Математические структуры и моделирование
2005, вып. 15, с. 102–106

УДК 539.12:530.145

О ПОЛЯХ ЯНО И ЯНО-КИЛЛИНГА В МОДЕЛЯХ ФРИДМАНА

А.В. Шалупаев, В.В. Клишевич

В работе получены все решения уравнений Яно и Яно-Киллинга для открытой и закрытой моделей Фридмана. Представленные выводы сформулированы в виде двух лемм. Обсуждаются некоторые применения полученных решений.

Модели Фридмана [1] занимают важное место в теоретических исследованиях по современной космологии. В основе моделей лежат предположения об однородности и изотропии распределения вещества по пространству. Современные астрономические данные не противоречат такому предположению. Существенным свойством моделей является их нестационарность. По-видимому, именно это свойство дает правильное объяснение явления красного смещения [2].

Изучение в литературе моделей Фридмана ведется с разных точек зрения [3–5]. В зависимости от выбора в метрике масштабного фактора получают модели, описывающие те или иные распределения вещества в пространстве. Тема нашей статьи связана с уравнением Дирака и его операторов симметрии в пространствах Фридмана. Общий вид операторов симметрии для уравнения Дирака и уравнения полей, по которым можно построить операторы симметрии, впервые были получены в работе В.Н. Шаповалова [6] и независимо в работах Картера и МакЛенагана [7, 8]. Фактически построение оператора симметрии для уравнения Дирака в произвольном римановом пространстве сводится к вопросу о существовании специальных векторных и тензорных полей, которые называются полями Киллинга, Яно и Яно-Киллинга (общие определения можно найти также в [9]). Зная решение уравнений на поля Киллинга, Яно и Яно-Киллинга в конкретном искривленном пространстве, можно построить операторы симметрии для уравнения Дирака в явном виде. Изучив алгебру, которую образуют операторы симметрии, мы имеем возможность исследовать вопросы интегрируемости уравнения Дирака и построения его решений.

Краткое содержание нашей работы следующее. В разделах 1, 2 мы рассматриваем уравнения на поля Яно и Яно-Киллинга и указываем необходимые алгебраические условия существования этих полей в произвольном римановом

Омский государственный университет.
E-mail: `Tao.a@mail.ru, klishe@univer.omsk.su`

пространстве. В разделе 3, опираясь на необходимые условия, мы строим решения указанных уравнений в открытой и закрытой моделях Фридмана. Результаты сформулированы в виде двух лемм.

Элемент длины в закрытой изотропной модели записывается в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)). \tag{1}$$

Элемент длины в открытой изотропной модели записывается в виде

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)). \tag{2}$$

Функция $a(\eta)$ называется масштабным фактором.

1. Векторное поле Яно

Векторное поле Яно определяется из уравнений

$$f_{i;j} = \frac{1}{4} g_{ij} f^k_{\ ;k}, \qquad f_i = \eta_{,i}. \tag{3}$$

Рассмотрим некоторые очевидные свойства этого векторного поля, подробно доказанные в работе [10].

Свойство 1. $f_{i;j} = f_{j;i}$. Следует из формулы (3).

Свойство 2. $f_{i,j} = f_{j,i}$. Следует из свойства 1 в силу симметричности символов Кристоффеля по нижним индексам.

Свойство 3. Если все компоненты вектора Яно не зависят от координаты x_j, то компонента f_j суть константа. Следует из свойства 2.

Свойство 4. Если компонента вектора Яно f_j суть константа, то все остальные компоненты не зависят от координаты x_j. Следует из свойства 2.

Свойство 5. Поднимая индекс i в формуле (3), получим $f^i_{\ ;j} = 0, \quad i \neq j$.

Свойство 6. Положив в предыдущей формуле $i = j = 1, 2, 3, 4$, получим $f^1_{\ ;1} = f^2_{\ ;2} = f^3_{\ ;3} = f^4_{\ ;4} = \Theta$. С учетом последнего свойства уравнение (3) может быть переписано в виде $f_{i;j} = \Theta g_{ij}$, а с использованием свойства 2 уравнению (3) можно придать следующий вид:

$$f_{i;j} + f_{j;i} = 2\Theta g_{ij}, \quad \Theta = \frac{1}{4} f^n_{\ ;n}. \tag{4}$$

По терминологии монографии [9] векторное поле, удовлетворяющее уравнению (4), называется конформно-киллинговым, а по терминологии монографии [11] – обобщенным векторным полем Киллинга. В той же монографии [11, стр.72] указаны условия совместности этих уравнений в общем случае. Эти условия представляют собой соотношения на компоненты поля и их производные до определенного порядка. Покажем, что в нашей ситуации эти условия представляют собой соотношения только на компоненты поля.

Свойство 7. (Необходимое условие существования векторного поля Яно).

Сворачивая по индексам i и j формулу Риччи $f_{i;j;k} - f_{i;k;j} = f_n R^n{}_{ijk}$ и подставляя в нее формулу (3), получим $f_{i;j;k} = -\frac{1}{3} g_{ij} f_n R^n{}_k$. Используя формулу Риччи, получим соотношение

$$f_n(g_{ij} R^n{}_k - g_{ik} R^n{}_j + 3R^n{}_{ijk}) = 0. \tag{5}$$

Тензор Римана определяется формулой:

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{nk}\Gamma^n_{jl} - \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{jk}, \tag{6}$$

а тензор Риччи – сверткой по первому и третьему индексам:

$$R_{jk} = R^n{}_{jnk}. \tag{7}$$

Обобщим формулу (5) на произвольную размерность многообразия. Для этого следует использовать уравнение на вектор Яно в n-мерном пространстве, оно имеет вид:

$$f_{i;j} = \frac{1}{n} g_{ij} f^k{}_{;k}. \tag{8}$$

Формула (5) в n-мерном случае выглядит следующим образом:

$$f_n(g_{ij} R^n{}_k - g_{ik} R^n{}_j + (n-1) R^n{}_{ijk}) = 0. \tag{9}$$

2. Тензорное поле Яно-Киллинга

Антисимметричное тензорное поле Яно-Киллинга определяется из уравнений

$$f_{ij} + f_{ji} = 0, \quad f_{ij;k} = e_{ijkl} g^l, \quad (f_{ij;k} + f_{ik;j} = 0). \tag{10}$$

Рассмотрим некоторые очевидные свойства этого тензорного поля, подробно доказанные в работе [10].

Свойство 1. $f_{ij;k} = f_{jk;i} = f_{ki;j}$, то есть индексы можно циклировать. Следует из формулы (10).

Свойство 2. $f_{ij;k} = 0$ при совпадении любых двух индексов. Следует из формулы (10).

Свойство 3. $3f_{ij;k} = f_{ij;k} + f_{jk;i} + f_{ki;j} = f_{ij,k} + f_{jk,i} + f_{ki,j}$. Следует из антисимметрии этого тензора и симметрии символов Кристоффеля по нижним индексам.

Свойство 4. (Необходимое условие существования тензорного поля Яно – Киллинга). Рассматривая два уравнения на поле Яно – Киллинга, можно получить соотношение

$$R^n{}_{jji} f_{in} + R^n{}_{iij} f_{jn} = 0, \tag{11}$$

которое должно выполняться для всех индексов $i \neq j$.

Свойство 5. (Необходимое условие существования тензорного поля Яно – Киллинга). Рассмотривая тройку уравнений на поле Яно – Киллинга, можно получить соотношение

$$(R^n{}_{kij} + R^n{}_{jik}) f_{in} - R^n{}_{iik} f_{jn} - R^n{}_{iij} f_{kn} = 0, \tag{12}$$

которое должно выполняться для всех различных индексов i, j, k. Отметим, что формула (11) есть частный случай формулы (12), если положить $k = j$.

3. Поля Яно и Яно-Киллинга в моделях Фридмана

При нахождении решений уравнений на поля Яно и Яно-Киллинга мы существенно использовали необходимые условия существования этих полей (5), (11) и (12), а также отмеченные их свойства. Приводим окончательные результаты. Всюду указываем только ненулевые компоненты.

Лемма 1. *Метрики Фридмана (1) допускают единственное нетривиальное векторное поле Яно и Яно-Киллинга только при значении масштабного фактора*

$$a = a_0 \exp(c\eta), \tag{13}$$

ненулевая компонента поля Яно имеет вид

$$f_1 = f_0 \exp(2c\eta), \tag{14}$$

ненулевые компоненты поля Яно-Киллинга для метрики (1) имеют вид

$$f_{23} = -(c_1 \cos(\varphi) - c_2 \sin(\varphi)) \sin(\chi) \exp(3c\eta), \tag{15}$$

$$f_{24} = (c_1 \sin(\varphi) + c_2 \cos(\varphi)) \sin(\chi) \sin(\theta) \cos(\theta) \exp(3c\eta), \tag{16}$$

$$f_{34} = (c_1 \sin(\varphi) - c_2 \cos(\varphi)) \sin(\chi)^2 \cos(\chi) \sin(\theta)^2 \exp(3c\eta) + c_3 \sin(\theta) \sin(\chi)^3 \exp(3c\eta), \tag{17}$$

здесь $a_0, c, c_1, c_2, c_3, f_0$ *– произвольные постоянные.*

Доказательство. Из необходимых алгебраических условий (5) следует, что если $a = a_0 \exp(c\eta)$, a_0, c – постоянные, то $f_2 = f_3 = f_4 = 0$. Далее из системы уравнений (3) находим общий вид поля Яно в виде (14). При $a \neq a_0 \exp(c\eta)$ системы (3) и (5) допускают только тривиальное решение. Используя необходимое алгебраическое условие на поле Яно-Киллинга (12), видим, что если $a = a_0 \exp(c\eta)$, a_0, c – постоянные, то $f_{12} = f_{13} = f_{14} = 0$. Используя систему уравнений (10), находим общий вид поля Яно-Киллинга в виде (15-17). При $a \neq a_0 \exp(c\eta)$ системы (10) и (12) допускают только тривиальное решение. ■

Лемма 2. *Метрики Фридмана (2) допускают нетривиальное тензорное поле Яно и Яно-Киллинга только при значении масштабного фактора*

$$a = a_0 \exp(c\eta), \tag{18}$$

ненулевая компонента поля Яно имеет вид

$$f_1 = f_0 \exp(2c\eta), \tag{19}$$

ненулевые компоненты поля Яно-Киллинга для метрики (2) имеют вид

$$f_{23} = -(c_1 \cos(\varphi) - c_2 \sin(\varphi)) \sinh(\chi) \exp(3c\eta), \tag{20}$$

$$f_{24} = (c_1 \sin(\varphi) + c_2 \cos(\varphi)) \sinh(\chi) \sin(\theta) \cos(\theta) \exp(3c\eta), \tag{21}$$

$$f_{34} = -(c_1 \sin(\varphi) - c_2 \cos(\varphi)) \sinh(\chi)^2 \cosh(\chi) \sin(\theta)^2 \exp(3c\eta) + c_3 \sin(\theta) \sinh(\chi)^3 \exp(3c\eta); \tag{22}$$

здесь a_0, c, c_1, c_2, c_3 *– произвольные постоянные.*

Доказательство. Из необходимых алгебраических условий (5) следует, что если $a = a_0 \exp(c\eta)$, a_0, c – постоянные, то $f_2 = f_3 = f_4 = 0$. Далее из системы уравнений (3) находим общий вид поля Яно в виде (19). При $a \neq a_0 \exp(c\eta)$ системы (3) и (5) допускают только тривиальное решение. Из необходимых алгебраических условий (12) следует, что если $a = a_0 \exp(c\eta)$, a_0, c – постоянные, то $f_{12} = f_{13} = f_{14} = 0$. Далее из системы уравнений (10) находим общий вид поля Яно-Киллинга в виде (20)-(22). При $a \neq a_0 \exp(c\eta)$ системы (10) и (12) допускают только тривиальное решение. ■

Литература

1. Фридман А.А. О кривизне пространства. Петроград. 1922.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Том II. М.: Наука. 1988.
3. Розенталь И.Л. Элементарные частицы и космология // УФН. 1997. Т. 167, №. 8. С. 802-810.
4. Гинзбург В.Л. О некоторых успехах физики и астрономии за последние 3 года // УФН. 2002. Т. 172, №. 2. С. 213-219.
5. Глинер Э.Б. Раздувающаяся Вселенная и вакуумоподобное состояние физической среды // УФН. 2002. Т. 172, №. 2. С. 221-228.
6. Шаповалов В.Н. Симметрия уравнения Дирака-Фока // Известия вузов. Физика. 1975. N.6. С.57-63.
7. Carter B. Killing tensor quantum numbers and conserved currents in curved space // Phys.Rev. 1977. V.16D. P.3395-3414.
8. Carter B. and McLenaghan R.G. Generalized total angular momentum operator for the Dirac equation in curved space-time // Phys.Rev. 1979. V.19 D. P.1093-1097.
9. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ. 1957.
10. Клишевич В.В. К вопросу о существовании спинорных операторов симметрии для уравнения Дирака // Известия вузов. Физика. 2000. Т. 43, №. 10. С. 87-91.
11. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука. 1983.