Математические структуры и моделирование
2005, вып. 15, с. 74–91

УДК 512.815.8

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ $(1,0)\oplus(0,1)$ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ НА ГРУППЕ ПУАНКАРЕ

В.В. Варламов

В работе определяется безмассовое скалярное поле спина 1 на 8-мерном конфигурационном пространстве; данное пространство является прямым произведением пространства Минковского и двумерной комплексной сферы. Полевые уравнения для поля со спином 1 получаются из диракоподобного лагранжиана, разделенного на две составляющие, одна из которых связана с группой трансляций, а другая – с группой Лоренца. Показано, что диракоподобная форма уравнений Максвелла (электродинамика в так называемой формулировке Майорана-Опенгеймера) следует непосредственно из полевых уравнений для составляющей группы трансляций. Поле фотона представляется функциями Биденхарна на группе Пуанкаре. Полученные результаты позволяют нам рассматривать поля Дирака и Максвелла на равных основаниях, как функции на группе Пуанкаре.

Как известно, любая величина, которая преобразуется линейно под действием преобразований Лоренца, является спинором. По этой причине спинорные величины рассматриваются как фундаментальные в квантовой теории поля и основные уравнения для таких величин должны быть записаны в спинорной форме. Спинорная форма уравнений Дирака была впервые дана Ван дер Варденом [1], где было показано, что теория Дирака может быть полностью описана в этой форме (см. также [2]). В свою очередь, спинорная формулировка уравнений Максвелла изучалась Лапортом и Уленбеком [3]. В 1936 г. Румер [7] показал, что спинорные формы уравнений Дирака и Максвелла выглядят очень схоже[1]. Далее, Майорана [8] и Оппенгеймер [9] предложили рассматривать максвелловскую теорию электромагнетизма как волновую механику фотона. Они ввели волновую функцию вида $\psi = \mathbf{E} - i\mathbf{B}$, удовлетворяющую безмассовым диракоподобным уравнениям[2]. Уравнения Максвелла в дирако-

Сибирский государственный индустриальный университет.
E-mail: `root@varlamov.kemerovo.su`

[1]Конечно, не существует эквивалентности между уравнениями Дирака и Максвелла, как это утверждает Камполаттаро [4, 5] (см. также дискуссию, касающуюся этого вопроса [6]). Главное различие между этими уравнениями содержится в том, что поля Дирака и Максвелла имеют различные спинтензорные размерности. Данные поля преобразуются соответсвенно в рамках конечномерных представлений $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$ и $(1,0)\oplus(0,1)$ группы Лоренца.

подобной форме рассматривались многими авторами на протяжении длительного времени [12–24]. Интерес к электродинамике в формулировке Майораны-Оппенгеймера возрос в последние годы [25–33].

В современной теоретической физике общепризнанно, что большинство «элементарных» частиц имеют очень сложную внутреннюю структуру, т.е. элементарные частицы представляются пространственно протяженными. По этой причине реальные частицы нельзя рассматривать как точечные объекты (конечно, в общем эти более реалистичные поля являются нелокальными полями). В стороне от струнных моделей имеется другой путь для описания пространственно протяженных частиц, предложенный Финкельштейном [34], который показал, что модели элементарных частиц с внутренними степенями свободы могут быть описаны на многообразиях более широких, чем пространство-время Минковского (однородные пространства группы Пуанкаре $\mathcal{P}$). Все однородные пространства группы $\mathcal{P}$, которые содержат пространство-время, были исследованы Финкельштейном [34], Бакри и Кильбергом [35]. В 1964г. под влиянием теории полюсов Редже Люрса предложил построить квантовую теорию поля на групповом многообразии группы $\mathcal{P}$ [36]. Построения квантово-полевых теорий на различных однородных пространствах группы $\mathcal{P}$ рассматривались в работах [37–46].

Главной целью настоящей статьи является синтез двух упомянутых выше направлений (диракоподобная формулировка уравнений Максвелла и квантовая теория поля на группе Пуанкаре). Поле Максвелла представляется функциями Биденхарна [47] на групповом многообразии $\mathcal{M}_{10}$ (данное многообразие является прямым произведением пространства-времени и группового многобразия группы Лоренца). Показывается, что общий вид волновой функции наследует свою структуру от полупрямого произведения $SL(2,\mathbb{C}) \odot T_4$ и по этой причине поле Максвелла на $\mathcal{M}_{10}$ определяется факторизацией $\psi(x)\psi(\mathfrak{g})$, где $x \in T_4$, $\mathfrak{g} \in SL(2,\mathbb{C})$. Очевидно, что диракоподобная форма уравнений Максвелла должна быть получена из диракоподобного лагранжиана. С использованием лагранжева формализма на касательном расслоении $T\mathcal{M}_{10}$ многообразия $\mathcal{M}_{10}$ находятся полевые уравнения отдельно для частей $\psi(x)$ и $\psi(\mathfrak{g})$. Решения полевых уравнений для $\psi(x)$ получены в приближении плоской волны[3]. В свою очередь, решения полевых уравнений с $\psi(\mathfrak{g})$ найдены в форме разложений по присоединенным гиперсферическим функциям[4].

[2]В противоположность методу Гупта-Блейлера [10, 11], где квантуется ненаблюдаемый вектор-потенциал A_μ, одно из главных преимуществ электродинамики Майораны-Оппенгеймера заключается в том,что она оперирует с наблюдаемыми величинами, такими, как электрическое и магнитное поля.

[3]Как известно, экспоненты определяют унитарные представления подгруппы трансляций T_4. В некотором смысле функции e^{ikx} могут пониматься как «матричные элементы» группы T_4.

[4]Матричные элементы как спинорной, так и главной серий представлений группы Лоренца выражаются через гиперсферические функции [48] (см. Приложение).

1. Функции на группе Пуанкаре

Рассмотрим некоторые основные факты, касающиеся группы Пуанкаре $\mathcal{P}$. Прежде всего группа $\mathcal{P}$ имеет то же число связных компонент, что и группа Лоренца. Будем рассматривать только компоненту $\mathcal{P}_+^\uparrow$, соответствующую связной компоненте $L_+^\uparrow$ (так называемая специальная группа Лоренца [49]). Как известно, универсальная накрывающая $\overline{\mathcal{P}_+^\uparrow}$ группы $\mathcal{P}_+^\uparrow$ определяется полупрямым произведением

$$\overline{\mathcal{P}_+^\uparrow} = SL(2,\mathbb{C})\odot T_4 \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)\odot T_4,$$

где T_4 — подгруппа четырехмерных трансляций.

Каждое преобразование $T_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{P}_+^\uparrow$ определяется множеством параметров $\boldsymbol{\alpha}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{10})$, которое может быть представлено точкой пространства $\mathcal{M}_{10}$. Пространство $\mathcal{M}_{10}$ обладает локально евклидовыми свойствами, следовательно, $\mathcal{M}_{10}$ является *групповым многообразием группы Пуанкаре.* Легко видеть, что множество $\boldsymbol{\alpha}$ может быть разбито на два подмножества $\boldsymbol{\alpha}(x_1,x_2,x_3,x_4,\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_3,\mathfrak{g}_4,\mathfrak{g}_5,\mathfrak{g}_6)$, где $x_i \in T_4$ – параметры подгруппы трансляций, $\mathfrak{g}_j$ – параметры группы $SL(2,\mathbb{C})$. В свою очередь, преобразование $T_{\mathfrak{g}}$ определяется множеством $\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_1,\ldots,\mathfrak{g}_6)$, которое может быть представлено точкой шестимерного подмногообразия $\mathfrak{L}_6 \subset \mathcal{M}_{10}$, называемого *групповым многообразием группы Лоренца.*

В настоящей статье мы ограничимся рассмотрением конечномерных представлений группы Пуанкаре. Группа четырехмерных трансляций T_4 является абелевой группой, образованной прямым произведением четырех одномерных групп трансляций, каждая из которых изоморфна аддитивной группе вещественных чисел. Отсюда следует, что все неприводимые представления группы T_4 являются одномерными и выражаются через экспоненту. В свою очередь, как было показано Наймарком [50], спинорные представления исчерпывают, по существу, все конечномерные представления группы $SL(2,\mathbb{C})$. Любое спинорное представление группы $SL(2,\mathbb{C})$ может быть определено в пространстве симметрических полиномов следующего вида:

$$p(z_0,z_1,\bar z_0,\bar z_1) = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\\(\dot\alpha_1,\ldots,\dot\alpha_r)}} \frac{1}{k!\,r!} a^{\alpha_1\cdots\alpha_k\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_r} z_{\alpha_1}\cdots z_{\alpha_k}\bar z_{\dot\alpha_1}\cdots\bar z_{\dot\alpha_r} \tag{1}$$

$$(\alpha_i,\dot\alpha_i = 0,1),$$

где числа $a^{\alpha_1\cdots\alpha_k\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_r}$ не изменяются при перестановках индексов. Выражения (1) следует понимать как *функции на группе Лоренца.* Когда коэффициенты $a^{\alpha_1\cdots\alpha_k\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_r}$ в (1) зависят от переменных $x_i \in T_4$ $(i=1,2,3,4)$, мы приходим функциям Биденхарна [47]:

$$p(x,z,\bar z) = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)\\(\dot\alpha_1,\ldots,\dot\alpha_r)}} \frac{1}{k!\,r!} a^{\alpha_1\cdots\alpha_k\dot\alpha_1\cdots\dot\alpha_r}(x) z_{\alpha_1}\cdots z_{\alpha_k}\bar z_{\dot\alpha_1}\cdots\bar z_{\dot\alpha_r}. \tag{2}$$

$$(\alpha_i,\dot\alpha_i = 0,1).$$

Функции (2) следует рассматривать как *функции на группе Пуанкаре*. Некоторые приложения этих функций содержатся в [45, 51]. Представления группы Пуанкаре $SL(2,\mathbb{C}) \odot T(4)$ реализуются посредством функций (2).

Пусть $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha})$ – лагранжиан на групповом мнообразии $\mathcal{M}_{10}$ группы Пуанкаре (другими словами, $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha})$ является 10-мерной функцией точки), где $\boldsymbol{\alpha}$ – множество параметров данной группы. Тогда интеграл от $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha})$ по некоторому 10-мерному объему Ω группового многообразия будем называть *действием на группе Пуанкаре*:

$$A = \int\limits_{\Omega} d\boldsymbol{\alpha}\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}),$$

где $d\boldsymbol{\alpha}$ – мера Хаара[5] на группе $\mathcal{P}$.

Пусть $\psi(\boldsymbol{\alpha})$ – функция на многообразии $\mathcal{M}_{10}$ (сейчас достаточно предположить, что $\psi(\boldsymbol{\alpha})$ является квадратично интегрируемой функцией на группе Пуанкаре) и пусть

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}} = 0 \tag{3}$$

– уравнения Эйлера-Лагранжа на $\mathcal{M}_{10}$ (более точно говоря, уравнения (3) действуют в касательном расслоении $T\mathcal{M}_{10} = \bigcup\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{M}_{10}} T_{\boldsymbol{\alpha}}\mathcal{M}_{10}$ многообразия $\mathcal{M}_{10}$, см. [52]). Введем теперь лагранжиан $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha})$, зависящий от полевой функции $\psi(\boldsymbol{\alpha})$ следующим образом:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\left(\psi^*(\boldsymbol{\alpha})B_\mu\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}_\mu} - \frac{\partial\psi^*(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}_\mu}B_\mu\psi(\boldsymbol{\alpha})\right) - \kappa\psi^*(\boldsymbol{\alpha})B_{11}\psi(\boldsymbol{\alpha}),$$

где B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, 10)$ - квадратные матрицы. Число строк и столбцов этих матриц равно числу компонент функции $\psi(\boldsymbol{\alpha})$, κ – отличная от нуля вещественная постоянная.

Далее, если B_{11} невырождена, то можно ввести матрицы

$$\Pi_\mu = B_{11}^{-1}B_\mu, \quad \mu = 1, 2, \ldots, 10,$$

и представить лагранжиан $\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha})$ в виде

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})\Pi_\mu\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}_\mu} - \frac{\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}_\mu}\Pi_\mu\psi(\boldsymbol{\alpha})\right) - \kappa\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})\psi(\boldsymbol{\alpha}),$$

где

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha}) = \psi^*(\boldsymbol{\alpha})B_{11}.$$

В случае безмассового поля $(j,0)\oplus(0,j)$ рассмотрим на групповом многообразии $\mathcal{M}_{10}$ лагранжиан вида

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})\Pi_\mu\frac{\partial\psi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}_\mu} - \frac{\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{\alpha}_\mu}\Pi_\mu\psi(\boldsymbol{\alpha})\right). \tag{4}$$

[5]Инвариантная мера $d\boldsymbol{\alpha}$ на группе Пуанкаре может быть факторизована в виде $d\boldsymbol{\alpha} = dxd\mathfrak{g}$, где $d\mathfrak{g}$ – мера Хаара на группе Лоренца.

Как прямое следствие определения (2) релятивистская волновая функция $\psi(\boldsymbol{\alpha})$ на групповом многообразии $\mathcal{M}_{10}$ представляется следующей факторизацией:

$$\psi(\boldsymbol{\alpha}) = \psi(x)\psi(\mathfrak{g}) = \psi(x_1, x_2, x_3, x_4)\psi(\varphi, \epsilon, \theta, \tau, \phi, \varepsilon), \tag{5}$$

где $\psi(x_i)$ — функция, зависящая от параметров подгруппы T_4,

$$x_i \in T_4 \qquad (i = 1, \ldots, 4),$$

а $\psi(\mathfrak{g})$ — функция на группе Лоренца, где шесть параметров этой группы определяются углами Эйлера φ, ϵ, θ, τ, ϕ, ε, которые образуют комплексные углы вида

$$\varphi^c = \varphi - i\epsilon, \quad \theta^c = \theta - i\tau, \quad \phi^c = \phi - i\varepsilon$$

(см. Приложение).

2. Поле $(1,0)\oplus(0,1)$

Как уже отмечалось выше, диракоподобная форма уравнений Максвелла должна быть получена из диракоподобного лагранжиана. Это одно из главных утверждений, которое мы докажем в данной статье. С этой целью перепишем лагранжиан (4) в виде

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\alpha}) = -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})\Gamma_\mu \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_\mu}\Gamma_\mu\psi(\boldsymbol{\alpha})\right) - \\ - \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})\Upsilon_\nu \frac{\partial\psi(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathfrak{g}_\nu} - \frac{\partial\overline{\psi}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathfrak{g}_\nu}\Upsilon_\nu\psi(\boldsymbol{\alpha})\right), \tag{6}$$

где

$$\psi(\boldsymbol{\alpha}) = \psi(x)\psi(\mathfrak{g}) \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3,\ \nu = 1, \ldots, 6),$$

и

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Upsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_1^* \\ \Lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_2^* \\ \Lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_3^* \\ \Lambda_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\Upsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & i\Lambda_1^* \\ i\Lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_5 = \begin{pmatrix} 0 & i\Lambda_2^* \\ i\Lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_6 = \begin{pmatrix} 0 & i\Lambda_3^* \\ i\Lambda_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\Lambda_1 = \frac{c_{11}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \frac{c_{11}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = c_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Варьируя независимо $\psi(x)$ и $\overline{\psi}(x)$ в лагранжиане (6), приходим к уравнениям

$$\Gamma_\mu \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} = 0, \tag{11}$$

$$\Gamma_\mu^T \frac{\partial \overline{\psi}(x)}{\partial x_\mu} = 0. \tag{12}$$

Уравнение (11) может быть переписано следующим образом:

$$\left[\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} - i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi^*(x) \end{pmatrix} = 0, \tag{13}$$

где

$$\begin{pmatrix} \psi(x) \\ \psi^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} - i\mathbf{B} \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 - iB_1 \\ E_2 - iB_2 \\ E_3 - iE_3 \\ E_1 + iB_1 \\ E_2 + iB_2 \\ E_3 + iB_3 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (13) следует, что

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\alpha_i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\psi(x) = 0, \tag{14}$$

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\alpha_i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)\psi^*(x) = 0. \tag{15}$$

Последние уравнения в совокупности с условиями поперечности

$$\mathbf{p}\cdot\psi = 0, \quad \mathbf{p}\cdot\psi^* = 0$$

совпадают с уравнениями Максвелла. Действительно, принимая во внимание уравнение $(\mathbf{p}\cdot\alpha)\psi = \hbar\nabla\times\psi$, получим

$$\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\hbar\nabla\times\psi, \tag{16}$$

$$-i\hbar\nabla\cdot\psi = 0. \tag{17}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \nabla\times(\mathbf{E} - i\mathbf{B}) &= -\frac{i}{c}\frac{\partial(\mathbf{E} - i\mathbf{B})}{\partial t}, \\ \nabla\cdot(\mathbf{E} - i\mathbf{B}) &= 0 \end{aligned}$$

(константа $\hbar$ сокращается). Разделяя вещественную и мнимую части, получим уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla\times\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \\ \nabla\cdot\mathbf{E} &= 0, \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что мы снова придем к уравнениям Максвелла исходя из уравнений

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}+i\hbar\alpha_i\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\psi^*(x) = 0, \tag{18}$$

$$-i\hbar\nabla\cdot\psi^*(x) = 0. \tag{19}$$

Несмотря на то что уравнения (14) и (15) приводят к одним и тем же уравнениям Максвелла, физическая интерпретация данных уравнений различна (см. [28,32]). А именно уравнения (14) и (15) есть уравнения с отрицательной и положительной спиральностью соответсвенно[6].

Как обычно, сопряженная волновая функция

$$\overline{\psi}(x)=\overset{+}{\psi}(x)\Gamma_0=(\psi(x),\psi^*(x))$$

соответствует античастице (данное обстоятельство является прямым следствием диракоподобности лагранжиана (6)). Следовательно, мы пришли к очень спорному заключению, что уравнение (12) описывает античастицу (антифотон) и, более того, отсюда следует существование тока и заряда для фотонного поля. На первый взгляд, мы пришли к резкому противоречию с общепризнанным положением, гласящим, что фотон является истинно нейтральной частицей. Однако легко проверить, что уравнения (12) также приводят к уравнениям Максвелла. Это означает, что фотон совпадает со своей «античастицей». Следуя стандартной процедуре, приведенной во многих учебниках, мы можем определить «заряд» фотона следующим выражением:

$$Q\sim\int d\mathbf{x}\overline{\psi}\Gamma_0\psi, \tag{20}$$

где $\overline{\psi}\Gamma_0\psi = 2(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2)$. Однако Ньютон и Вигнер [57] показали, что для фотона не существует локализованных состояний. Следовательно, интеграл в

[6]Интересно отметить, что соответствие между спиновыми состояниями фотона и комплексификацией группы $SU(2)$ представляется локальным изоморфизмом вида $SU(2)\otimes SU(2)\simeq$ $\simeq SL(2,\mathbb{C})$. Как известно, корневая подгруппа полупростой группы Ли O_4 (группа вращений четырехмерного пространства) является нормальным делителем группы O_4. По этой причине шестипараметрическая группа O_4 является полупростой и представляется прямым произведением двух трехпараметрических унимодулярных групп. По аналогии с группой O_4 двукратное накрытие $SL(2,\mathbb{C})$ собственной группы Лоренца (группа вращений четырехмерного пространственно-временного континуума) является полупростой и представляется прямым произведением двух трехпараметрических специальных унимодулярных групп, $SL(2,\mathbb{C})\simeq SU(2)\otimes SU(2)$. Явный вид данного изоморфизма может быть получен посредством комплексификации группы $SU(2)$, т.е. $SL(2,\mathbb{C})\simeq\mathsf{complex}(SU(2))\simeq SU(2)\otimes SU(2)$ [53]. Более того, в работах [54–56] группа Лоренца представляется произведением $SU_R(2)\otimes SU_L(2)$, а спиноры $\psi(p^\mu)=(\phi_R(p^\mu),\phi_L(p^\mu))^T$ преобразуются в рамках пространства представления $(j_1,j_2)\oplus(j_2,j_1)$. Компоненты $\phi_R(p^\mu)$ and $\phi_L(p^\mu)$ соответсвуют различным спиральным состояниям (право- и левополяризованные спиноры). Отсюда следует аналогия с фотонными спиновыми состояниями. А именно операторы $\mathsf{X}=\mathsf{J}+i\mathsf{K}$ и $\mathsf{Y}=\mathsf{J}-i\mathsf{K}$ соответствуют право- и левополяризованным состояниям фотона, где J и K – генераторы вращений и лоренцевых сдвигов соответственно.

правой части выражения (20) представляет собой неопределяемое выражение. Поскольку интеграл (20) не существует в общем, то «заряд» фотона не может рассматриваться как постоянная величина (в противоположность электронному полю, которое имеет локализованные состояния [57] и хорошо определенный постоянный заряд). По существу, можно сказать, что «заряд» фотона равен энергии $\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2$ для γ-кванта.

Таким образом, уравнение (13) приводит к двум диракоподобным уравнениям (14) и (15), которые в комбинации с условиями поперечности (17) и (19) эквивалентны уравнениям Максвелла. Представим решения уравнения (14) в виде плоской волны

$$\psi(x) = \varepsilon(\mathbf{k}) \exp[i\hbar^{-1}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)]. \tag{21}$$

После подстановки формы решения (21) в (14) приходим к следующей задаче на собственные значения:

$$-c \begin{pmatrix} 0 & ik_3 & -ik_2 \\ -ik_3 & 0 & ik_1 \\ ik_2 & -ik_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что мы придем к той же задаче на собственные значения, начиная с уравнения (15). Вековое уравнение имеет решения $\omega = \pm c\mathbf{k}, 0$.

Следовательно, решения уравнения (13) в приближении плоской волны задаются функциями

$$\begin{aligned} \psi_\pm(\mathbf{k};\mathbf{x},t) &= \left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_\pm(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_\pm(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)], \\ \psi_0(\mathbf{k};\mathbf{x}) &= \left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_0(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_0(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}] \end{aligned}$$

и комплексно-сопряженными функциями $\psi_+^*(\mathbf{k};\mathbf{x},t)$, $\psi_0^*(\mathbf{k};\mathbf{x})$ $(\mathbf{E} + i\mathbf{B})$, соответствующими положительной спиральности; здесь $\omega = c|\mathbf{k}|$ и $\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})$ $(\lambda = \pm, 0)$ — векторы поляризации фотона:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pm(\mathbf{k}) &= \left\{2|\mathbf{k}|^2(k_1^2 + k_2^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} -k_1k_3 \pm ik_2|\mathbf{k}| \\ -k_2k_3 \mp ik_1|\mathbf{k}| \\ k_1^2 + k_2^2 \end{bmatrix}, \\ \varepsilon_0(\mathbf{k}) &= |\mathbf{k}|^{-1} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Варьируя теперь $\psi(\mathfrak{g})$ и $\overline{\psi}(\mathfrak{g})$ в лагранжиане (6), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \Upsilon_\nu \frac{\partial\psi(\mathfrak{g})}{\partial\mathfrak{g}_\nu} &= 0, \\ \Upsilon_\nu^T \frac{\partial\overline{\psi}(\mathfrak{g})}{\partial\mathfrak{g}_\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Последние уравнения записаны в параметрах группы $SL(2,\mathbb{C})$. Поскольку универсальная накрывающая $SL(2,\mathbb{C})$ собственной группы Лоренца является комплексификацией группы $SU(2)$ (см., например, [58]), то будет более удобным выразить шесть параметров группы $SL(2,\mathbb{C})$ через три параметра a_1, a_2, a_3 группы $SU(2)$. Очевидно, что $\mathfrak{g}_1 = a_1$, $\mathfrak{g}_2 = a_2$, $\mathfrak{g}_3 = a_3$, $\mathfrak{g}_4 = ia_1$, $\mathfrak{g}_5 = ia_2$, $\mathfrak{g}_6 = ia_3$. Принимая во внимание структуру матриц Υ_ν, задаваемой выражениями (7)–(8), перепишем первое уравнение из (22) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3}\Lambda_k\frac{\partial\psi}{\partial a_k} - i\sum_{k=1}^{3}\Lambda_k\frac{\partial\psi}{\partial a_k^*} &= 0,\\
\sum_{k=1}^{3}\Lambda_k^*\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\widetilde{a}_k} + i\sum_{k=1}^{3}\Lambda_k^*\frac{\partial\dot{\psi}}{\partial\widetilde{a}_k^*} &= 0,
\end{aligned}\tag{23}$$

где $a_1^* = -i\mathfrak{g}_4$, $a_2^* = -i\mathfrak{g}_5$, $a_3^* = -i\mathfrak{g}_6$, а $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{a}_k^*$ – параметры, соответствующие дуальному базису. По существу, уравнения (23) определены в трехмерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$. В свою очередь, пространство $\mathbb{C}^3$ изометрично шестимерному бивекторному пространству $\mathbb{R}^6$ (пространство параметров группы Лоренца [59]). Бивекторное пространство $\mathbb{R}^6$ является касательным пространством группового многообразия $\mathfrak{L}_6$ группы Лоренца, т.е. групповое многообразие $\mathfrak{L}_6$ в каждой своей точке локально эквивалентно пространству $\mathbb{R}^6$. Таким образом, для всех $\mathfrak{g}\in\mathfrak{L}_6$ имеем $T_{\mathfrak{g}}\mathfrak{L}_6\simeq\mathbb{R}^6$. Учитывая явный вид[7] матриц Λ_i, задаваемый выражениями (10), перепишем систему (23) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1^*} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2^*} - i\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3^*} = 0,\\
&\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_1} + i\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - i\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2} - i\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1^*} - i\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1^*} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2^*} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_2^*} = 0,\\
&\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1^*} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2^*} + i\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3^*} = 0,\\
&\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\dot{\psi}_2}{\partial\widetilde{x}_1} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\dot{\psi}_2}{\partial\widetilde{x}_2} + \frac{\partial\dot{\psi}_1}{\partial\widetilde{x}_3} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\dot{\psi}_2}{\partial\widetilde{x}_1^*} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\dot{\psi}_2}{\partial\widetilde{x}_2^*} + i\frac{\partial\dot{\psi}_1}{\partial\widetilde{x}_3^*} = 0,\\
&\frac{\partial\dot{\psi}_1}{\partial\widetilde{x}_1} + \frac{\partial\dot{\psi}_3}{\partial\widetilde{x}_1} + i\frac{\partial\dot{\psi}_1}{\partial\widetilde{x}_2} - i\frac{\partial\dot{\psi}_3}{\partial\widetilde{x}_2} + i\frac{\partial\dot{\psi}_1}{\partial\widetilde{x}_1^*} + i\frac{\partial\dot{\psi}_3}{\partial\widetilde{x}_1^*} - \frac{\partial\dot{\psi}_1}{\partial\widetilde{x}_2^*} + \frac{\partial\dot{\psi}_3}{\partial\widetilde{x}_2^*} = 0,\\
&\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\dot{\psi}_2}{\partial\widetilde{x}_1} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\dot{\psi}_2}{\partial\widetilde{x}_2} - \frac{\partial\dot{\psi}_3}{\partial\widetilde{x}_3} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\dot{\psi}_2}{\partial\widetilde{x}_1^*} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial\dot{\psi}_2}{\partial\widetilde{x}_2^*} - i\frac{\partial\dot{\psi}_3}{\partial\widetilde{x}_3^*} = 0.
\end{aligned}\tag{24}$$

[7]Матрицы (10) могут быть получены при $l = 1$ из более общих выражений (62)–(67), данных в [62].

Разделение переменных в системе (24) реализуется посредством факторизации:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r)\mathfrak{M}^{1}_{l}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),\\
\psi_2 &= \boldsymbol{f}^{l}_{1,0}(r)\mathfrak{M}^{0}_{l}(0,0,\theta,\tau,0,0),\\
\psi_3 &= \boldsymbol{f}^{l}_{1,-1}(r)\mathfrak{M}^{-1}_{l}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),\\
\dot{\psi}_1 &= \boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*)\mathfrak{M}^{1}_{\dot{l}}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),\\
\dot{\psi}_2 &= \boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,0}(r^*)\mathfrak{M}^{0}_{\dot{l}}(0,0,\theta,\tau,0,0),\\
\dot{\psi}_3 &= \boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,-1}(r^*)\mathfrak{M}^{-1}_{\dot{l}}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),
\end{aligned}
$$

где $\mathfrak{M}^{m}_{l}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0)$ ($\mathfrak{M}^{\dot{m}}_{\dot{l}}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0)$) — присоединенные гиперсферические функции, определенные на поверхности двумерной комплексной сферы радиуса r, $\boldsymbol{f}^{l_0}_{lmk}(r)$ и $\boldsymbol{f}^{\dot{l}_0}_{\dot{l}\dot{m}\dot{k}}(r^*)$ — радиальные функции (более подробно о двумерной комплексной сфере см. [60–62])[8].

Повторяя для случая $l = 1$ все преобразования, проведенные для общей релятивистски-инвариантной системы [62], получим

$$
\begin{gathered}
2\frac{d\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r)}{dr} - \frac{1}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r) - \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,0}(r) = 0,\\
-\frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,-1}(r) + \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r) = 0,\\
-2\frac{d\boldsymbol{f}^{l}_{1,-1}(r)}{dr} + \frac{1}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,-1}(r) + \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,0}(r) = 0,\\
2\frac{d\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*)}{dr^*} - \frac{1}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*) - \frac{\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,0}(r^*) = 0,
\end{gathered}
$$

[8]Выбирая двумерную комплексную сферу в качестве внутреннего спинового пространства, мы видим, что конфигурационное пространство $\mathcal{M}_{10} = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathfrak{L}_6$ сводится к $\mathcal{M}_8 = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}^2$. Бакри и Кильберг [35] утверждали, что восьмимерное конфигурационное пространство $\mathcal{M}_8$ является наиболее подходящим для описания как полуцелого, так и целого спина. $\mathcal{M}_8$ является однородным пространством группы Пуанкаре. Действительно, пространство $\mathbb{C}^2$ гомеоморфно расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$, которая представляет абсолют (множество бесконечно удаленных точек) пространства Лобачевского $S^{1,2}$. При этом группа дробно-линейных преобразований плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$ изоморфна группе движений пространства $S^{1,2}$. В свою очередь, пространство Лобачевского $S^{1,2}$ является абсолютом мира Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$, и, следовательно, группа дробно-линейных преобразований плоскости $\mathbb{C} \cup \infty$ дважды накрывает группу вращений пространства $\mathbb{R}^{1,3}$, т.е. группу Лоренца. Нетрудно видеть, что двумерная комплексная сфера является комплексификацией небесной сферы Пенроуза [63]. Далее, используя каноническую проекцию $\pi:\ \mathbb{C}^2_* \to S^2$, где $\mathbb{C}^2_* = \mathbb{C}^2/\{0,0\}$ и S^2 – двумерная вещественная сфера, видим, что конфигурационное пространство $\mathcal{M}_8 = \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{C}^2$ сводится к $\mathcal{M}_6 = \mathbb{R}^{1,3} \times S^2$. Вещественная 2-сфера S^2 имеет наименьшую возможную размерность среди всех однородных пространств группы Лоренца. По этой причине $\mathcal{M}_6$ является минимальным однородным пространством группы Пуанкаре (пространственно-временные трансляции действуют тривиально на сфере S^2). Полевые модели на конфигурационном пространстве $\mathcal{M}_6$ рассматривались в недавних работах [41–43]. Дрекслер [43] рассматривал 2-сферу как «спиновую оболочку» $S^2_{r=2s}$ радиуса $r = 2s$, где $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$

$$-\frac{i\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,-1}(r^*)+\frac{\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*)=0,$$
$$-2\frac{d\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,-1}(r^*)}{dr^*}+\frac{1}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,-1}(r^*)+\frac{\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,0}(r^*)=0. \qquad (25)$$

Из второго и пятого уравнений следует $\boldsymbol{f}^{l}_{1,-1}(r)=\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r)$ и $\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,-1}(r^*)=\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*)$. Учитывая эти соотношения, запишем систему (25) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
2\frac{d\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r)}{dr} &- \frac{1}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r) - \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,0}(r) = 0,\\
-2\frac{d\boldsymbol{f}^{l}_{1,-1}(r)}{dr} &+ \frac{1}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,-1}(r) + \frac{\sqrt{2l(l+1)}}{r}\boldsymbol{f}^{l}_{1,0}(r) = 0,\\
2\frac{d\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*)}{dr^*} &- \frac{1}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*) - \frac{\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,0}(r^*) = 0,\\
-2\frac{d\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,-1}(r^*)}{dr^*} &+ \frac{1}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,-1}(r^*) + \frac{\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}}{r^*}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,0}(r^*) = 0. \qquad (26)
\end{aligned}$$

Легко видеть, что первое уравнение эквивалентно второму, а третье уравнение эквивалентно четвертому. Таким образом, мы приходим к следующей системе неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$2r\frac{d\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r)}{dr}-\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r)-\sqrt{2l(l+1)}\boldsymbol{f}^{l}_{1,0}(r)=0,$$
$$2r^*\frac{d\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*)}{dr^*}-\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*)-\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,0}(r^*)=0,$$

где функции $\boldsymbol{f}^{l}_{1,0}(r)$ и $\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,0}(r^*)$ понимаются как неоднородные части. Решения данных уравнений выражаются через элементарные функции:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r) &= C\sqrt{r}+\sqrt{2l(l+1)}r,\\
\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*) &= \dot{C}\sqrt{r^*}+\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}r^*.
\end{aligned}$$

Следовательно, решения для радиальной части имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}^{l}_{1,1}(r)=\boldsymbol{f}^{l}_{1,-1}(r)=C\sqrt{r}+\sqrt{2l(l+1)}r,\\
&\boldsymbol{f}^{l}_{1,0}(r)=\sqrt{2l(l+1)}r,\\
&\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,1}(r^*)=\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,-1}(r^*)=\dot{C}\sqrt{r^*}+\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}r^*,\\
&\boldsymbol{f}^{\dot{l}}_{1,0}(r^*)=\sqrt{2\dot{l}(\dot{l}+1)}r^*.
\end{aligned}$$

Следовательно, решениями $SL(2,\mathbb{C})$–полевых уравнений (24) являются

$$\begin{aligned}
\psi_1(r,\varphi^c,\theta^c) &= \boldsymbol{f}^l_{1,1}(r)\mathfrak{M}^1_l(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),\\
\psi_2(r,\varphi^c,\theta^c) &= \boldsymbol{f}^l_{1,0}(r)\mathfrak{M}^0_l(0,0,\theta,\tau,0,0),\\
\psi_3(r,\varphi^c,\theta^c) &= \boldsymbol{f}^l_{1,-1}(r)\mathfrak{M}^{-1}_l(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),\\
\dot\psi_1(r^*,\dot\varphi^c,\dot\theta^c) &= \boldsymbol{f}^{\dot l}_{1,1}(r^*)\mathfrak{M}^1_{\dot l}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),\\
\dot\psi_2(r^*,\dot\varphi^c,\dot\theta^c) &= \boldsymbol{f}^{\dot l}_{1,0}(r^*)\mathfrak{M}^0_{\dot l}(0,0,\theta,\tau,0,0),\\
\dot\psi_3(r^*,\dot\varphi^c,\dot\theta^c) &= \boldsymbol{f}^{\dot l}_{1,-1}(r^*)\mathfrak{M}^{-1}_{\dot l}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
l &= 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\\
\dot l &= 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}^{\pm1}_l(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0) = e^{\mp(\epsilon+i\varphi)}Z^{\pm1}_l(\theta,\tau),$$

$$\begin{aligned}
Z^{\pm1}_l(\theta,\tau) = \cos^{2l}\frac{\theta}{2}\cosh^{2l}\frac{\tau}{2}\sum_{k=-l}^{l} i^{\pm1-k}\tan^{\pm1-k}\frac{\theta}{2}\tanh^{-k}\frac{\tau}{2}\times\\
\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\pm1-l+1, 1-l-k\\ \pm1-k+1\end{matrix}\,\middle|\, i^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-l+1, 1-l-k\\ -k+1\end{matrix}\,\middle|\,\tanh^2\frac{\tau}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}^0_l(0,0,\theta,\tau,0,0) = Z^0_l(\theta,\tau),$$

$$\begin{aligned}
Z^0_l(\theta,\tau) = \cos^{2l}\frac{\theta}{2}\cosh^{2l}\frac{\tau}{2}\sum_{k=-l}^{l} i^{-k}\tan^{-k}\frac{\theta}{2}\tanh^{-k}\frac{\tau}{2}\times\\
\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-l+1, 1-l-k\\ -k+1\end{matrix}\,\middle|\, i^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-l+1, 1-l-k\\ -k+1\end{matrix}\,\middle|\,\tanh^2\frac{\tau}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}^{\pm1,}_{\dot l}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0) = e^{\mp(\epsilon-i\varphi)}Z^{\pm1}_{\dot l}(\theta,\tau),$$

$$\begin{aligned}
Z^{\pm1}_{\dot l}(\theta,\tau) = \cos^{2\dot l}\frac{\theta}{2}\cosh^{2\dot l}\frac{\tau}{2}\sum_{k=-\dot l}^{\dot l} i^{\pm1-\dot k}\tan^{\pm1-\dot k}\frac{\theta}{2}\tanh^{-\dot k}\frac{\tau}{2}\times\\
\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\pm1-\dot l+1, 1-\dot l-\dot k\\ \pm1-\dot k+1\end{matrix}\,\middle|\, i^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-\dot l+1, 1-\dot l-\dot k\\ -\dot k+1\end{matrix}\,\middle|\,\tanh^2\frac{\tau}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}^0_{\dot l}(0,0,\theta,\tau,0,0) = Z^0_{\dot l}(\theta,\tau),$$

$$Z_l^0(\theta,\tau)=\cos^{2l}\frac{\theta}{2}\cosh^{2l}\frac{\tau}{2}\sum_{k=-l}^{l}i^{-k}\tan^{-k}\frac{\theta}{2}\tanh^{-k}\frac{\tau}{2}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\dot{l}+1,1-\dot{l}-\dot{k}\\ -\dot{k}+1\end{matrix}\,\middle|\,i^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}-\dot{l}+1,1-\dot{l}-\dot{k}\\ -\dot{k}+1\end{matrix}\,\middle|\,\tanh^2\frac{\tau}{2}\right),$$

где $\mathfrak{M}_l^0(0,0,\theta,\tau,0,0)$ $(Z_l^0(\theta,\tau))$ — зональные гиперсферические функции (см. [48]).

Таким образом, в согласии с факторизацией (5) явный вид релятивистской волновой функции $\psi(\boldsymbol{\alpha})=\psi(x)\psi(\mathfrak{g})$ на группе Пуанкаре в случае представления $(1,0)\oplus(0,1)$ (поле Максвелла) определяется следующими выражениями (полное множество):

$$\psi_1(\boldsymbol{\alpha})=\psi_+(\mathbf{k};\mathbf{x},t)\psi_1(\mathfrak{g})=$$
$$=\left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\varepsilon_+(\mathbf{k})\\ \varepsilon_+(\mathbf{k})\end{pmatrix}\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]\boldsymbol{f}_{1,1}^l(r)\mathfrak{M}_l^1(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),$$

$$\psi_0(\boldsymbol{\alpha})=\psi_0(\mathbf{k};\mathbf{x})\psi_0(\mathfrak{g})=\left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\varepsilon_0(\mathbf{k})\\ \varepsilon_0(\mathbf{k})\end{pmatrix}\exp[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}]\boldsymbol{f}_{1,0}^l(r)\mathfrak{M}_l(0,0,\theta,\tau,0,0),$$

$$\psi_{-1}(\boldsymbol{\alpha})=\psi_-(\mathbf{k};\mathbf{x},t)\psi_{-1}(\mathfrak{g})=$$
$$=\left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\varepsilon_-(\mathbf{k})\\ \varepsilon_-(\mathbf{k})\end{pmatrix}\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]\boldsymbol{f}_{1,-1}^l(r)\mathfrak{M}_l^{-1}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),$$

$$\dot{\psi}_1(\boldsymbol{\alpha})=\psi_+^*(\mathbf{k};\mathbf{x},t)\dot{\psi}_1(\mathfrak{g})=$$
$$=\left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\varepsilon_+^*(\mathbf{k})\\ \varepsilon_+^*(\mathbf{k})\end{pmatrix}\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]\boldsymbol{f}_{1,1}^l(r^*)\mathfrak{M}_{\dot{l}}^1(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0),$$

$$\dot{\psi}_0(\boldsymbol{\alpha})=\psi_0^*(\mathbf{k};\mathbf{x})\dot{\psi}_0(\mathfrak{g})=\left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\varepsilon_0^*(\mathbf{k})\\ \varepsilon_0^*(\mathbf{k})\end{pmatrix}\exp[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}]\boldsymbol{f}_{1,0}^l(r^*)\mathfrak{M}_{\dot{l}}(0,0,\theta,\tau,0,0),$$

$$\dot{\psi}_{-1}(\boldsymbol{\alpha})=\psi_-^*(\mathbf{k};\mathbf{x},t)\dot{\psi}_{-1}(\mathfrak{g})=$$
$$=\left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\varepsilon_-^*(\mathbf{k})\\ \varepsilon_-^*(\mathbf{k})\end{pmatrix}\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)]\boldsymbol{f}_{1,-1}^l(r^*)\mathfrak{M}_{\dot{l}}^{-1}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0).\quad(27)$$

Множество (27) состоит из поперечных решений $\psi_{\pm1}(\boldsymbol{\alpha})$ (положительная энергия), $\dot{\psi}_{\pm1}(\boldsymbol{\alpha})$ (отрицательная энергия) и продольных решений $\psi_0(\boldsymbol{\alpha})$, $\dot{\psi}_0(\boldsymbol{\alpha})$. Решения с отрицательной энергией $\dot{\psi}_{\pm1}(\boldsymbol{\alpha})$ должны быть опущены, поскольку фотоны не имеют античастиц. Продольные решения $\psi_0(\boldsymbol{\alpha})$ и $\dot{\psi}_0(\boldsymbol{\alpha})$ не дают вклада в реальное фотонное поле благодаря условиям поперечности (17) и (19).

Следовательно, любой реальный фотон должен описываться только решением $\psi_{\pm 1}(\boldsymbol{\alpha})$:

$$\psi_{\pm 1}(\boldsymbol{\alpha}) = \psi_{\pm}(\mathbf{k};\mathbf{x},t)\psi_{\pm 1}(\mathfrak{g}) = \\ = \left\{2(2\pi)^3\right\}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) \\ \varepsilon_{\pm}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} \exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t)] \boldsymbol{f}^{l}_{1,\pm 1}(r)\mathfrak{M}^{\pm 1}_{l}(\varphi,\epsilon,\theta,\tau,0,0).$$

Таким образом, мы нашли множество решений, определяющее поле Максвелла $(1,0)\oplus(0,1)$ на группе Пуанкаре (или эквивалентно на групповом многообразии $\mathcal{M}_8$). Следует отметить, что ранее полученные решения для поля $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$ (поле Дирака) [64] имеют аналогичную математическую структуру, т.е. они являются функциями на группе Пуанкаре. Данное обстоятельство позволяет рассматривать поля $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$ и $(1,0)\oplus(0,1)$ на равных основаниях, с единой теоретико-групповой точки зрения.

Приложение. Комплексная 2-сфера и гиперсферические функции

Построим в пространстве $\mathbb{C}^3$ двумерную комплексную сферу из величин

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \overset{*}{z}_k = x_k - iy_k$$

следующим образом:

$$\mathbf{z}^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 + 2i\mathbf{xy} = r^2 \tag{A.1}$$

и ее комплексно-сопряженную (дуальную) сферу

$$\overset{*}{\mathbf{z}}{}^2 = \overset{*}{z}{}_1^2 + \overset{*}{z}{}_2^2 + \overset{*}{z}{}_3^2 = \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2 - 2i\mathbf{xy} = \overset{*}{r}{}^2. \tag{A.2}$$

Как известно, величины $\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2$, $\mathbf{xy}$ инвариантны относительно преобразований Лоренца, поскольку поверхность комплексной сферы инвариантна (операторы Казимира группы Лоренца конструируются из таких величин, см. также (A.4)). Более того, поскольку вещественная и мнимая части комплексной 2-сферы преобразуются подобно электрическому и магнитному полям соответственно, то инвариантность величины $\mathbf{z}^2 \sim (\mathbf{E} + i\mathbf{B})^2$ под действием преобразований Лоренца очевидна.

Группа $SL(2,\mathbb{C})$ всех комплексных матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

второго порядка с определителем $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$ является *комплексификацией* группы $SU(2)$. Группа $SU(2)$ является одной из вещественных форм группы $SL(2,\mathbb{C})$. Переход от $SU(2)$ к $SL(2,\mathbb{C})$ реализуется посредством комплексификации трех вещественных параметров φ, θ, ψ (углы Эйлера). Пусть $\theta^c = \theta - i\tau$,

$\varphi^c=\varphi-i\epsilon$, $\psi^c=\psi-i\varepsilon$ – комплексные углы Эйлера, где

$$\begin{array}{rcccl@{\qquad}rcccl}
0 & \leq & \operatorname{Re}\theta^c=\theta & \leq & \pi, & -\infty & < & \operatorname{Im}\theta^c=\tau & < & +\infty,\\
0 & \leq & \operatorname{Re}\varphi^c=\varphi & < & 2\pi, & -\infty & < & \operatorname{Im}\varphi^c=\epsilon & < & +\infty,\\
-2\pi & \leq & \operatorname{Re}\psi^c=\psi & < & 2\pi, & -\infty & < & \operatorname{Im}\psi^c=\varepsilon & < & +\infty.
\end{array} \tag{A.3}$$

Как известно, группа Лоренца имеет два независимых оператора Казимира

$$\begin{aligned}
\mathsf{X}^2 &= \mathsf{X}_1^2+\mathsf{X}_2^2+\mathsf{X}_3^2=\frac{1}{4}(\mathsf{A}^2-\mathsf{B}^2+2i\mathsf{AB}),\\
\mathsf{Y}^2 &= \mathsf{Y}_1^2+\mathsf{Y}_2^2+\mathsf{Y}_3^2=\frac{1}{4}(\widetilde{\mathsf{A}}^2-\widetilde{\mathsf{B}}^2-2i\widetilde{\mathsf{A}}\widetilde{\mathsf{B}}).
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Используя параметры (A.3), получим для операторов Казимира следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\mathsf{X}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial\theta^{c2}}+\cot\theta^c\frac{\partial}{\partial\theta^c}+\frac{1}{\sin^2\theta^c}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^{c2}}-2\cos\theta^c\frac{\partial}{\partial\varphi^c}\frac{\partial}{\partial\psi^c}+\frac{\partial^2}{\partial\psi^{c2}}\right],\\
\mathsf{Y}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial\dot\theta^{c2}}+\cot\dot\theta^c\frac{\partial}{\partial\dot\theta^c}+\frac{1}{\sin^2\dot\theta^c}\left[\frac{\partial^2}{\partial\dot\varphi^{c2}}-2\cos\dot\theta^c\frac{\partial}{\partial\dot\varphi^c}\frac{\partial}{\partial\dot\psi^c}+\frac{\partial^2}{\partial\dot\psi^{c2}}\right].
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Матричные элементы унитарных неприводимых представлений группы Лоренца являются собственными функциями операторов (A.5):

$$\begin{aligned}
\left[\mathsf{X}^2+l(l+1)\right]\mathfrak{M}^l_{mn}(\varphi^c,\theta^c,\psi^c) &= 0,\\
\left[\mathsf{Y}^2+\dot l(\dot l+1)\right]\mathfrak{M}^{\dot l}_{\dot m\dot n}(\dot\varphi^c,\dot\theta^c,\dot\psi^c) &= 0,
\end{aligned} \tag{A.6}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^l_{mn}(\varphi^c,\theta^c,\psi^c) &= e^{-i(m\varphi^c+n\psi^c)}Z^l_{mn}(\theta^c),\\
\mathfrak{M}^{\dot l}_{\dot m\dot n}(\dot\varphi^c,\dot\theta^c,\dot\psi^c) &= e^{-i(\dot m\dot\varphi^c+\dot n\dot\varphi^c)}Z^{\dot l}_{\dot m\dot n}(\dot\theta^c).
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Подставляя функции (A.7) в (A.6) и учитывая операторы (A.5), получим комплексный аналог уравнений Лежандра:

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}-2z\frac{d}{dz}-\frac{m^2+n^2-2mnz}{1-z^2}+l(l+1)\right]Z^l_{mn} = 0, \tag{A.8}$$

$$\left[(1-\overset{*}{z}{}^2)\frac{d^2}{d\overset{*}{z}{}^2}-2\overset{*}{z}\frac{d}{d\overset{*}{z}}-\frac{\dot m^2+\dot n^2-2\dot m\dot n\overset{*}{z}}{1-\overset{*}{z}{}^2}+\dot l(\dot l+1)\right]Z^{\dot l}_{\dot m\dot n} = 0, \tag{A.9}$$

где $z=\cos\theta^c$ и $\overset{*}{z}=\cos\dot\theta^c$. Последние уравнения имеют три особые точки -1,

$+1$, ∞. Решения уравнения (A.8) имеют вид

$$Z^l_{mn} = \sum_{k=-l}^{l} i^{m-k}\sqrt{\Gamma(l-m+1)\Gamma(l+m+1)\Gamma(l-k+1)\Gamma(l+k+1)}\times$$
$$\times\cos^{2l}\frac{\theta}{2}\tan^{m-k}\frac{\theta}{2}\times$$
$$\times\sum_{j=\max(0,k-m)}^{\min(l-m,l+k)}\frac{i^{2j}\tan^{2j}\dfrac{\theta}{2}}{\Gamma(j+1)\Gamma(l-m-j+1)\Gamma(l+k-j+1)\Gamma(m-k+j+1)}\times$$
$$\times\sqrt{\Gamma(l-n+1)\Gamma(l+n+1)\Gamma(l-k+1)\Gamma(l+k+1)}\cosh^{2l}\frac{\tau}{2}\tanh^{n-k}\frac{\tau}{2}\times$$
$$\times\sum_{s=\max(0,k-n)}^{\min(l-n,l+k)}\frac{\tanh^{2s}\dfrac{\tau}{2}}{\Gamma(s+1)\Gamma(l-n-s+1)\Gamma(l+k-s+1)\Gamma(n-k+s+1)}. \quad \text{(A.10)}$$

Будем называть функции Z^l_{mn} в (A.10) *гиперсферическими функциями*[9]. Функции Z^l_{mn} могут быть записаны через гипергеометрические ряды следующим образом:

$$Z^l_{mn} = \cos^{2l}\frac{\theta}{2}\cosh^{2l}\frac{\tau}{2}\sum_{k=-l}^{l} i^{m-k}\tan^{m-k}\frac{\theta}{2}\tanh^{n-k}\frac{\tau}{2}\times$$
$${}_2F_1\left(\begin{matrix} m-l+1, 1-l-k \\ m-k+1 \end{matrix}\middle| i^2\tan^2\frac{\theta}{2}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix} n-l+1, 1-l-k \\ n-k+1 \end{matrix}\middle| \tanh^2\frac{\tau}{2}\right). \quad \text{(A.11)}$$

Следовательно, матричные элементы выражаются посредством функции (*обобщенная гиперсферическая функция*)

$$\mathfrak{M}^l_{mn}(\mathfrak{g}) = e^{-m(\epsilon+i\varphi)}Z^l_{mn}(\cos\theta^c)e^{-n(\varepsilon+i\psi)}, \quad \text{(A.12)}$$

где

$$Z^l_{mn}(\cos\theta^c) = \sum_{k=-l}^{l} P^l_{mk}(\cos\theta)\mathfrak{P}^l_{kn}(\cosh\tau), \quad \text{(A.13)}$$

здесь $P^l_{mn}(\cos\theta)$ – обобщенная сферическая функция на группе $SU(2)$ (см. [66]), а функция $\mathfrak{P}^l_{mn}$ является аналогом обобщенной сферической функции для группы $QU(2)$ (так называемая функция Якоби [58]). $QU(2)$ является группой квазиунитарных унимодулярных матриц второго порядка. Как и группа $SU(2)$, группа $QU(2)$ есть одна из вещественных форм группы $SL(2,\mathbb{C})$ ($QU(2)$ некомпактна). Группа $QU(2)$ изоморфна группе $SU(1,1) \sim SL(2,\mathbb{R})$) (трехмерная

[9]Гиперсферические функции (или гиперсферические гармоники) известны в математике давно (см., например, [65]). Эти функции являются обобщением обычных сферических функций на случай n-мерных евклидовых пространств. По этой причине мы оставим это название (гиперсферические функции) и для случая псевдоевклидовых пространств.

группа Лоренца). Присоединенные гиперсферические функции получаются из (A.12) при $n=0$:

$$\mathfrak{M}_l^m(\mathfrak{g}) = e^{m(\epsilon+i\varphi)} Z_l^m(\cos\theta^c).$$

Литература

1. B. L. van der Waerden, *Nachr. d. Ces. d. Wiss. Göttingen*, 100 (1929).
2. W. L. Bade, H. Jehle, *Rev. Mod. Phys.* **25**, 714 (1953).
3. O. Laporte, G. E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **37**, 1380 (1931).
4. A. A. Campolattaro, *Int. J. Theor. Phys.* **29**, 141, 477 (1990).
5. J. Vaz, Jr., W. A. Rodrigues, Jr., *Int. J. Theor. Phys.* **32**, 945(1993).
6. A. Gsponer, *Int. J. Theor. Phys.* **41**, 689 (2002).
7. Ю. Б. Румер, *Спинорный анализ* (ОНТИ, М.-Л., 1936).
8. E. Majorana, *Scientific Papers*, unpublished, deposited at the "Domus Galileana", Pisa, quaderno **2**, p.101/1; **3**, p.11, 160; **15**, p.16;**17**, p.83, 159.
9. J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **38**, 725 (1931).
10. S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc.* **A63**, 681 (1950).
11. K. Bleuler, *Helv. Phys. Acta* **23**, 567 (1950).
12. W. J. Archibald, *Can. J. Phys.* **33**, 565 (1955).
13. S. A. Bludman, *Phys. Rev.* **107**, 1163 (1957).
14. T. Ohmura, *Prog. Theor. Phys.* **16**, 684 (1956).
15. R. H. Good, *Phys. Rev.* **105**, 1914 (1957).
16. J. S. Lomont, *Phys. Rev.* **111**, 1710 (1958).
17. A. A. Borhgardt, *Sov. Phys. JETP* **34**, 334 (1958).
18. H. E. Moses, *Phys. Rev.* **113**, 1670 (1959).
19. M. Sachs, S. L. Schwebel, *J. Math. Phys.* **3**, 843 (1962).
20. R. Mignani, E. Recami, M. Baldo, *Lettere al Nuovo Cimento* **11**, 568 (1974).
21. H. Bacry, *Nuov. Cim.* **A32**, 448 (1976).
22. A. Da Silveira, *Z. Naturforsch* **A34**, 646 (1979).
23. E. Giannetto, *Lettere al Nuovo Cimento* **44**, 140 (1985).
24. K. Ljolje, *Fortschr. Phys.* **36**, 9 (1988).
25. H. Sallhofer, *Z. Naturforsch* **A45**, 1361 (1990).
26. V. M. Simulik, *Theor. Math. Phys.* **87**, 386 (1991).
27. T. Inagaki, *Phys. Rev* **A49**, 2839 (1994).
28. I. Bialynicki-Birula, *Acta Phys. Pol.* **A86**, 97 (1994).
29. J. F. Sipe, *Phys. Rev.* **A52**, 1875 (1995).
30. S. Bruce, *Nuov. Cim.* **B110**, 115 (1995).
31. V. V. Dvoeglazov, *Nuov. Cim.* **112**, 847 (1997).
32. A. Gersten, *Found. Phys. Lett.* **12**, 291 (1998).
33. S. Esposito, *Found. Phys.* **28**, 231 (1998).
34. D. Finkelstein, *Phys. Rev.* **100**, 924 (1955).
35. H. Bacry, A. Kihlberg, *J. Math. Phys.* **10**, 2132 (1969).
36. F. Lurçat, *Physics* **1**, 95 (1964).

37. A. Kihlberg, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **13**, 57 (1970).
38. C. P. Boyer, G. N. Fleming, *J. Math. Phys.* **15**, 1007 (1974).
39. H. Arodź, *Acta Phys. Pol.* **B7**, 177 (1976).
40. M. Toller, *J. Math. Phys.* **37**, 2694 (1996).
41. S. M. Kuzenko, S. L. Lyakhovich, A. Yu. Segal, *Int. J. Mod. Phys.* **A10**, 1529 (1995).
42. S. L. Lyakhovich, A. Yu. Segal, A. A. Sharapov, *Phys. Rev.* **D54**, 5223 (1996).
43. W. Drechsler, *J. Math. Phys.* **38**, 5531 (1997).
44. A. A. Deriglazov, D. M. Gitman, *Mod. Phys. Lett.* **A14**, 709 (1999).
45. D. M. Gitman, A. L. Shelepin, *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 603 (2001).
46. J. -Y. Grandpeix, F. Lurçat, *Found. Phys.* **32**, 109 (2002); ibid. **32**, 133 (2002).
47. L. C. Biedenharn, H. W. Braden, P. Truini, H. van Dam, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, 3593 (1988).
48. V. V. Varlamov, *Hyperspherical Functions and Harmonic Analysis on the Lorentz Group*, Mathematical Physics Research at the Cutting Edge (Ed. C. V. Benton) pp.193-250 (Nova Science Publishers, New York, 2004).
49. Ю. Б. Румер, А. И. Фет, *Теория групп и квантованные поля* (М.:Наука, 1977).
50. М. А. Наймарк, *Линейные представления группы Лоренца* (М.:Физматлит, 1958).
51. M. A. Vasiliev, *Int. J. Mod. Phys.* **D5**, 763 (1996).
52. В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики* (М.:Наука, 1989).
53. V. V. Varlamov, *Hadronic J.* **25**, 481 (2002).
54. D.V. Ahluwalia, D.J. Ernst, *Int. J. Mod. Phys.* **E2**, 397 (1993).
55. V.V. Dvoeglazov, *Nuov. Cim.* **B111**, 483 (1996).
56. L. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
57. T. D. Newton, E. P. Wigner, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400 (1949).
58. Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп* (М.:Наука, 1965).
59. А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна* (М.:Физматгиз, 1961).
60. M. Huszar, J. Smorodinsky, *Preprint JINR* No. E2-5020, Dubna (1970).
61. Я. А. Смородинский, М. Хусар, *ТМФ* **4**, 328 (1970).
62. V. V. Varlamov, *Int. J. Theor. Phys.* **42**, 583 (2003).
63. Р. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время* (М.:Мир, 1987).
64. V. V. Varlamov, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**, 5467 (2004).
65. H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions, vol. II* (Mc Grow-Hill Book Company, New York, 1953).
66. И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения* (М.:Физматлит, 1958).