(t))). \quad (5)$$

Здесь Θ - ступенчатая вектор-функция, $R = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ - вектор пороговых значений уровня защиты рабочих станций, I - единичная матрица, $Z(t)$ - матрица случайных величин.

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \zeta_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \zeta_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_N(t) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для характеристики скорости заражения введем время перехода локальной сети в зараженное состояние T как минимальное время, через которое все рабочие станции оказываются «зараженными» ($S_i(T) = 1, i = \overline{1, N}$).

Очевидно, что наибольшим временем заражения обладает линейная цепочка с начальным заражением крайней рабочей станции, так как в каждый момент времени может быть заражена только одна рабочая станция, и каждый узел испытывает воздействие только одного соседнего узла. Обозначим время заражения линейной цепочки через T_0 . Для сетей, обладающих другой топологией, введем относительное время заражения:

$$\tau = \frac{T}{T_0}. \quad (7)$$

В начальный момент времени заражена только одна рабочая станция $S_1(0) = 1, S_2(0) = 0, \dots, S_N(0) = 0$.

Авторами были рассмотрены различные топологии локальных вычислительных сетей, для которых уравнение (1) решалось численно. Для каждой топологии локальной сети время заражения вычислялось 10 раз с дальнейшим усреднением. Так, для широко распространенных топологий «кольцо» и «звезда» были получены значения $T_r = 0.5$ и $T_s = 2/N$ при $r_i = 0.5$ для всех $i = \overline{1, N}$.

Далее был осуществлен поиск схем соединения $N = 20$ рабочих станций, обладающих наибольшим относительным временем заражения τ для одинакового порогового значения $r = 0.5$ для всех рабочих станций.

Поиск наиболее устойчивых к заражению топологий сети осуществлялся методом Монте-Карло. В качестве исходной бралась матрица связности, состоящая только из единиц. Затем применялся следующий алгоритм:

1. Изменяем выбранный случайным образом элемент матрицы.
2. Вычисляем время заражения.
3. Если, в результате такого изменения, время заражения увеличивается, то новая топология считается более выгодной и оставляется, иначе происходит возврат к прежней матрице связности.
4. Переход к пункту 1.

Алгоритм выполняется до тех пор, пока изменения в матрице связности не приводят к увеличению времени заражения. При реальных расчетах вычисления прерывались, если пятьдесят подряд следующих попыток изменения матрицы отбрасывались.

Вычисления показали, что наличие петель и ответвлений в линейной цепочке существенно уменьшает время заражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейроинформатика / А.Н.Горбань, В.Л.Дунин-Барковский, А.Н.Кирдин и др. Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1998.
2. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника. М.: Мир, 1992.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ MIDI-ФОРМАТОВ ДЛЯ СТЕГАНОГРАФИЧЕСКИХ КОНТЕЙНЕРОВ

И.В. Русинович

На основе проведенного исследования и анализа современных стеганографических методов и сфер их применения предлагается новый способ скрытия секретной информации в файлах формата MIDI. Приводится программная реализация разработанного метода и краткий анализ полученных результатов.

1. Введение

Задача надежной защиты информации от несанкционированного доступа является одной из древнейших и не решенных до настоящего времени проблем. Способы и методы скрытия секретных сообщений известны с давних времен, причем данная сфера человеческой деятельности получила название стеганография. Это слово происходит от греческих слов *steganos* (секрет, тайна) и *grapho* (запись) и таким образом означает буквально «тайнопись», хотя методы стеганографии появились, вероятно, раньше, чем появилась сама письменность. В дальнейшем для защиты информации стали использоваться более эффективные на время создания методы кодирования и криптографии.

Криптография и стеганография представляют собой два метода скрытия сообщений, которые, хотя и взаимно дополняют друг друга, тем не менее идентичными не являются.

- **Криптография.** При помощи шифрования происходит изменение содержания послания или файла так, что оно становится нечитаемым для всякого, кто не является авторизованным получателем. Последний, однако, имеет специальный ключ, используя который можно «открыть» файл и прочитать в том виде, как он создавался изначально отправителем. Зашифрованные сообщения не скрываются, так что их отправку и получение можно легко обнаружить и отследить. Если в дальнейшем будет выявлено использованное при шифровании средство, то взломщику кодов останется только подобрать ключ для расшифровки сообщения.

- **Стеганография.** Можно рассматривать стеганографию как мощный метод шифрования. С ее помощью те, кто обменивается информацией, пытаются скрыть сам факт переписки от глаз стороннего наблюдателя. В отличие от криптографии, стеганографию невозможно обнаружить. Часто стеганография используется наряду с шифрованием. Благодаря такой комбинации, закодированное и невидимое сообщение становится полностью защищенным от перехвата.

Хорошо известны различные способы скрытого письма между строк обычного незащищаемого письма: от применения молока до использования сложных химических реакций с последующей обработкой при чтении.

Другие методы стеганографии включают использование микрофотоснимков, незначительные различия в написании рукописных символов, маленькие проколы определенных напечатанных символов и множество других способов по скрытию истинного смысла тайного сообщения в открытой переписке.

Компьютерные технологии придали новый импульс развитию и совершенствованию стеганографии, появилось новое направление в области защиты информации - компьютерная стеганография [1].

Цифровые средства коммуникаций стимулируют появление новых возможностей, в том числе для решения уже известных задач. В качестве примеров можно привести задачи скрытой коммуникации, новые средства защиты авторских прав в области цифровой аудио- и видеоиндустрии, встраивание серийных номеров в программный продукт для отслеживания пиратского его распространения и т.д. Существует много весьма специфических приложений стеганографии в различных областях. Например: военная разведка, где нужны средства скрытых коммуникаций в цифровых средах; органы правосудия и контрразведки, которые нуждаются как в скрытых коммуникациях, так и в доступе к трафику для обнаружения фактов скрытых коммуникаций и для их извлечения, хотя это в настоящее время практически невозможно; технологии, используемые в электронной коммерции и в электронных платежах, где методы стеганографии необходимы как средство аутентификации источника сообщения с помощью электронной подписи; обеспечение защиты прав личности, поскольку стеганография дает возможность исключить или затруднить контроль личной переписки как криминальными элементами, так и государственными органами.

Современный прогресс в области глобальных компьютерных сетей и средств мультимедиа привел к разработке новых методов, предназначенных для обеспечения безопасности передачи данных по каналам телекоммуникаций и использования их в необъявленных целях. Эти методы, учитывая естественные неточности устройств оцифровки и избыточность аналогового видео- или аудиосигнала, позволяют скрывать сообщения в компьютерных файлах (контейнерах). Причем, в отличие от криптографии, данные методы скрывают сам факт передачи информации. В качестве носителя секретной информации может быть использован файл любого типа. Например, секретная информация может быть встроена в текстовый файл, в файлы аудио или видео, в файл изображения, в текст программы и даже в заголовочную часть IP-пакетов. Другими словами,

скрытая (дополнительная) информация может быть встроена в любой файл, если он занимает больше места, чем это минимально требуется.

Как и любые инструменты, стеганографические методы требуют к себе внимания и осторожного обращения, так как могут быть использованы как для целей защиты, так и для целей нападения.

2. Компьютерная стеганографии и стеганографические методы

2.1. Основные принципы компьютерной стеганографии и области ее применения

К. Шеннон дал нам общую теорию тайнописи, которая является базисом стеганографии как науки. В современной компьютерной стеганографии существует два основных типа файлов: сообщение — файл, который предназначен для скрытия, и контейнер — файл, который может быть использован для скрытия в нем сообщения. При этом контейнеры бывают двух типов. Контейнер-оригинал (или «пустой» контейнер) — это контейнер, который не содержит скрытой информации. Контейнер-результат (или «заполненный» контейнер) — это контейнер, который содержит скрытую информацию. Под ключом понимается секретный элемент, который определяет порядок занесения сообщения в контейнер.

Основными положениями современной компьютерной стеганографии являются следующие [3]:

1. Методы скрытия должны обеспечивать аутентичность и целостность файла.
2. Предполагается, что противнику полностью известны возможные стеганографические методы.
3. Безопасность методов основывается на сохранении стеганографическим преобразованием основных свойств открыто передаваемого файла при внесении в него секретного сообщения и некоторой неизвестной противнику информации — ключа.
4. Даже если факт скрытия сообщения стал известен противнику через общника, извлечение самого секретного сообщения представляет сложную вычислительную задачу.

2.2. Стеганографические методы

В настоящее время методы компьютерной стеганографии развиваются по двум основным направлениям:

1. Методы, основанные на избыточности аудио- и визуальной информации.

Младшие разряды цифровых отсчетов содержат очень мало полезной информации. Заполнение их дополнительными данными практически не влияет на качество восприятия.

2. Методы, основанные на использовании специальных свойств компьютерных форматов.

Среди них можно выделить следующие: методы использования зарезервированных для расширения полей компьютерных форматов данных, методы специального форматирования текстовых файлов, методы скрытия в неиспользуемых местах гибких дисков, методы использования имитирующих функций, методы удаления идентифицирующего файл заголовка.

Выбор и применение того или иного стеганографического метода полностью зависит от типа используемого контейнера и требований, предъявленных к процессу записи сообщения в контейнер и последующей передачи этого контейнера от отправителя к получателю.

2.3. Требования к стеганографическим методам

Рассмотрим основные требования к методам цифровой стеганографии [2]:

1. «Прозрачность». Требование «прозрачности», отсутствия видимых различий между оригиналом и файлом со встроенной информацией является общим по отношению ко всем задачам стеганографии. К сожалению, не существует формальных критериев оценки степени прозрачности встроенной информации, поскольку она оценивается человеком, а различные субъекты могут иметь на этот счет различные мнения.
2. Робастность (устойчивость). В общем случае, в особенности в случае встраивания водяных знаков, встроенная информация должна быть робастной по отношению к случайным возмущениям, свойственным процессам передачи информации, к преобразованиям типа код/аналог и аналог/код и к сжатию с относительно небольшими потерями. Конкретные требования всегда уточняются приложением. Стоит отметить, что требование робастности всегда вступает в противоречие с требованием прозрачности встроенной информации.
3. Устойчивость по отношению к попыткам удаления встроенной информации. Встроенная (скрытая) информация (например, водяной знак) может быть объектом целенаправленных попыток ее зашумления или удаления. Такие попытки принято называть атаками. Устойчивость скрытой информации по отношению к атакам является одним из наиболее важных требований к методам стеганографии. Вообще говоря, абсолютной устойчивости встроенной информации по отношению ко всем возможным атакам или их комбинациям добиться невозможно, если при этом не жертвовать разрушением контекста оригинала. Базовый принцип — это обеспечение

определенного уровня устойчивости по отношению к заданному множеству атак в рамках соответствующего приложения.

4. Возможность встраивания заданного относительного объема информации. Объем информации, которая должна быть записана в файл-контейнер, зависит от приложения, и этот объем обычно оценивается относительной величиной по отношению к размеру файла-контейнера. Существует противоречие между возможным объемом встроенной информации и «прозрачностью», а также робастностью. Если требуется встроить большой объем информации, то придется пойти на уменьшение «прозрачности» и снижение робастности. Обычно отыскивается компромисс между этими тремя характеристиками.
5. Секретность маркировки. Для большинства приложений требуется обеспечить секретность встроенной информации, т.е. ее защиту с помощью секретного ключа. Обычно рассматриваются два уровня обеспечения секретности. Первый из них должен предотвратить неавторизованный доступ к декодированию (извлечению) встроенной информации или идентификации факта ее присутствия. Во втором варианте допускается, что неавторизованный пользователь может обнаружить присутствие встроенной информации, однако она должна быть защищена от извлечения. Второй случай обычно используется тогда, когда в изображение встроена пара водяных знаков, один из которых имеет открытый ключ доступа, а другой защищен секретным ключом или ключами.

2.4. Разделение секрета

После встраивания информации в файл наиболее важной задачей является усложнение процесса получения секретной информации неавторизованными пользователями. Как уже упоминалось, один из способов основывается на секретной маркировке. Другой способ, обеспечивающий устойчивость по отношению к попыткам удаления встроенной информации, называется разделением секрета. Суть его состоит в следующем: при помощи каких-либо алгоритмов исходное сообщение разделяется на m составляющих (долей) так, что каждая отдельная составляющая сама по себе ничего не значит, и, лишь собрав все доли вместе и применив к ним обратный алгоритм, можно получить исходные данные. Получается, что даже если противнику попадет одна или несколько долей, но не все, то он все равно не сможет узнать секретную информацию, правда, при этом потеряется факт секретности существования сообщения. Но предположим такую ситуацию: некто, не являющийся авторизованным получателем, обнаружил несколько долей и уничтожил их. Получается, что не только он не смог получить скрытую информацию, но и тот, кому она предназначалась. Даже необязательно преднамеренное пагубное воздействие, ведь один из стеганографических контейнеров либо его часть могут быть повреждены в процессе передачи от отправителя к получателю, и снова секретная информация

не сможет быть восстановленной. Во избежание подобного рода неблагоприятных ситуаций существует так называемая (m, n) -пороговая схема: сообщение разделяется на n долей так, чтобы по любым m из них можно было восстановить исходные данные. Имея меньше, чем m долей, ничего сделать нельзя, а от $m + 1$ до n долей хватит с избытком. Существует множество алгоритмов для осуществления (m, n) -пороговой схемы, приведение которых в данной работе мы обойдем. Некоторые из них описаны в [4].

3. Разработка технологии встраивания информации в MIDI-контейнер

3.1. Формат файла MIDI

Файлы с оцифрованным звуком содержат значения амплитуды звукового сигнала, измеренные через одинаковые промежутки времени, в то время как файлы с нотной записью (в частности MIDI) содержат последовательность команд, сообщающих, какую ноту и каким инструментом и как долго нужно воспроизводить в тот или иной момент времени. В связи с этим количество информации в файлах с нотной записью в сотни и тысячи раз меньше, чем в файлах с оцифрованным звуком [5]. Это заметно ограничивает возможности записи данных методами, основанными на избыточности информации файла-контейнера. Неудивительно, что в этом направлении проводится гораздо меньше исследований. Однако использование специальных свойств форматов может предоставить большие возможности для скрытия информации от посторонних глаз.

Стандартный MIDI-файл — это специально разработанный формат файлов, предназначенный для хранения данных, записываемых и/или исполняемых секвенсером. Секвенсер может быть как программой для компьютера, так и аппаратно выполненным модулем.

В этом формате хранятся стандартные MIDI-сообщения (т.е. статус-байты и соответствующие им байты данных), а также временные метки или маркеры для каждого сообщения (т.е. последовательности байтов, указывающие, какое количество условных единиц времени необходимо подождать перед тем, как исполнить следующее событие MIDI). Этот формат позволяет сохранять информацию о темпе, временном разрешении, выраженном в количестве тиков на одну четвертную длительность, обозначения размера, информацию о музыкальных ключах, а также хранить названия треков и паттернов.¹ Формат предусматривает возможность сохранения в одном файле нескольких паттернов и треков таким образом, что программы-приложения могут выбирать из всего набора хранимой информации ту, которая будет понятна данному приложению.

Формат разработан так, чтобы любой секвенсер мог читать и записывать MIDI-файл таким образом, чтобы не потерялись его данные, и так, чтобы формат был достаточно гибким, т.е. чтобы приложения могли сохранять в файлах

¹Треки используются в MIDI-файлах и MIDI-секвенсерах для записи MIDI-сообщений. Назначение аналогично дорожкам ленточного магнитофона. Набор треков, воспроизводимых одновременно, образует паттерн.

свою специфическую информацию, понятную только этим приложениям, но не понятную другим программам, причем при загрузке файлов MIDI непонятная другим программам-приложениям информация не приводит к недоразумениям, а просто игнорируется [6].

Данные всегда хранятся в виде записей. В одном MIDI-файле могут сосуществовать несколько различных записей. Каждая запись может иметь свой собственный размер, т.е. количество байтов в различных записях может быть различно. Каждая запись начинается с указания ее идентификатора, который состоит из четырех букв, т.е. из четырех ASCII байтов. Этот идентификатор указывает, какой тип записи представлен в содержащихся в записи байтах данных. Последующие за идентификатором четыре байта (каждый из которых состоит из 8 бит) образуют 32-битное значение, указывающее длину (или размер) данной записи. Все записи должны начинаться с этих двух полей: идентификатора записи и размера записи. Эти два поля, занимающие всего 8 байт, образуют заголовок записи.

Фактически все MIDI-файлы начинаются с заголовка MThd, и именно этот факт является указанием на то, что мы имеем дело со стандартным MIDI-файлом. Запись MThd имеет длину 6 байт. Первые два байта данных содержат информацию о формате или типе MIDI-файла. Существует три различных типа (формата) MIDI-файлов. Тип 0 означает, что файл содержит MIDI-данные, записанные на одном трэке, файл типа 1 подразумевает, что в нем содержатся несколько (но возможно и всего один) одновременно воспроизводимых трэков, файлы типа 2 содержат один или несколько независимых трэков, каждый такой трэк образует свой собственный паттерн. Следующие два байта определяют количество трэков, хранимых в файле, эти два байта обозначаются NumTracks. Естественно, что для файлов типа 0 значение NumTracks всегда равно 1. Для двух оставшихся типов возможны другие значения. Оставшиеся два байта указывают величину временного разрешения, т.е. количество временных импульсов (временных тиков), приходящихся на одну четвертную длительность.

За записью MThd следует MTrk-запись. Это единственный тип записи, отличающийся от MThd-записи, который определен для MIDI-файлов в настоящее время. Если по какой-либо причине в файле содержится идентификатор какой-либо записи другого типа, то, вероятно, эта запись создана для какой-либо другой программы, и эта запись должна быть проигнорирована в соответствии с указанной в ее заголовке длиной данной записи [7].

3.2. Предлагаемые методы занесения сообщения в MIDI-контейнер

Первый из предлагаемых методов скрытия информации в MIDI-файле основан на способности секвенсеров считывать информацию только из записей известных им типов. Можно стандартизировать какой-либо из несуществующих типов записей и использовать его в качестве хранилища данных, причем, при указании в начале такой записи ее размера, абсолютно исключается возможность обнаружения «различий на слух», т.к. все секвенсеры ее будут пропускать.

Однако использование данного метода влечет за собой двойное понимание требования «прозрачности». По аналогии с файлами других форматов это должно означать отсутствие (точнее сведение к минимуму) отличий в восприятии незаполненного и заполненного файла-контейнера, другими словами этого не должно быть слышно. Как было сказано выше, в этом варианте требование «прозрачности» выполняется. Но в отличие от секвенсеров любой специалист наверняка знает, какой набор байт может, а какой не может быть самостоятельной и «безобидной» записью, поэтому при непосредственном просмотре двоичного кода такая запись с высокой вероятностью будет обнаружена, что заметно снижает эффективность ее использования.

Следующий из предлагаемых методов также использует свойства формата MIDI. Предлагается записывать информацию в файл посредством генерирования нот определенной высоты и, возможно, длительности. С целью уменьшения вероятности обнаружения сообщения генерацию нот следует проводить по определенным законам существующих музыкальных гармоний. Так, например, можно расставлять ноты в соответствии с любым натуральным ладом, в данном случае в пределах одной октавы будем иметь семь различных нот. Во избежание возможных больших «скачков» в тональностях двух соседних нот следует ограничиться рассмотрением лишь названия ноты, не принимая во внимание октаву за одним исключением: чтобы один ключ (т.е. одна нота в MIDI-файле) нес целое число бит информации, необходимо добавить еще одну ноту, обособив ее от остальных. К примеру, можно каждую ноту «до» четной октавы отличать от ноты «до» нечетной октавы. В данном случае получается метод записи, абсолютно не заметный при визуальном просмотре кода, но тем не менее ощутимый на слух, при котором каждый ключ MIDI-файла может нести в себе 3 бита дополнительных данных. Особо обратим внимание на то, что при этом методе передаваемая информация не просто записывается в контейнер, а сама впоследствии становится его частью, после чего файл с уже скрытой информацией может рассматриваться как пустой контейнер, в который можно записать другие данные, правда, уже иным методом. С другой стороны, в качестве контейнера можно рассматривать MIDI-файл без нот, в этом случае данный метод не является принципиально отличным, однако в такой пустой контейнер можно записать информацию далеко не всеми оставшимися методами.

Другими методами, использующими свойства формата MIDI, может служить запись данных в специальные поля, отведенные для текста композиции, названий треков, комментариев, информации об авторе, в значение темпа композиции, в переменные, отвечающие за расстановку нот по каналам, правда, при различной емкости этих элементов контейнера такие данные будут обнаружены с весьма высокой степенью вероятности, поэтому особое внимание на них заострять не будем.

Среди методов, основанных на избыточности информации в пустом контейнере, следует выделить запись данных в младшие биты временных меток (*delta-time*), а также статической характеристики каждой конкретной ноты - *velocity* (сила нажатия). Выделив по 3 младших бита в каждом элементе контейнера, можно получить весьма слабо заметные отличия заполненного контейнера от

пустого как на слух, так и при визуальном исследовании двоичного кода файла (изменения в delta-time визуально определить практически невозможно). В пользу этих методов выступает возможность записывать непосредственно сыгранные музыкантом партии в виде команд в MIDI-файл. Очевидно, что как сила нажатия на клавишу, так и интервалы между нотами в данном случае никак не могут быть абсолютно одинаковыми, что уменьшает вероятность обнаружения скрытой информации практически до нуля.

3.3. Реализация пороговой схемы

Для усложнения процесса обнаружения секретной информации неавторизованными пользователями предлагается реализовать пороговую схему методом интерполяционных полиномов Лагранжа. В этом методе используются полиномиальные уравнения в конечном поле. Выберем простое число p , которое больше количества возможных долей и больше самого большого из возможных секретов. Чтобы сделать секрет общим, сгенерируем произвольный многочлен степени $m - 1$:

$$(a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + M) \text{ mod } p.$$

Здесь p — случайное простое число, большее любого из коэффициентов. Коэффициенты a_i выбираются случайным образом, они хранятся в тайне и отбрасываются после распределения долей. M — это сообщение. Простое число должно быть опубликовано. Доли получаются с помощью вычисления многочлена в n различных точках: $k_i = F(x_i)$. Иначе говоря, первой долей может быть значение многочлена при $x = 1$, второй долей — значение многочлена при $x = 2$ и т. д.

Поскольку в многочленах степени $m - 1$ имеются m неизвестных коэффициентов a_1, \dots, a_{m-1} и M , для создания m уравнений можно использовать любые m долей. Меньше, чем m долей, не хватит, а от $m + 1$ до n долей хватит с избытком.

Чтобы восстановить сообщение M по m долям, решается система линейных уравнений

$$a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_{m-1}x + M = k_i \text{ (mod } p),$$

после чего становятся известными коэффициенты a_i и само сообщение M [1].

3.4. Распределение долей по слоям

Будем рассматривать любое сообщение в виде набора байт. Для каждого байта применим метод интерполяционных многочленов Лагранжа, в результате чего получим n новых байт (долей). Переходя к разделению следующего байта сообщения, можно либо использовать то же простое число, что и на предыдущем шаге, записав его однажды в MIDI-контейнер, либо генерировать новое, в результате чего помимо n долей получим и n различных простых чисел, своеобразных ключей для каждого байта исходных данных. Их тоже нужно

как-то сохранить в контейнере, обеспечив защиту от потери при передаче либо в результате враждебного воздействия. При реализации первой схемы (общее простое число p для всех байт сообщения) можно записать ключ в начале или конце каждой последовательности байт (долей), чем будет гарантирована их сохранность даже при уничтожении одного или нескольких слоев. Если же для каждого байта свой ключ, то получившиеся n чисел можно прописать в отдельном слое (слоях), однако в данном случае потеряется смысл пороговой схемы, т.к. при уничтожении всех слоев с ключами сообщение становится невозможным, даже если все n слоев с долями останутся целыми. Предлагается два варианта решения этой проблемы.

Первый заключается в записи ключа после каждого байта в доле сообщения. Правда, основываясь на принципе реализации пороговой схемы, можно значительно сократить количество долей (а следовательно, и слоев), содержащих ключи. Пусть существует (m, n) -пороговая схема, в k слоях которой за каждым байтом сообщения записан ключ (еще один байт), оценим число k . Т.к. в (m, n) -пороговой схеме допускается уничтожение $(n - m)$ слоев без повреждения самого сообщения, то число слоев с ключом должно быть строго больше этой величины, но m, n, k - натуральные числа, значит, наименьшее такое число в точности равно $(n - m + 1)$. Очевидно, что доля с ключами по размеру будет ровно в два раза больше доли без ключа, поэтому имеет смысл распределять доли по слоям в соответствии со схожестью в емкости разных методов записи. Также можно две доли без ключа записать в один слой (тогда длина последовательности удвоится и станет равна длине доли с ключами), но это снова снижает надежность схемы.

Второй вариант состоит в записи отдельных слоев, состоящих из ключей, теми же способами, что и слои с долями сообщения, но в другие контейнеры либо в другие одноименные записи того же контейнера. Обратим внимание на то, что все многообразие предлагаемых методов скрытия сообщения, существующее в пределах одной записи, нисколько не меняется при переходе к другой одноименной записи, и если мы предположим наихудший для нас вариант — преднамеренную порчу некоторых слоев, то одинаковые методы в разных записях будут уничтожены одновременно. (Если противник поймет, что в данной записи есть скрытое сообщение или его доля, то по той же технологии удалит сообщение либо долю и из другой записи.) Таким образом, уничтожение всех слоев с ключами будет возможно лишь при уничтожении всех слоев с долями сообщения. Но обратим внимание, что и в этом случае для хранения ключей достаточно использовать лишь $(n - m + 1)$ слоев по причине, указанной выше.

В обоих вариантах требуемый размер дополнительного пространства для записи ключей одинаков и равен $(n - m + 1) \cdot s$ байт, где s - длина сообщения в байтах. Поэтому выбор наиболее эффективного варианта зависит скорее от конкретных условий передачи данных.

4. Реализация алгоритма встраивания информации в MIDI-контейнер

4.1. Отбор методов. Алгоритм записи сообщения в MIDI-контейнер

В предлагаемом алгоритме записи информации в MIDI-контейнер используются как элементы избыточности пустого контейнера, так и некоторые конкретные свойства данного формата.

Из всех предложенных способов записи сообщения в MIDI-контейнер наиболее эффективными в смысле визуальной скрытности являются способы, основанные на изменении значения *delta-time* и *velocity*. Но для реализации пороговой схемы необходимо выбрать число *n* не менее трех. Относительно слухового восприятия абсолютно скрытыми являются способы записи в специальные поля файла либо в отдельную запись несуществующего типа. Последний вариант является более эффективным, однако стандартизирование более чем одного типа записи по понятным причинам бессмысленно.

Предлагается реализовать (2,3)-пороговую схему, используя 3 вышеперечисленных способа записи информации в MIDI-контейнер: изменения *delta-time*, *velocity* и стандартизирование дополнительного типа записи. Можно было бы добавить в алгоритм несколько менее надежных способов без изменения высоты порога (т.е. для наращивания *n*), но во избежание провокации удаления всего контейнера в случае обнаружения в нем любых признаков содержания секретного сообщения мы этого делать не будем. Итак, сообщение разделяется на 3 слоя по схеме интерполяционных многочленов Лагранжа, ключи для каждого байта выбираются разными и записываются теми же способами в другую MTrk-запись того же контейнера (т.е. в качестве контейнера необходимо выбирать MIDI-файл формата 1), причем слоев с ключами будет ровно 2 и все они будут реализованы в отдельной MTrk-записи.

4.2. Программная реализация алгоритма встраивания информации в MIDI-контейнер

Предложенный алгоритм встраивания информации в MIDI-контейнер с некоторыми изменениями реализован в прикладном программном продукте ORCHID, MIDI Steganographer 2.0. Программа предназначена для скрытия информации в MIDI-файлах формата 0. Скрываемая информация считывается по байтам из текстового файла. Каждый байт разделяется на 3 доли по схеме интерполяционных многочленов Лагранжа, ключ для каждого байта остается одинаковым и помещается в начало каждого слоя. Таким образом, повреждение или уничтожение одного из слоев не повлечет за собой потерю ключа. При повреждении или уничтожении двух или более слоев сообщение восстановлению не подлежит. Конец каждого слоя помечен ASCII-байтом 1.

Первый слой записывается в младшие биты значения *delta-time*. Первоначальная реализация алгоритма использовала 3 младших бита, однако достаточно сильно страдала «прозрачность». Исследование параметров MIDI-файлов

показало, что меток delta-time в среднем в 2 раза больше, чем midi-событий "key on" («нажатие клавиши»), но т.к. объемы всех долей секрета одинаковы, примерно половина меток delta-time остается неиспользованной. Исходя из этого было решено в delta-time записывать по 1 биту секрета. В результате емкость контейнера уменьшилась в 1,5 раза, но несравненно улучшилось требование «прозрачности».

Второй слой записывается в 3 младших бита значения velocity в событии «key on», третий - в новую запись. Для маскировки имя новой записи выбрано как MTrk, где отличие от имени стандартной MTrk-записи состоит в том, что вторая буква (T) - русская, а значит, имеет другую кодировку и секвенсером идентифицируется иначе.

В программе предусмотрен режим извлечения информации. В процессе извлечения все 3 слоя считываются (при отсутствии слоя, если он был удален, или его части, значение доли принимается равной нулю), вычисляется 3 варианта исходного сообщения по каждой паре долей в слоях. После все 3 сообщения сравниваются, и пользователю выводится результат:

1. Все сообщения одинаковы — повреждения в слоях не обнаружены, извлечение успешно.
2. Два сообщения одинаковы, третье отличается — один из слоев поврежден (номер слоя также идентифицируется), сообщение восстановлено по двум оставшимся слоям.
3. Все сообщения отличны — 2 или более слоев повреждены, восстановление информации невозможно.

4.3. Анализ эффективности реализованного алгоритма

Исследование параметров midi-файлов с целью определения потенциальной емкости для каждого слоя сообщения было начато выше. Можно добавить лишь, что емкость для третьего слоя не ограничена, следовательно, никак не влияет на два остальных.

Исследование на предмет «прозрачности» (при прослушивании опытными музыкантами) дало хорошие результаты. Возможные отклонения от нормы («плавающий темп», неоднородная игра инструментов) обнаружены не были.

Повышение устойчивости по отношению к попыткам удаления встроенной информации обеспечивается пороговой схемой. Робастность исследовалась посредством конвертирования заполненных файлов-контейнеров в другие форматы (MIDI 1, RIFF MIDI, WRK) и обратно, т.к. программа работает только с файлами формата MIDI 0. В результате первые два слоя всегда оставались целыми, а третий, помещенный в отдельную запись, постоянно удалялся секвенсером. Тем не менее сообщение всегда удавалось восстановить по двум слоям. Но если в том же секвенсере изменить какой-нибудь элемент из первых двух слоев, то сообщение теряется, т.к. поврежденными оказываются уже 2 слоя.

Возможный (максимально возможный) объем встраиваемой информации определен разработчиком и неизменен. В силу специфических свойств формата MIDI он не является функцией размера файла-контейнера, а зависит от конкретных параметров: количества временных меток delta-time и midi-событий «key on». Исследования различных midi-контейнеров дают усредненный результат 1:30. Для сравнения: в графических и мультимедиа файлах - 1:10. Учитывая кажущуюся непригодность и, как следствие, малое исследование данного направления в стеганографии — это весьма приемлемый результат. Сюда же стоит отнести и немалый потенциал MIDI-стеганографии, ведь исследования в данной области только начались.

Секретность маркировки не обеспечена, однако большой сложности данная задача не вызывает и сводится к совместному использованию криптографических и стеганографических методов.

В реализованном алгоритме соблюдены требования основных положений современной компьютерной стеганографии: аутентичность и целостность файла обеспечена, после применения стеганографического преобразования сохраняются основные свойства открыто передаваемого файла, если факт скрытия сообщения станет известен противнику через сообщника, благодаря пороговой схеме извлечение самого секретного сообщения будет представлять сложную вычислительную задачу. Для защиты от повреждения при передаче данных и от преднамеренного враждебного воздействия реализована (2,3)-пороговая схема. Схема интерполяционных многочленов Лагранжа выбрана из-за наименьшей трудоемкости при реализации.

5. Заключение

Хотя цифровая стеганография является относительно новой областью исследований, развитие цифровых сред и связанные с этим практические потребности стимулируют интенсивный рост интереса к этой области во всем мире и чрезвычайно высокую активность исследователей в последнее десятилетие. К настоящему моменту в этой области предложено достаточно большое множество методов, технологий и инструментальных средств. Огромный интерес к стеганографии в значительной мере стимулируется быстрым распространением Интернет, возрастанием роли Интернет-технологий и соответствующих цифровых сред в практической жизни общества. Последнее ведет к необходимости защиты аудио- и видеoinформации перед тем, как она будет публиковаться в Интернет или распространяться средствами Интернет. Существует также много других причин, обуславливающих чрезвычайно высокий интерес к использованию методов стеганографии, в частности, в военном деле, в юриспруденции, электронной коммерции, а также в других областях, где необходимо обеспечивать секретность коммуникаций, защищать авторские права, предотвращать пиратское использование программного продукта и т.п.

Использование MIDI-форматов для стеганографических контейнеров позволяет скрывать меньший объем секретной информации, чем использование графических и аудиоформатов (примерно 1:30 часть объема контейнера про-

тив 1:10). Тем не менее при огромной распространенности различных методов стеганографии в последних разработках алгоритмов для MIDI предоставляет весьма большие возможности, в первую очередь из-за кажущейся непригодности формата для данных целей, а следовательно, и гораздо более низкой степени контроля при проверке файлов на предмет содержания скрытых сообщений. Не следует упускать из виду и немалый потенциал MIDI-стеганографии как одного из наименее исследованных направлений современной компьютерной стеганографии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. Компьютерная стеганография – защита информации или инструмент преступления? – <http://www.crime-research.ru/>
2. Городецкий В.И., Самойлов В.И. Стеганография на основе цифровых изображений. Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН.
3. Барсуков В.С., Романцов А.П. Компьютерная стеганография вчера, сегодня, завтра. Технологии информационной безопасности 21 века // Специальная техника. 1998. N.4-5. – <http://st.ess.ru/>
4. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. М.: Издательство ТРИУМФ, 2003.
5. Новосельский А. Форматы звуковых файлов // Компьютеры+Программы. 1996. N.1. – <http://www.aip.mk.ua/>
6. Будило В. Формат файлов MIDI. – <http://www.comprice.ru/>
7. Dustin Caldwell. Standard MIDI File Format. – <http://www.mp.dpt.ustu.ru/>

Математические структуры И моделирование

Вып. 16

Журнал

Редактор Е.В. Брусницына

Подписано в печать 8.11.2006.
ОП. Формат 60 × 84 1/8. Печ.л. 12,7. Уч.-изд.л. 21,0.
Тираж 120 экз.

Отпечатано в Полиграфическом центре КАН
644050, г. Омск, пр. Мира, 32, ком. 11, тел. (381-2) 65-47-31
Лицензия ПЛД № 58-47 от 21.04.97 г.