Математические структуры и моделирование
2005, вып. 15, с. 34–40

УДК 515.122 : 517.982

О ТОПОЛОГИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ СХОДИМОСТЬЮ

А.А. Чемёркин

Показано, что произвольный класс направленностей на множестве порождает на этом множестве топологию. Также доказано, что секвенциальная топология, ассоциированная с локально выпуклой, может не быть линейной.

Хорошо известно, что понятия сходимости и топологии тесно связаны, например, в [1] вводится понятие класса сходимости, который порождает топологию. В первом предложении данной статьи показано, что по произвольному классу направленностей можно построить сильнейшую топологию, в которой все эти направленности будут сходиться, причем класс этот может не являться классом сходимости. Далее в статье рассматривается топология, порожденная сходящимися в некоторой исходной топологии последовательностями, приводятся основные свойства такой топологии (полученные автором ранее и опубликованные в статье [2]), а также доказываются два новых результата.

Основные понятия функционального анализа и общей топологии используются в статье без предварительных пояснений (см., например, [1, 3–5]).

Для подмножества A векторного пространства X через $\mathrm{l.h.}\, A$ и $\mathrm{abs\,co}\, A$ обозначим соответственно линейную и абсолютно выпуклую оболочку множества A, через $\mathbb{O}$ будем обозначать нулевой элемент векторного пространства X. Если (X, τ) — топологическое пространство, то замыкание множества $A \subset X$ в топологии τ будем обозначать $\mathrm{cl}\, A$ (или $\mathrm{cl}_\tau\, A$), через $\mathrm{Cl}\, X$ (или $\mathrm{Cl}(X, \tau)$) обозначаем множество всех замкнутых подмножеств X, через $\mathcal{O}_x$ (или $\mathcal{O}_x^X$) — совокупность всех окрестностей точки $x \in X$.

1. Порождение топологии произвольным классом направленностей

Пусть X — непустое множество, $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X.

Омский государственный университет.
E-mail: `archem-math@mail.ru`

Определение 1. Пусть $J \neq \varnothing$, отношение σ на J называется направлением, если выполнены условия:
1) $\forall\, j \in J \;\; (j,j) \in \sigma$;
2) $\forall\, i,j,k \in J \;\; (i,j) \in \sigma,\ (j,k) \in \sigma \Rightarrow (i,k) \in \sigma$;
3) $\forall\, i,j \in J \;\; \exists\, k \in J \;:\; (k,i) \in \sigma,\ (k,j) \in \sigma$.

Далее вместо $(i,j) \in \sigma$ будем писать $i \succcurlyeq j$ (или $j \preccurlyeq i$). Множество J с заданным на нем направлением $\succcurlyeq$ называется направленным множеством.

Определение 2. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов из X называется направленностью, если его множество индексов J является направленным множеством.

Определение 3. Пусть X — топологическое пространство, $\{x_j\}_{j\in J}$ — направленность в X, будем говорить, что направленность $\{x_j\}_{j\in J}$ сходится к элементу $x \in X$ или что x является пределом направленности $\{x_j\}_{j\in J}$ (пишем $x_j \to x$ и $x = \lim\limits_{j\in J} x_j$), если

$$\forall\, V \in \mathcal{O}_x \;\; \exists\, j_V \in J \;:\; \forall\, j \succcurlyeq j_V \;\; x_j \in V.$$

Пусть Σ — некоторое множество направленностей элементов из X. Пусть также определен оператор $\lambda : \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, для любой направленности $s \in \Sigma$ назовем $\lambda(s) \subset X$ множеством ее пределов.

Предложение 1. *На X существует сильнейшая топология τ, в которой направленности $S \in \Sigma$ сходятся к элементам $\lambda(S)$, причем эта топология однозначно определяется парой (Σ, λ).*

Доказательство. Определим класс подмножеств τ множества X следующим образом:

$$A \in \tau \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall\, x \in A \;\; \forall\, \{x_j\}_{j\in J} \in \Sigma \;\; (\; x \in \lambda(\{x_j\}) \;\Rightarrow\; \exists\, j_0 \in J : \forall\, j \succcurlyeq j_0 \;\; x_j \in A \;).$$

Покажем, что τ является топологией. Очевидно, что $X, \varnothing \in \tau$. Пусть $A \in \tau$ и $B \in \tau$. Возьмем $x \in A \cap B$ и направленность $\{x_j\}_{j\in J} \in \Sigma$ такую, что $x \in \lambda(\{x_j\})$. Тогда найдется элемент $j_A \in J$ ($j_B \in J$) такой, что при $j \succcurlyeq j_A$ ($j \succcurlyeq j_B$) имеем $x_j \in A$ ($x_j \in B$). Далее зафиксируем $j_0 \succcurlyeq j_A, j_B$ и получим, что $x_j \in A \cap B$ при $j \succcurlyeq j_0$, то есть $A \cap B \in \tau$. Пусть теперь $\{\; A_i \mid i \in I \;\} \subset \tau$. Так как из принадлежности $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ следует существование такого $i \in I$, что $x \in A_i$, то имеем $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$. Таким образом, τ действительно является топологией. Остальные утверждения предложения вытекают непосредственно из определения топологии τ. ■

***Замечание* 1.** В топологии τ могут, вообще говоря, сходиться направленности, не лежащие в Σ, возможно также, что для направленности $\{x_j\}_{j\in J} \in \Sigma$ найдется элемент $x \in X \setminus \lambda(\{x_j\})$ такой, что $\{x_j\}_{j\in J}$ сходится к x в топологии τ. То есть класс

$$\mathfrak{S} = \{\; (S,s) \mid S \in \Sigma,\ s \in \lambda(S) \;\}$$

не является в общем случае классом сходимости (см. [1, с.107]). Следующий пример подтверждает сказанное.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}$, в Σ поместим все тождественные направленности. Для $\{x_j\}_{j\in J} \in \Sigma$ существует $x \in X$ такой, что $x_j = x$ $(j \in J)$, положим

$$\lambda(\{x_j\}) = (x-1, x) \cup (x, x+1).$$

Тогда в топологии τ, построенной по (Σ, λ), открыты будут лишь X и $\varnothing$, то есть τ — антидискретная топология, однако в такой топологии произвольная направленность сходится к любой точке.

Пусть далее Y — топологическое пространство и $\mathfrak{F}$ — некоторое множество отображений X в Y. Определим

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}} = \{\ (\{x_j\}_{j\in J}, x)\ \mid \forall\, f \in \mathfrak{F}\ f(x_j) \to f(x)\ \}.$$

Предложение 2. *Класс $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ является классом сходимости на X. То есть существует единственная топология τ на X, в которой направленность S сходится к элементу $s \in X$ тогда и только тогда, когда $(S, s) \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$. Эта топология совпадает с инициальной топологией относительно отображений $f \in \mathfrak{F}$ (то есть со слабейшей топологией на X, при которой все отображения из $\mathfrak{F}$ непрерывны).*

2. Секвенциальная топология

Определение 4. Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется секвенциально замкнутым, если оно содержит предел каждой своей сходящейся последовательности. Наименьшее секвенциально замкнутое множество, содержащее множество A (оно, очевидно, совпадает с пересечением всех секвенциально замкнутых множеств, содержащих A), называется его секвенциальным замыканием и обозначается $\operatorname{scl} A$.

Приведем основные свойства секвенциального замыкания в следующей лемме (см., например, [4, с.14], [6, с.4]).

Лемма 1. *Для любых A, $B \subset X$ верно*
1. $\operatorname{scl}\varnothing = \varnothing$*;*
2. $A \subset \operatorname{scl} A \subset \operatorname{cl} A$*;*
3. A секвенциально замкнуто $\Leftrightarrow$ $A = \operatorname{scl} A$*;*
4. $\operatorname{scl}(\operatorname{scl} A) = \operatorname{scl} A$*;*
5. $A \subset B \ \Rightarrow\ \operatorname{scl} A \subset \operatorname{scl} B$*;*
6. $\operatorname{scl}(A \cup B) = \operatorname{scl} A \cup \operatorname{scl} B$*;*
7. $\operatorname{scl}(A \cap B) \subset \operatorname{scl} A \cap \operatorname{scl} B$.

Из леммы 1 следует, что оператор, который каждому подмножеству X сопоставляет его секвенциальное замыкание, является оператором Куратовского, следовательно, на X существует единственная топология, операция замыкания в которой совпадает с операцией секвенциального замыкания в исходной топологии τ (см., например, [1, с.68]). Эту топологию будем называть *секвенциальной топологией, ассоциированной с τ*, и обозначим $s\tau$. Замкнутые множества в

топологии $s\tau$ — это множества, секвенциально замкнутые в τ, и для каждого $A \subset X$ $\operatorname{scl}_\tau A = \operatorname{cl}_{s\tau} A$.

Топология $s\tau$ может быть порождена в смысле предложения 1 парой (Σ, λ), где класс Σ состоит из сходящихся в топологии τ последовательностей, а оператор λ каждой такой последовательности ставит в соответствие множество ее пределов в топологии τ.

Определение 5. Топологическое пространство (X, τ) называется секвенциальным, если топологии τ и $s\tau$ совпадают (см. также [7, с.94]).

Класс секвенциальных пространств достаточно широк. Например, любое топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности (тем более полуметризуемое пространство), является секвенциальным (см. [1, с.105]). Однако наличие первой аксиомы счетности не является необходимым условием для секвенциальности пространства (см. [7, с.95]).

Многие свойства топологии $s\tau$ исследованы автором в статье [2], приведем здесь краткую сводку основных результатов:

1. Топология $s\tau$ мажорирует топологию τ, а сходящиеся последовательности в этих топологиях одни и те же.

2. Если на множестве X заданы две топологии τ и σ, сходящиеся последовательности в которых одни и те же, то $s\tau = s\sigma$.

3. Отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ секвенциально непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно из $(X, s\tau)$ в $(Y, s\sigma)$.

4. Топологии τ и $s\tau$ на X совпадают тогда и только тогда, когда каждое секвенциально непрерывное отображение (X, τ) в любое пространство (Y, σ) непрерывно.

К моменту выхода вышеупомянутой статьи автору не удалось найти ответ на следующий вопрос: является ли секвенциальная топология, ассоциированная с линейной, сама линейной. Отрицательный ответ дается в следующем предложении. Напомним прежде несколько определений из функционального анализа (см. [5]).

Определение 6. Полное метризуемое локально выпуклое пространство называется пространством Фреше.

Определение 7. Пусть семейство топологических векторных пространств $\{X_j\}_{j\in J}$ таково, что все X_j $(j \in J)$ являются векторными подпространствами некоторого пространства X,

$$X = \text{l.h.} \bigcup_{j\in J} X_j,$$

и при $X_i \subset X_j$ вложение $X_i \longrightarrow X_j$ непрерывно. Сильнейшая (локально выпуклая) линейная топология на X, при которой все вложения $X_j \longrightarrow X$ непрерывны, называется (локально выпуклой) индуктивной топологией на X относительно семейства $\{X_j\}_{j\in J}$, а само пространство X, наделенное этой топологией, называется (локально выпуклым) индуктивным пределом семейства ТВП $\{X_j\}_{j\in J}$ (обозначается $(X = l.c. \operatorname{ind}\lim_{j\in J} X_j)$ $X = \operatorname{ind}\lim_{j\in J} X_j$).

***Замечание* 2.** Если
$$X = l.c.\operatorname{ind}\lim_{j\in J} X_j,$$
то множества вида
$$\operatorname{abs\,co}\bigcup_{j\in J} U_j,$$
где $U_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{O}}^{X_j}$ $(j \in J)$, образуют базу окрестностей нуля в X (см. [5, с.36]).

***Замечание* 3.** Индуктивный предел последовательности локально выпуклых пространств является локально выпуклым индуктивным пределом этих пространств (см. [5, с.36]).

Определение 8. Индуктивный предел
$$X = \operatorname{ind}\lim_{j\in J} X_j$$
называется регулярным, если из ограниченности множества B в X следует, что B содержится и ограничено в некотором X_j.

Определение 9. Индуктивный предел
$$X = \operatorname{ind}\lim_{j\in J} X_j$$
называется строгим, если $\{X_j\}_{j\in J}$ является направленностью с отношением $i \preccurlyeq \preccurlyeq j \Leftrightarrow X_i \subset X_j$ и при $i \preccurlyeq j$ топология, индуцированная из X_j на X_i, совпадает с исходной топологией на X_i.

Предложение 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть (X, τ) — регулярный индуктивный предел направленности секвенциальных локально выпуклых пространств $\{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$, причем индуцированная из X на X_j топология совпадает с τ_j, тогда $s\tau$ является финальной топологией относительно вложений $X_j \subset X$ (то есть сильнейшей топологией на X, при которой все вложения $X_j \subset X$ непрерывны).

2. Пусть (X, τ) — LF-пространство, то есть X — это строгий индуктивный предел возрастающей последовательности пространств Фреше $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, метрику на X_n обозначим d_n и предположим, что выполнено следующее условие
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in X_n\ \ d_n(x, \mathbb{O}) \leqslant d_{n+1}(x, \mathbb{O}).$$
Тогда топология $s\tau$ не является линейной и $s\tau \neq \tau$.

Доказательство. 1. Достаточно показать следующую эквивалентность
$$A \in \operatorname{Cl}(X, s\tau) \ \Leftrightarrow\ \forall\, j \in J\ \ A \cap X_j \in \operatorname{Cl} X_j.$$

$\Rightarrow$) Так как $s\tau_j = \tau_j$, то достаточно показать, что $A \cap X_j$ секвенциально замкнуто в X_j. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \cap X_j$ сходится в топологии τ_j к элементу $x \in X_j$. Тогда $x_n \to x$ в топологии τ (так как индуцированная

из X на X_j топология совпадает с τ_j), откуда имеем, что $x_n \to x$ в $s\tau$. Таким образом, $x \in A$, кроме того, $x \in X_j$, следовательно, $x \in A \cap X_j$ и $A \cap X_j \in \operatorname{Cl} X_j$.

$\Leftarrow$) Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ и $x_n \to x$ в топологии $s\tau$ (или в топологии τ, что равносильно). Покажем, что $x \in A$. Множество

$$B = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \cup \{x\}$$

ограничено в X, следовательно, существует $j \in J$ такой, что $B \subset X_j$, откуда получаем сходимость $x_n \to x$ в топологии τ_j. Так как

$$A \cap X_j \in \operatorname{Cl} X_j,$$

то $x \in A \cap X_j$, а значит, $x \in A$.

2. Из утверждения 1 следует, что если топология $s\tau$ линейна, то $s\tau = \tau$, поэтому достаточно показать, что $s\tau \neq \tau$. Топология $s\tau$ — это финальная топология относительно вложений $X_n \subset X$, поэтому, как легко видеть, множество

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

где

$$U_n = \left\{\, x \in X_n \mid d_n(x, \mathbb{O}) \leqslant \frac{1}{n} \,\right\},$$

является окрестностью нуля в топологии $s\tau$; покажем, что это множество не окрестность нуля в τ. Предположим противное, то есть существует множество

$$A = \operatorname{abs\,co} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n,$$

где V_n — окрестность нуля в X_n ($n \in \mathbb{N}$), такое, что $A \subset B$. Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно включение $V_1 \subset U_n$. Пусть найдется $n \in \mathbb{N}$ такой, что V_1 не содержится в U_n, то есть существует $x \in V_1$, для которого

$$d_n(x, \mathbb{O}) > \frac{1}{n}.$$

Зафиксируем $y \in V_n \setminus X_{n-1}$. Далее рассмотрим множество элементов

$$x_t = tx + (1-t)y \ \ (t \in \mathbb{R})$$

и непрерывную числовую функцию $f(t) = d_n(x_t, \mathbb{O})$, тогда

$$f(0) = d_n(y, \mathbb{O}) \leqslant \frac{1}{n}$$

и

$$f(1) = d_n(x, \mathbb{O}) > \frac{1}{n},$$

следовательно, по теореме о промежуточных значениях непрерывной функции найдется значение $s \in (0,1)$ такое, что

$$f(s) > \frac{1}{n},$$

откуда имеем $x_s \notin U_n$. Так как $s \neq 0$, то $x_s \notin U_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, кроме того, $x_s \notin U_m$ при $m > n$, так как

$$d_m(x_s, \mathbb{O}) \geqslant d_n(x_s, \mathbb{O}) > \frac{1}{n} > \frac{1}{m}.$$

Таким образом, $x_s \notin B$, однако $x_s \in A$. Следовательно, наше предположение неверно, и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено включение $V_1 \subset U_n$. Но тогда если $x \in V_1$, то для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$d_1(x, \mathbb{O}) \leqslant d_n(x, \mathbb{O}) \leqslant \frac{1}{n},$$

то есть $x = \mathbb{O}$. Однако множество $V_1 = \{\mathbb{O}\}$ не является окрестностью нуля в X_1, откуда следует, что наше предположение о существовании множества A также неверно, то есть $s\tau \neq \tau$, что и требовалось доказать. ■

***Замечание* 4.** Условия 2-го утверждения предложения выполнены, например, для пространств $\mathbb{K}^\infty$ (где $\mathbb{K}$ — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ (пространство гладких финитных функций Л. Шварца, см., например, [3, с.414]).

Литература

1. Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1968. 384 с.
2. Чемёркин А.А. О некоторых свойствах секвенциального замыкания // Математические структуры и моделирование (Омск). 2003. Вып.11. С.21-27.
3. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071с.
4. Мельников Е.В. Топологические векторные пространства: Методические указания. Омск: ОмГУ, 1990. 43 с.
5. Мельников Е.В. Локально выпуклые пространства: Методические указания. Омск: ОмГУ, 1991. 48 с.
6. Мельников Е.В. Векторнозначные распределения и обобщенная корректность абстрактной задачи Коши. – Омский гос. ун-т. Омск, 1988. Деп. ВИНИТИ 15.03.1988. №1994-В88, 79 с.
7. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.