Математические структуры и моделирование
2005, вып. 15, с. 25–33

УДК 519.214

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

И.В. Рымар, В.А. Симахин, В.А. Шапцев

Имеется выборка $(X_1, \ldots, X_N) = \overrightarrow{X}$, принадлежащая стационарному эргодическому процессу $X(t)$ с функцией распределения (ф.р.) $F(X(t))$. Пусть $X(t_i) = X_i$ и $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, т.е. $X(t_i) = X(t_0 + \Delta t(i-1))$, $i = 1, 2, \ldots$ Процесс $X(t)$ удовлетворяет условию сильного перемешивания. Нас интересует задача прогнозирования процесса $X(t)$ на k шагов вперед, т.е. требуется по наблюдениям $X_1, \ldots, X_N$ оценить значение X_{N+K}, где $0 < k \leq m$.

Рассмотрим следующую задачу прогнозирования. Имеется выборка $(X_1, \ldots, X_N) = \overrightarrow{X}$, принадлежащая стационарному эргодическому процессу $X(t)$ с функцией распределения (ф.р.) $F(X(t))$. Пусть $X(t_i) = X_i$ и $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, т.е. $X(t_i) = X(t_0 + \Delta t(i-1))$, $i = 1, 2, \ldots$ Процесс $X(t)$ удовлетворяет условию сильного перемешивания (с.п.) [1]. Нас интересует задача прогнозирования процесса $X(t)$ на k шагов вперед, т.е. требуется по наблюдениям $X_1, \ldots, X_N$ оценить значение X_{N+K}, где $0 < k \leq m$. Как известно [2], оптимальной в среднеквадратическом смысле оценкой прогноза $\widehat{X}_{N+K}$ является регрессия

$$\widehat{X}_{N+K} = \int X_{N+K}\, dF\left(X_{N+K} \middle| \overrightarrow{X}\right), \tag{1}$$

где $F\left(X_{N+K} \middle| \overrightarrow{X}\right)$ — условная функция распределения.

В непараметрическом случае, когда $F(X(t))$ неизвестна, вычислить (1) невозможно. Поэтому для оценки прогноза в точке t_{N+K} используют различные методы аппроксимации функции (1). В непараметрическом случае в качестве оценки функционала (1) можно использовать следующую оценку [5, 6]:

$$\widehat{X}_{N+K} = \int X_{N+K}\, dF_N\left(X_{N+K} \middle| \overrightarrow{X}\right), \tag{2}$$

где $F_N\left(X_{N+K} \middle| \overrightarrow{X}\right)$ — непараметрическая оценка $F\left(X_{N+K} \middle| \overrightarrow{X}\right)$.

Рассмотрим, как можно ввести $F_N\left(X_{N+K}\middle|\overrightarrow{X}\right)$. Условную ф.р. $F\left(X_{N+K}\middle|\overrightarrow{X}\right)$ можно записать в виде

$$F\left(X_{N+K}\middle|\overrightarrow{X}\right)=\frac{\dfrac{\partial^m}{\partial\overrightarrow{x}}F\left(X_{N+K}\middle|\overrightarrow{X}\right)}{\dfrac{\partial^m}{\partial\overrightarrow{x}}F\left(\overrightarrow{x}\right)}, \tag{3}$$

где m — размерность вектора $\overrightarrow{X}$ при условии, что соответствующие производные существуют. Далее,

$$\frac{\partial^m}{\partial\overrightarrow{x}}F\left(\overrightarrow{X}\right)$$

— m-ая плотность распределения, так как

$$F\left(X_{N+K}\middle|\overrightarrow{X}\right)=\int\limits_{m+1}\cdots\int c\left(X_{N+K}-t_1\right)c(x_m-t_2)\ldots$$

$$\ldots c(x_m-t_{m+1})\,dF(t_1,\ldots,t_{m+1}),$$

то

$$\frac{\partial^b}{\partial\overrightarrow{x}}F\left(X_{N+K}\middle|\overrightarrow{X}\right)=\int\limits_{m+1}\cdots\int c\left(X_{N+K}-t_1\right)\delta(x_m-t_2)\ldots$$

$$\ldots\delta(x_m-t_{m+1})\,dF(t_1,\ldots,t_{m+1})\,dF(t_1,\ldots,t_{m+1}),$$

где $c(x)$ — функция Хевисайда и $\delta(x)$ — дельта-функция. В качестве оценки $F_N\left(X_{N+K}\middle|\overrightarrow{X}\right)$ возьмем

$$F_N\left(X_{N+K}\middle|\overrightarrow{X}\right)=\frac{\dfrac{\partial^m}{\partial\overrightarrow{x}}F_N\left(X_{N+K},\,\overrightarrow{X}\right)}{f_N\left(\overrightarrow{X}\right)}, \tag{4}$$

где $F_N\left(\overrightarrow{X}\right)$ и $f_N\left(\overrightarrow{X}\right)$ — эмпирическая m-мерная ф.р. и непараметрическая оценка m-мерной плотности, т.е.

$$F_N(t)=\frac{1}{N-m}\sum_{i=1}^{N-m}\prod_{j=1}^{m}c(t_j-x_{i+j}), \tag{5}$$

а

$$F_N(t_{N+K},t_1,\ldots,t_m)=\frac{1}{N-m-k}\sum_{i=1}^{N-m-k}\prod_{j=1}^{m}c(t_j-x_{i+j})c(t_{N+k}-x_{i+m+k}),$$

и $f_N\left(\overrightarrow{X}\right)$ определена в [8],

$$f_N(\overrightarrow{t}) = \int\limits_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{h_N^m} \prod_{j=1}^{m} K\left(\frac{t_j - z_j}{h_N}\right) dF_N\left(\overrightarrow{Z}\right),$$

$F_N\left(\overrightarrow{Z}\right)$ определена в [4]. Подставляя (4) в (2), получаем

$$\widehat{X}_{N+K} = \frac{\dfrac{1}{N-m-k} \sum\limits_{i=1}^{N-m-k} X_{i+m+k-1} \dfrac{1}{h_N^m} \prod\limits_{j=1}^{m} K\left(\frac{X_{N-j+1}-X_{i+j}}{h_N}\right)}{\dfrac{1}{N-m} \sum\limits_{j=1}^{N-m} \dfrac{1}{h_N^m} \prod\limits_{j=1}^{m} K\left(\frac{X_{N-j+1}-X_{i+j-1}}{h_N}\right)} \tag{6}$$

или

$$\widehat{X}_{N+K} = \frac{A_N}{B_N}, \tag{7}$$

где

$$B_N = \int \ldots \int \widetilde{\delta}_N(X_{N-j-1} - t_j)\, dF(t_1, \ldots, t_m), \tag{8}$$

$\widetilde{\delta}_N$ — дельта-последовательность [7]. Так как

$$\widehat{X}_{N+K} = \int t_{N+K}\, dF\left(t_{N+K} \middle| t_1, \ldots, t_m\right),$$

$$F_N\left(t_{N+K} \middle| t_1, \ldots, t_m\right) = \frac{\dfrac{\partial^m}{\partial t_1, \ldots, \partial t_m} F_N\left(t_{N+K}, t_1, \ldots, t_m\right)}{f_N\left(t_1, \ldots, t_m\right)}$$

и

$$\frac{\partial^m}{\partial t_1, \ldots, \partial t_m} F_N\left(t_{N+K}, t_1, \ldots, t_m\right) =$$

$$= \frac{1}{N-m-k} \sum_{i=1}^{N-m-k} c(t_{N+k} - t_{i+k+m}) \prod_{j=1}^{m} \delta(t_j - x_{i+j}),$$

то

$$\frac{\partial^m}{\partial t_1, \ldots, \partial t_m} \widetilde{F}_N\left(t_{N+K}, t_1, \ldots, t_m\right) =$$

$$= \frac{1}{N-m-k} \sum_{i=1}^{N-m-k} c(t_{N+k} - t_{i+k+m}) \prod_{j=1}^{m} \widetilde{\delta}(t_j - x_{i+j}).$$

Тогда A_N запишется в виде

$$A_N = \int \ldots \int\limits_{m+2} z\delta\left(t_{N+k} - z\right) \prod_{j=1}^{m} \delta_N\left(x_{N-j+1} - t_j\right)\, dF\left(t_{N+k}, t_1, \ldots, t_k\right) dz. \tag{9}$$

В качестве δ_N-последовательности можно взять

$$\delta_N(x) = \frac{1}{h_N} K\left(\frac{x}{h_N}\right),$$

где $h_N \to 0$, $N \to \infty$ и $K(x)$ — ядро, удовлетворяющее стандартным условиям [7]. Интегрируя (9) по z, получим

$$A_N = \int\limits_{m+2}\!\!\ldots\!\int t_{N+k} \prod_{j=1}^{m} \delta_N\left(x_{N-j+1} - t_j\right) dF\left(t_{N+k}, t_1, \ldots, t_m\right). \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — выборка стационарного процесса со слабой зависимостью и выполнены следующие условия:*

1) *$F(x(t))$ — непрерывна и имеет все частные производные второго порядка;*

2) *$\sum\limits_{\tau=1}^{\infty} \alpha(\tau)^{\delta/\delta+2} < \infty$, $\delta > 0$ при с.п. ($\alpha(\tau)$ — коэффициент с.п.) [1];*

3) *$\sum\limits_{\tau=1}^{\infty} \sqrt{\beta(\tau)} < \infty$ при р.с.п. ($\beta(\tau)$ — коэффициент р.с.п.);*

4) *Функция $K(u)$ удовлетворяет условиям:*

   а) $\int K^2(u)\,du < \infty$;
   б) $\int K(u)\,du = 1$;
   в) $\int uK(u)\,du = 0$;

5) *$h_N^m N \to 0$, при $N \to \infty$;*

6) *$\int t_{N+K}^2\, dF\left(t_{N+K}, x_N, \ldots, x_{N-m}\right) < \infty$.*

Тогда $Y_N = Nh_N^m \left[\widehat{x}_{N+K} - \frac{EA_N}{EB_N}\right]$ имеет асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией G^2, где G^2 определена ниже и E - знак математического ожидания.

Доказательство. Рассмотрим B_N.

$$E\left(B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) = \int\limits_{m}\!\!\ldots\!\int \prod_{j=1}^{m} \delta_N\left(X_{N-j+1} - t_j\right) dF\left(t_1, \ldots, t_m\right) =$$

$$= \int\limits_{m}\!\!\ldots\!\int \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{h_N^m} K\left(\frac{x_{N-j+1} - t_j}{h_N}\right) f(t_1, \ldots, t_m)\, dt_1, \ldots, dt_m.$$

Делая замену переменной $(x_{N-j+1} - t_j)/h_N = u_j$, $t_j = (x_{N-j+1} - h_N u_j)$, $dt_j = -h_N du_j$, получаем:

$$E\left(B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) =$$

$$= \int \underset{m}{\ldots} \int \prod_{j=1}^{m} K\left(u_j\right) f(x_N - h_N u_1, \ldots, x_{N-m} - h_N u_m)\, du_1, \ldots, du_m = \ldots$$

Используя разложение функции $f(\ldots)$ по формуле Тейлора и учитывая, что $h_N \to 0$:

$$f(x_N - h_N u_1, \ldots, x_{N-m} - h_N u_m) = f(x_N, \ldots, x_{N-m}) +$$
$$+ h_N \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_{N-j+1}} f(x_N, x_{N-j+1}, \ldots, x_{N-m}) u_j +$$
$$+ \frac{h_N^2}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_{N-j+1} \times \partial x_{N-i+1}} f(x_N, \ldots, x_{N-j+1}, x_{N-m}) u_i u_j + O\left[h_N^3 \overrightarrow{u}\right].$$

В результате будем иметь

$$f\left(X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \left[\int K(u)\, du\right]^m +$$
$$+ h_N \left[\int uK(u)\, du\right] I^{m-1} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial X_{N-j+1}} f\left(x_N, \ldots, x_{N-j+1}, x_{N-m}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} h_N^2 \left[I^{m-1} \int u^2 K(u)\, du \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial X_{N-j+1}^2} f(\ldots) + \right.$$
$$\left. + \left(\int uK(u)\, du\right)^2 I^{m-2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\partial^2}{\partial X_{N-j+1} \partial X_{N-i+1}} f(\ldots) \right] + o\left(h_N^3\right),$$

где $I = \int K(u)\, du$.

$$E\left(B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) = f\left(X_N, \ldots, X_{N-m}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} h_N^2 \int u^2 K(u)\, du \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial X_{N-j+1}^2} f\left(X_N, \ldots, X_{N-j+1}, \ldots, X_{N-m}\right) + o\left(h_N^3\right).$$

Найдем дисперсию B_N:

$$D\left(B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) = \int \underset{m}{\ldots} \int \left[\prod_{j=1}^{m} \delta_N\left(X_{N-j+1} - t_j\right)\right]^2 dF(t_1, \ldots, t_m) -$$
$$-\left(E\left(B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right)\right)^2 + 2 \sum_{\lambda=1}^{m(N)+t_k-t_1} \left[\int \underset{m+\lambda}{\ldots} \int \left[\prod_{j=1}^{m} \delta_N\left(X_{N-j+1} - t_j\right) \times\right.\right.$$
$$\left.\left. \times \delta_N\left(X_{N-j+1} - t_{j+\lambda}\right)\right] dF_{m+\lambda}(t_1, \ldots, t_m) - \left(E\left(B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right)\right)^2\right],$$

$$D\left(B_N\Big|X_N,\dots,X_{N-m}\right)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{Nh_N^m}f\left(\Big|X_N,\dots,X_{N-m}\right)\left[\int K^2(u)\,du\right]^2.$$

Рассмотрим A_N. Из (8) имеем:

$$A_N=\int\underset{m+1}{\dots}\int t_{N+k}\prod_{j=1}^{m}\delta_N\left(X_{N-j+1}-t_j\right)\,dF_N(t_{N+k},t_1,\dots,t_m).$$

Тогда

$$E\left(A_N\Big|X_N,\dots,X_{N-m}\right)=\int\underset{m+1}{\dots}\int\prod_{j=1}^{m}\delta_N\left(X_{N-j+1}-t_j\right)\,dF(t_1,\dots,t_m)=$$

$$=\int\underset{m+1}{\dots}\int t_{N+k}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{h_N^m}K\left(\frac{X_{N-j+1}-t_j}{h_N}\right)f(t_{N+k},t_1,\dots,t_m)\,dt_{N+k}dt_1\dots dt_m,$$

подстановкой

$$\frac{X_{N-j+1}-t_j}{h_N}=u_j,\qquad j=\overline{1,m}$$

получаем

$$\int\underset{m+1}{\dots}\int t_{N+k}\prod_{j=1}^{m}K\left(u_j\right)f(X_N-h_Nu_1,\dots,X_{N-m}-h_Nu_m,t_{N+k})\,dt_{N+k}\,du_1\dots du_m.$$

Используя разложение функции $f(\dots)$ и так как $h_N\to 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int t_{N+k}f\left(t_{N+k},X_N,\dots,X_{N-m}\right)\,dt_{N+k}\left[\int K(u)\,du\right]^2+\\
&\quad+\left(\int K(u)\,du\right)^{m-1}h_N\int uK(u)\,du\sum_{j=1}^{m}\int t_{N+k}\times\\
&\qquad\times\frac{\partial}{\partial X_{N-j+1}}f\left(t_{N+k},X_N,\dots,X_{N-j+1},\dots,X_{N-m}\right)\,dt_{N+k}+\\
&\quad+\frac{1}{2}h_N^2\left(\int K(u)\,du\right)^{m-1}\left(\int u^2K(u)\,du\right)\sum_{j=1}^{m}\int t_{N+k}\times\\
&\qquad\times\frac{\partial^2}{\partial X_{N-j+1}^2}f\left(t_{N+k},t_N,\dots,t_{N-m}\right)\,dt_{N+k}+\\
&\quad+\left(\int K(u)\,du\right)^{m-2}\left(\int uK(u)\,du\right)^2\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\int t_{N+k}\times\\
&\qquad\times\frac{\partial^2}{\partial X_{N-j+1}\partial X_{N-i+1}}f\left(t_{N+k},t_N,\dots,t_{N-m}\right)\,dt_{N+k}+o\left(h_N^3\right).
\end{aligned}$$

При условиях 4) теоремы получаем

$$E\left(A_N\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)=\int t_{N+k}f\left(t_{N+k},X_N,\ldots,X_{N-m}\right)\,dt_{N+k}+\frac{1}{2}\,h_N^2\times$$
$$\times\left(\int u^2K(u)\,du\right)\sum_{j=1}^{m}\int t_{N+k}\frac{\partial^2}{\partial X_{N-j+1}^2}f\left(t_{N+k},t_N,\ldots,t_{N-m}\right)\,dt_{N+k}+o\left(h_N^3\right).$$

Найдем дисперсию A_N. Имеем

$$D\left(A_N\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)=\int\underset{m+1}{\ldots}\int t_{N+k}^2\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\delta_N^2\left(X_{N-j+1}-t_j\right)\,dF(t_{N+k},t_1,\ldots,t_m)-\left(E\left(A_N\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)\right)^2+$$
$$+2\sum_{\lambda=1}^{m}\left[\int\underset{m+2}{\ldots}\int t_{N+k}\prod_{j=1}^{m}\delta_N\left(X_{N-j+1}-t_j\right)t_{N+k+\lambda}\times\right.$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\delta_N\left(X_{N-j+1}-t_{j+\lambda}\right)\,dF_{m+2(\lambda+1)}(t_{N+k},t_{N+k+\lambda},t_1,\ldots,t_m)-$$
$$\left.-\left(E\left(A_N\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)\right)^2\right]+$$
$$+2\sum_{\lambda=m+1}^{\infty}\left[\int\underset{2(m+1)}{\ldots}\int t_{N+k}\prod_{j=1}^{m}\delta_N\left(X_{N-j+1}-t_j\right)t_{N+k+\lambda}\times\right.$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\delta_N\left(X_{N-j+1}-t_{j+\lambda}\right)dF_{2(m+1)}\left(t_{N+k},t_{N+k+\lambda},t_1,\ldots,t_m,t_{1+\lambda},\ldots,t_{m+\lambda}\right)-$$
$$\left.-\left(E\left(A_N\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)\right)^2\right].$$

Можно показать, что при $N\to\infty$ и условиях теоремы 2), 3)

$$Nh_N^2D\left(A_N\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\int t_{N+k}^2f\left(t_{N+k},X_N,\ldots,X_{N-m}\right)\,dt_{N+k}\left[\int K^2(u)du\right]^m<\infty.$$

Найдем $\operatorname{cov}\left(A_N,B_N\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)$:

$$\operatorname{cov}\left(A_N,B_N\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)=\int\underset{2m+1}{\ldots}\int t_{N+k}\prod_{j=1}^{m}\delta_N\left(X_{N-j+1}-t_j\right)t_{N+k+\lambda}\times$$
$$\times\,\delta_N\left(X_{N-j+1}-t_{j+m}\right)\,d\operatorname{cov}\left[F_N\left(t_{N+k},t_1,\ldots,t_m\right),F_N\left(t_{m+1},\ldots,t_{2m}\right)\right].$$

Можно показать (как и выше, см. [7]), что

$$\operatorname{cov}\left(A_N, B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{Nh_N^m}\left[\int K^2(u)\,du\right]^m \int t_{N+k} \times$$
$$\times f\left(t_{N+k}, X_N, \ldots, X_{N-m}\right) dt_{N+k} = \frac{1}{Nh_N^m}\left[\int K^2(u)\,du\right]^m \times$$
$$\times f\left(X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \int t_{N+k}\, dF\left(t_{N+k} \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) < \infty.$$

При $N \to \infty$ имеем

$$E\left(A_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \cong f\left(X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \int t_{N+k}\, dF\left(t_{N+k} \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right),$$
$$E\left(B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \cong f\left(X_N, \ldots, X_{N-m}\right),$$
$$D\left(A_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \cong \frac{1}{Nh_N^m}\left[\int K^2(u)\,du\right]^m f\left(X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \times$$
$$\times \int t_{N+k}^2\, dF\left(t_{N+k} \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right),$$
$$\operatorname{cov}\left(A_N, B_N \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \cong \frac{1}{Nh_N^m}\left[\int K^2(u)\,du\right]^m f\left(X_N, \ldots, X_{N-m}\right) \times$$
$$\times \int t_{N+k}\, dF\left(t_{N+k} \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right).$$

С учетом условий 2), 3) теоремы достаточно просто показать, что двумерная величина (A_N, B_N) удовлетворяет условиям многомерной центральной предельной теоремы, т.е. имеет двумерное нормальное распределение с вектором средних (EA_N, EB_N) и ковариационной матрицей

$$\begin{bmatrix} DA_N & \operatorname{cov}(A_N, B_N) \\ \operatorname{cov}(A_N, B_N) & DB_N \end{bmatrix},$$

$$D\widehat{X}_{N+k} \cong (EB_N)^2 - 2EA_N(EB_N)^{-3}\operatorname{cov}(B_N, A_N) + (EA_N)^2(EB_N)^{-4}DB_N.$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} D\widehat{X}_{N+k} &\cong \frac{Q^m}{Nh_N^m}\left[f^{-2}f\widetilde{a}(t^2) - 2fa(\ldots)\frac{1}{f^3}fa(\ldots) + f^2a^2(\ldots))\frac{1}{f^4}f\right] = \\ &= \frac{Q^m}{Nh_N^m}\frac{1}{f}\left[\widetilde{a}(t^2) - a(\ldots)\right] = \\ &= \frac{Q^m}{Nh_N^m}\frac{1}{f}\left[\int t_{N+k}^2\, dF\left(t_{N+k} \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \left(\int t_{N+k}\, dF\left(t_{N+k} \middle| X_N, \ldots, X_{N-m}\right)\right)^2\right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \int K^2(u)\,du, \\ f &= f\left(X_N,\ldots,X_{N-m}\right), \\ \widetilde{a}(t^2) &= \int t_{N+k}^2\,dF\left(t_{N+k}\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right), \\ a(\ldots) &= \int t_{N+k}\,dF\left(t_{N+k}\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, из теоремы 2.1.1 [7] непосредственно следует, что

$$Nh_N^m\left[\widehat{X}_{N+k}-\frac{EA_N}{EB_N}\right]$$

будет иметь асимптотически нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией

$$G^2=\frac{Q^m}{f\left(X_N,\ldots,X_{N-m}\right)}\left[\int t_{N+k}^2\,dF\left(t_{N+k}\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\int t_{N+k}\,dF\left(t_{N+k}\middle|X_N,\ldots,X_{N-m}\right)\right)^2\right],$$

что и требовалось доказать. ■

Литература

1. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники, т.2. М.: Сов. Радио, 1975.
3. Чуев Ю.В. и др. Прогнозирование количественных характеристик процессов. М.: Сов.Радио, 1975.
4. Дмитриев Ю.Г. и др. Непараметрическое оценивание функционалов по стационарным выборкам. Томск: Изд-во ТГУ, 1974.
5. Симахин В.А. Непараметрическое прогнозирование стационарных процессов // Экономико-математические методы в планировании и управлении. Челябинск, 1977.
6. Рымар Т.Н., Симахин В.А. Непараметрическое прогнозирование стационарных процессов со слабой зависимостью // Мат-лы IV-й Всесоюзной конф. «Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП». Тула, 1990.
7. Добровидов А.В., Кошкин Г.М. Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука, 1997. 334с.
8. Rosenblat M. Density estimates and Markov sequences // Nonparametric techniques in statistical inference. Cambridge, University Press, 1970. P.199-210.