

Е.В. Палешева, А.А. Печерицын

СПИНОРНЫЕ ДУХИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ δ -ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В последние десятилетия наблюдается постоянный интерес к решениям уравнения Дирака с нулевым тензором энергии-импульса спинорного поля и не равной нулю плотностью дираковского тока. Такие решения принято называть спинорными духами. В тех случаях, когда масса спинорного поля равна нулю, употребляют также термин нейтринные духи. Следует отметить, что обзор результатов, касающихся таких полей, представлен в [1]. В этой работе нами будет рассмотрено уравнение Дирака в постоянном магнитном поле, которое при некоторых допущениях можно считать приближением реально существующих физических полей. Будет показано, что полученные спинорные духи локализуются вблизи цилиндра радиуса a .

1. Спинорные поля в постоянном магнитном поле

Рассмотрим уравнение Дирака в заданном электромагнитном поле [2]:

$$i\hbar\gamma^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_k \right) \psi + \frac{e}{c} \gamma^k A_k \psi = mc\psi. \quad (1)$$

Здесь

$$\Gamma_k = \frac{1}{4} g_{ml} \left(\frac{\partial \lambda_r^{(s)}}{\partial x^k} \lambda_{(s)}^l - \Gamma_{rk}^l \right) s^{mr}, \quad (2)$$

$$s^{mr} = \frac{1}{2} (\gamma^m \gamma^r - \gamma^r \gamma^m), \quad (3)$$

и для гамма-матриц γ^k справедливы соотношения $\gamma^k = \lambda_{(a)}^k \gamma^{(a)}$, в которых $\lambda_{(a)}^k$ — тетрада векторов, а $\gamma^{(a)}$ — матрицы Дирака, определяемые с помощью двухрядных матриц Паули:

$$\gamma^{(0)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \gamma^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

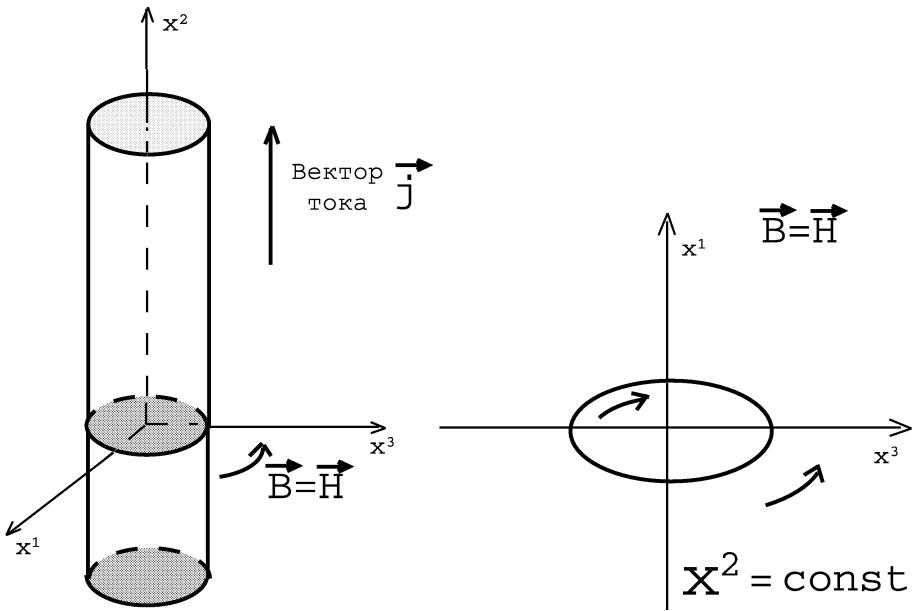


Рис. 1. Ток имеет направление вдоль оси цилиндра, а векторы напряженности и магнитной индукции направлены по касательной к окружности, расположенной в плоскости $x^2 = \text{const}$. При рассмотрении δ -функции как предела пиковых потенциалов вектора \mathbf{B} и \mathbf{H} имеют положительное направление вне цилиндра и отрицательное — внутри.

Пусть в пространстве-времени Минковского задано постоянное магнитное поле:

$$A_0 = A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = \delta \left(\sqrt{(x^1)^2 + (x^3)^2} - a \right). \quad (4)$$

Потенциал (4) равен нулю во всех точках трехмерного пространства, не лежащих на цилиндре (см. рис. 1)

$$(x^1)^2 + (x^3)^2 = a^2. \quad (5)$$

Поэтому в областях

$$(x^1)^2 + (x^3)^2 < a^2 \quad (6)$$

и

$$(x^1)^2 + (x^3)^2 > a^2 \quad (7)$$

уравнение (1) будет соответствовать свободному уравнению Дирака, которое в пространстве-времени Минковского¹ принимает вид:

$$i\hbar\gamma^{(k)} \frac{\partial\psi}{\partial x^k} = mc\psi. \quad (8)$$

Будем искать решения уравнения (8) в областях (6) и (7). При этом под внутренним решением будем понимать решение в области (6), а под внешним — решение

¹Заметим, что $\Gamma_k = 0$ и $\gamma^k = \gamma^{(k)}$, так как пространству-времени Минковского отвечает метрический тензор $g_{ik} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$.

в области (7). Соответствующие условия сшивания внутреннего и внешнего решения будут получены нами позже².

Прежде чем начать искать решения уравнения (8), докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть решение уравнения Дирака в пространстве-времени Минковского удовлетворяет соотношению*

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \cdot e^{-i\lambda x^0} \\ \psi_2 \cdot e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} u(x^1, x^3) \\ v(x^1, x^3) \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} v(x^1, x^3) \\ -u(x^1, x^3) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

причем $\lambda = mc/\hbar$, $\psi^* \psi \neq 0$, а u и v – вещественные функции. Тогда ψ является спинорным духом.

Доказательство. Следует напомнить, что в пространстве-времени Минковского тензор энергии-импульса задается соотношением

$$T_{ik} = \frac{i\hbar c}{4} \left(\psi^* \gamma^{(0)} \gamma_i \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^k} \gamma^{(0)} \gamma_i \psi + \psi^* \gamma^{(0)} \gamma_i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^i} \gamma^{(0)} \psi \right), \quad (11)$$

при этом³ $\gamma_0 = \gamma^{(0)}$, $\gamma_\alpha = -\gamma^{(\alpha)}$.

Поэтому несложно заметить⁴, что T_{00} будет равно нулю только при условии

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^0} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^0} \psi = 0. \quad (12)$$

Для спинорного поля (9) получим:

$$\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^0} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^0} \psi = -2i\lambda \psi_1^* \psi_1 + 2i\lambda \psi_2^* \psi_2,$$

но так как

$$\psi_1^* \psi_1 = \psi_2^* \psi_2 = u^2 + v^2,$$

то соотношение (12) является справедливым. Поэтому $T_{00} = 0$.

Докажем теперь, что $T_{0\alpha}$ также будет равно нулю для любого $\alpha = 1, 2, 3$. Несложно проверить, что в этом случае (11) эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} \psi^+ \gamma^{(0)} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x^\alpha} \gamma^{(0)} \psi - \psi^+ \gamma^{(\alpha)} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} + \frac{\partial \psi^+}{\partial x^0} \gamma^{(\alpha)} \psi = \\ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\alpha} \psi - \psi^* \gamma^{(0)} \gamma^{(\alpha)} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^0} \gamma^{(0)} \gamma^{(\alpha)} \psi. \end{aligned} \quad (13)$$

²Следует отметить, что обсуждение проблем, возникающих при решении уравнения Дирака с δ -функциональным потенциалом, а также методы получения условий сшивания можно найти в [3–5].

³Индекс α пробегает значения 1, 2, 3.

⁴Здесь учитывается свойство гамма-матриц $\gamma^{(0)} \gamma^{(0)} = E$, где E – единичная матрица 4×4 .

Подставляя (9) в (13), получим, что $T_{0\alpha} = 0$, только если равно нулю соотношение

$$\begin{aligned} & \left(2u \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + 2v \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} - 2 \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} u - 2 \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} v \right) + i\lambda (\psi_2^* \sigma_\alpha \psi_1) e^{-2i\lambda x^0} - \\ & - i\lambda (\psi_1^* \sigma_\alpha \psi_2) e^{2i\lambda x^0} - i\lambda (\psi_2^* \sigma_\alpha \psi_1) e^{-2i\lambda x^0} + i\lambda (\psi_1^* \sigma_\alpha \psi_2) e^{2i\lambda x^0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Несложно заметить, что выражение, содержащееся в скобках соотношения (14), равно нулю. Причем также взаимно сокращаются и остальные слагаемые в (14).

Так как приведенные выкладки были сделаны нами для произвольного α , то мы доказали равенства

$$T_{01} = T_{02} = T_{03} = 0$$

для рассматриваемого спинорного поля.

Для доказательства равенства нулю остальных компонент тензора энергии-импульса полученного спинорного поля рассмотрим следующее соотношение:

$$\psi^* \gamma^{(0)} \gamma^{(\beta)} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^\alpha} \gamma^{(0)} \gamma^{(\beta)} \psi, \quad (15)$$

которое, после подстановки в него спинора (9) и выполнения некоторых преобразований, примет вид

$$\left(\psi_2^* \sigma_\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x^\alpha} \sigma_\beta \psi_1 \right) e^{-2i\lambda x^0} + \left(\psi_1^* \sigma_\beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \psi_1^*}{\partial x^\alpha} \sigma_\beta \psi_2 \right) e^{2i\lambda x^0}. \quad (16)$$

После подстановки спинора (9) в данное соотношение, получим, что (16) тождественно равно нулю для каждого $\beta = 1, 2, 3$. Из этого следует равенство нулю остальных компонент тензора энергии-импульса (11).

Так как $\psi^* \psi \neq 0$, то дираковский ток, вычисляемый по формуле

$$j^k = c \psi^+ \gamma^k \psi,$$

не равен нулю. Поэтому волновая функция (9) соответствует спинорному духу. Теорема доказана. ■

2. Внутреннее и внешнее решения

Возьмем решение уравнения (8) в виде

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \cdot e^{-i\lambda x^0} \\ \psi_2 \cdot e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где

$$\psi_1 = \begin{bmatrix} u(x^1, x^3) \\ v(x^1, x^3) \end{bmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{bmatrix} v(x^1, x^3) \\ -u(x^1, x^3) \end{bmatrix},$$

а u и v — вещественные функции. Согласно теореме 1 решения такого типа являются спинорными духами. Подставив (17) в уравнение (8), получим систему дифференциальных уравнений на функции u и v , так называемые условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial x^1} + \frac{\partial u}{\partial x^3} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x^1} - \frac{\partial v}{\partial x^3} = 0. \quad (19)$$

Поступим следующим образом. Так как функции, удовлетворяющие условию Коши-Римана, должны быть при этом и решением двумерного уравнения Лапласа, найдем решения данного уравнения. Частные решения уравнения Лапласа, которое в полярных координатах записывается как [6]

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0, \quad (20)$$

представлены в [7]. Несложно проверить, что приведенные ниже пары функций удовлетворяют условиям Коши-Римана (18) и (19), которые в координатах

$$x^1 = r \cos \phi, \quad x^3 = r \sin \phi$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Итак, для области (6) положим

$$\begin{aligned} u &= Ar^n \cos(n\phi), \\ v &= Ar^n \sin(n\phi), \end{aligned} \quad (21)$$

а в области (7) примем

$$\begin{aligned} u &= \frac{B}{r^{n+1}} \cos[(n+1)\phi], \\ v &= -\frac{B}{r^{n+1}} \sin[(n+1)\phi], \end{aligned} \quad (22)$$

где A и B — некоторые произвольные вещественные постоянные, а постоянная n связана ограничением

$$n > 0, \quad (23)$$

которое будет объяснено позже.

Тогда, учитывая (17), а также соотношения

$$r^2 = (x^1)^2 + (x^3)^2, \quad \phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right), \quad (24)$$

получим следующие решения:

$$\psi_{\text{(внутр.)}} = \begin{bmatrix} A((x^1)^2 + (x^3)^2)^{\frac{n}{2}} \cos \left(n \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right) \right) e^{-i\lambda x^0} \\ A((x^1)^2 + (x^3)^2)^{\frac{n}{2}} \sin \left(n \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right) \right) e^{-i\lambda x^0} \\ A((x^1)^2 + (x^3)^2)^{\frac{n}{2}} \sin \left(n \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right) \right) e^{i\lambda x^0} \\ -A((x^1)^2 + (x^3)^2)^{\frac{n}{2}} \cos \left(n \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right) \right) e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix} \quad (25)$$

для внутренней области и

$$\psi_{\text{(внешн.)}} = \begin{bmatrix} B \frac{\cos \left[(n+1) \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right) \right]}{((x^1)^2 + (x^3)^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{-i\lambda x^0} \\ -B \frac{\sin \left[(n+1) \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right) \right]}{((x^1)^2 + (x^3)^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{-i\lambda x^0} \\ -B \frac{\sin \left[(n+1) \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right) \right]}{((x^1)^2 + (x^3)^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{i\lambda x^0} \\ -B \frac{\cos \left[(n+1) \operatorname{arctg} \left(\frac{x^3}{x^1} \right) \right]}{((x^1)^2 + (x^3)^2)^{\frac{n+1}{2}}} e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix} \quad (26)$$

во внешней области.

Для дальнейшего исследования необходимо отметить следующее. Так как потенциал (4) симметричен относительно пространственного вращения вокруг оси \mathbf{X}^2 на произвольный угол, то условия спшивания внутреннего и внешнего решения проще получить в цилиндрической системе координат. Это связано с тем, что в данной системе координат в пространстве-времени Минковского уравнение (1) допускает разделение переменных.

В цилиндрической системе координат (x^0, r, x^2, ϕ) в пространстве-времени Минковского уравнение (1) будет иметь вид

$$i\hbar\gamma^{(0)}\frac{\partial\psi}{\partial x^0} + i\hbar\gamma^{(1)}\frac{\partial\psi}{\partial r} + i\hbar\gamma^{(2)}\frac{\partial\psi}{\partial x^2} + \frac{i\hbar}{r}\gamma^{(3)}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{i\hbar}{2r}\gamma^{(1)}\psi + \frac{e}{c}\gamma^{(2)}\delta(r-a)\psi = mc\psi. \quad (27)$$

При этом решения (25) и (26) тоже надо перевести в новую систему координат. Для этого необходимо проделать следующие операции.

Во-первых, используя соотношения (24), запишем компоненты спиноров (25)

и (26) как функции r и ϕ :

$$\tilde{\psi}(r - 0) = \begin{bmatrix} Ar^n \cos(n\phi) e^{-i\lambda x^0} \\ Ar^n \sin(n\phi) e^{-i\lambda x^0} \\ Ar^n \sin(n\phi) e^{i\lambda x^0} \\ -Ar^n \cos(n\phi) e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\tilde{\psi}(r + 0) = \begin{bmatrix} \frac{B}{r^{n+1}} \cos[(n+1)\phi] e^{-i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \sin[(n+1)\phi] e^{-i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \sin[(n+1)\phi] e^{i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \cos[(n+1)\phi] e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Во-вторых, переход к новой системе координат влечет за собой переход к новым ориентациям тетрады $\lambda_{(a)}^i$ в каждой точке пространства-времени, последнее имеет характер локального преобразования Лоренца [8]. В нашем случае этим преобразованием является пространственное вращение на угол ϕ вокруг оси \mathbf{X}^2 [9, 10], причем матрица такого преобразования имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Тогда связь между новыми компонентами спинора Ψ , с одной стороны, и старыми ψ – с другой имеет вид соотношений $\Psi = S\psi$, причем матрица S определяется как

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} & 0 & 0 \\ \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{\phi}{2} & -\sin \frac{\phi}{2} \\ 0 & 0 & \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Поэтому решения (25) и (26) при переходе к цилиндрической системе координат будут преобразованы по закону

$$\Psi(r - 0) = S\tilde{\psi}(r - 0), \quad \Psi(r + 0) = S\tilde{\psi}(r + 0),$$

где S – матрица (31), а $\tilde{\psi}(r - 0)$ и $\tilde{\psi}(r + 0)$ определены соотношениями (28) и (29) соответственно.

Тогда в новой системе координат мы получим:

$$\Psi(r - 0) = \begin{bmatrix} Ar^n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{-i\lambda x^0} \\ Ar^n \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{-i\lambda x^0} \\ Ar^n \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{i\lambda x^0} \\ -Ar^n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}, \quad \text{при } r < a, \quad (32)$$

$$\Psi(r + 0) = \begin{bmatrix} \frac{B}{r^{n+1}} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{-i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{-i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}, \quad \text{при } r > a. \quad (33)$$

Теперь найдем условия, позволяющие сплить функции (32) и (33).

3. Границные условия

Следуя работам [3–5, 11], подставим решения

$$\Psi = \begin{cases} \Psi(r - 0), & r < a, \\ \Psi(r + 0), & r > a, \end{cases} \quad (34)$$

где $\Psi(r - 0)$ и $\Psi(r + 0)$ определены соотношениями (32) и (33), в уравнение (27). Затем проинтегрируем (27) по r от $(a - \varepsilon)$ до $(a + \varepsilon)$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом мы доопределим решение в точке $r = a$ как линейную комбинацию решений $\Psi(a - 0)$ и $\Psi(a + 0)$ с произвольными коэффициентами и уже после перехода к пределу найдем значения этих постоянных.

Вначале перепишем решение (34) в виде

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \cdot e^{-i\lambda x^0} \\ \Psi_2 \cdot e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}, \quad (35)$$

где

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} R_1(r) \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) \\ R_2(r) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} R_2(r) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) \\ -R_1(r) \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

а $R_1(r)$ и $R_2(r)$ — кусочно-непрерывные функции, определяемые выражениями

$$R_1(r) = \begin{cases} R_1(r-0) = Ar^n, & r < a, \\ R_1(r+0) = \frac{B}{r^{(n+1)}}, & r > a, \end{cases} \quad (38)$$

$$R_2(r) = \begin{cases} R_2(r-0) = Ar^n, & r < a, \\ R_2(r+0) = -\frac{B}{r^{(n+1)}}, & r > a. \end{cases} \quad (39)$$

Положим

$$R_1(r-0) = R_2(r-0) = R(r-0) = Ar^n, \quad (40)$$

$$R_1(r+0) = -R_2(r+0) = R(r+0) = \frac{B}{r^{(n+1)}}. \quad (41)$$

Для того чтобы доопределить спинор (35) в точке $r = a$, будем считать, что

$$R_1(a) = C_1 R_1(a-0) + D_1 R_1(a+0), \quad (42)$$

$$R_2(a) = C_2 R_2(a-0) + D_2 R_2(a+0), \quad (43)$$

где C_1, C_2 и D_1, D_2 — некоторые постоянные.

Итак, подставим (35) в (27). Получим, после приведения подобных,

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_3 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \phi} + \frac{1}{2r} \sigma_1 \Psi_2 &= \frac{e}{\hbar c} (i\sigma_2) \delta(r-a) \Psi_2, \\ \sigma_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi} + \frac{1}{2r} \sigma_1 \Psi_1 &= \frac{e}{\hbar c} (i\sigma_2) \delta(r-a) \Psi_1. \end{aligned} \quad (44)$$

Далее, в силу соотношений (36) и (37), несложно заметить, что

$$\Psi_2 = i\sigma_2 \Psi_1.$$

Поэтому система уравнений (44) эквивалентна следующему:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi} + \frac{1}{2r} \sigma_1 \Psi_1 &= \frac{e}{\hbar c} (i\sigma_2) \delta(r-a) \Psi_1, \\ \sigma_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi} + \frac{1}{2r} \sigma_1 \Psi_1 &= -\frac{e}{\hbar c} (i\sigma_2) \delta(r-a) \Psi_1. \end{aligned} \quad (45)$$

Уравнения (45) будут справедливы при условии

$$\sigma_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \phi} + \frac{1}{2r} \sigma_1 \Psi_1 = 0, \quad (46)$$

$$\frac{e}{\hbar c} (i\sigma_2) \delta(r-a) \Psi_1 = 0. \quad (47)$$

Подставив теперь (36) и (37) в уравнения (46) и (47), придем к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_2}{\partial r} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{R_1}{r} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) + \\ + \frac{R_2}{2r} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial r} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{R_2}{r} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) + \\ + \frac{R_1}{2r} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) = 0, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{e}{\hbar c} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) R_1 \delta(r - a) = 0, \\ \frac{e}{\hbar c} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) R_2 \delta(r - a) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

$$\frac{e}{\hbar c} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) R_2 \delta(r - a) = 0. \quad (51)$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (48) – (51) равносильна следующим уравнениям:

$$\frac{\partial R_2}{\partial r} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{R_1}{r} + \frac{R_2}{2r} = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial r} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{R_2}{r} + \frac{R_1}{2r} = 0, \quad (53)$$

$$R_1 \delta(r - a) = 0, \quad (54)$$

$$R_2 \delta(r - a) = 0. \quad (55)$$

В уравнениях (52) – (55) перейдем к интегрированию по r от $(a - \varepsilon)$ до $(a + \varepsilon)$:

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{\partial R_2}{\partial r} dr - \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{R_1}{r} dr + \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{R_2}{2r} dr = 0, \quad (56)$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{\partial R_1}{\partial r} dr - \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{R_2}{r} dr + \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{R_1}{2r} dr = 0, \quad (57)$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} R_1 \delta(r - a) dr = 0, \quad (58)$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} R_2 \delta(r - a) dr = 0. \quad (59)$$

Учитывая соотношения (38) – (43), получим, что система уравнений (56) – (59) эквивалентна равенствам

$$\begin{aligned} R(a - \varepsilon) - R(a + \varepsilon) = 0, \\ C_1 R_1(a - 0) + D_1 R_1(a + 0) = 0, \\ C_2 R_2(a - 0) + D_2 R_2(a + 0) = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned} R(a-0) &= R(a+0), \\ C_1 R_1(a-0) + D_1 R_1(a+0) &= 0, \\ C_2 R_2(a-0) + D_2 R_2(a+0) &= 0. \end{aligned} \quad (61)$$

В силу соотношений (42) и (43) получаем:

$$B = Aa^{(2n+1)}, \quad (62)$$

а также

$$\begin{pmatrix} R_1(a+0) \\ R_2(a+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{D_1} & 0 \\ 0 & -\frac{C_2}{D_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1(a-0) \\ R_2(a-0) \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Кроме этого, мы также получим из системы (61) соотношения на коэффициенты:

$$C_1 = -D_1, \quad C_2 = D_2.$$

В результате (63) примет вид:

$$\begin{pmatrix} R_1(a+0) \\ R_2(a+0) \end{pmatrix} = \sigma_3 \begin{pmatrix} R_1(a-0) \\ R_2(a-0) \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Таким образом, учитывая соотношения (35) – (37) на волновую функцию Ψ , получим условия сшивания внутреннего и внешнего решения:

$$\Psi(a+0) = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} \Psi(a-0). \quad (65)$$

Нетрудно заметить, что переход решения из одной области в другую осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$U = i\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}.$$

Итак, мы получили следующее решение:

$$\Psi = \begin{cases} \Psi(r-0), & r < a, \\ \Psi(r+0), & r > a, \end{cases} \quad (66)$$

где

$$\Psi(a+0) = i\gamma^{(0)}\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\Psi(a-0) \quad (67)$$

и

$$\Psi(r-0) = \begin{bmatrix} Ar^n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{-i\lambda x^0} \\ Ar^n \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{-i\lambda x^0} \\ Ar^n \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{i\lambda x^0} \\ -Ar^n \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \phi \right) e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}, \quad (68)$$

$$\Psi(r+0) = \begin{bmatrix} \frac{B}{r^{n+1}} \cos((n+\frac{1}{2})\phi) e^{-i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \sin((n+\frac{1}{2})\phi) e^{-i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \sin((n+\frac{1}{2})\phi) e^{i\lambda x^0} \\ -\frac{B}{r^{n+1}} \cos((n+\frac{1}{2})\phi) e^{i\lambda x^0} \end{bmatrix}. \quad (69)$$

4. Свойства решения

Покажем, что полученное решение уравнения (27) является спинорным духом. Для этого надо выяснить вопрос о равенстве нулю тензора энергии-импульса спинорного поля, определяемого соотношением (11). Отметим, что решение уравнения Дирака (1) в областях $r < a$ и $r > a$ было получено нами сначала в пространстве-времени Минковского, а потом, учитывая преобразование спинора при переходе из одной координатной системы в другую, было переведено в цилиндрическую систему координат. Это означает, что формулы (32) и (33) задают то же самое решение, что и формулы (25) и (26). Но решение (25) и (26) удовлетворяет условию теоремы 1. Поэтому оно является спинорным духом.

Следовательно, и в цилиндрической системе координат тензор энергии-импульса (11) будет равен нулю в областях $r < a$ и $r > a$. В точке же $r = a$ тензор энергии-импульса также будет равен нулю, так как в силу граничных условий $\Psi(a) = 0$.

Для того чтобы проинормировать⁵ решение (32) и (33), положим

$$\frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} j^0 r dr d\phi = 1.$$

Получим:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \Psi^* \Psi r dr d\phi + \int_0^{2\pi} \int_a^{+\infty} \Psi^* \Psi r dr d\phi = 1.$$

Подставляя в левый интеграл выражение (32), а в правый — (33), будем иметь

$$4\pi A^2 \int_0^a r^{2n+1} dr + 4\pi B^2 \int_a^{+\infty} \frac{dr}{r^{2n+1}} = 1. \quad (70)$$

Оба интеграла в (70) будут сходиться лишь при условии $n > 0$, этим и объясняется ограничение (23).

Итак, учитывая (62) и вычисляя (70), получим:

$$A = \frac{\sqrt{n(n+1)}}{a^{n+1} \sqrt{2\pi(2n+1)}}. \quad (71)$$

⁵См. работу [12].

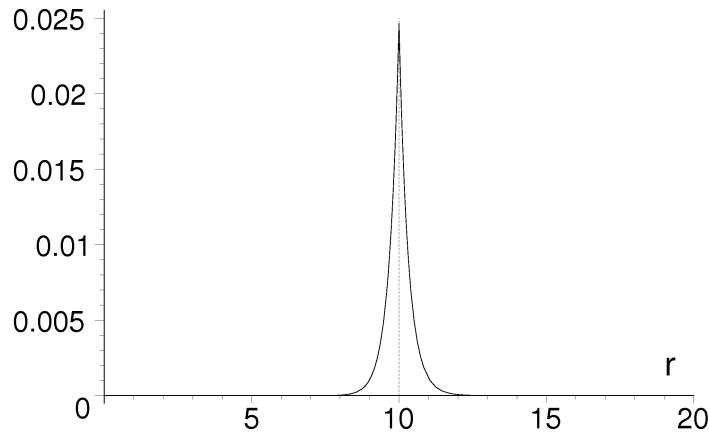


Рис. 2. Распределение вероятности при $n = 15$ и $a = 10$.

Соотношение (71) определяет нормирующий множитель A .

Рассмотрим теперь, как ведет себя квадрат модуль амплитуды вероятности.

Одной из основных особенностей соотношения $\Psi^+\Psi$ является следующее:

$$\lim_{r \rightarrow a-0} \Psi^+\Psi = \lim_{r \rightarrow a+0} \Psi^+\Psi,$$

хотя в точке $r = a$ волновая функция Ψ имеет разрыв. Графики, соответствующие распределению вероятности спинорных духов (66) – (69), представлены на рис.3 и рис.2 при некоторых значениях параметров n и a .

При всех значениях параметров n и a максимум функции распределения расположен на поверхности цилиндра $r = a$, причем наблюдается асимметрия функции $\Psi^*\Psi$. Исследуем изменение интенсивности при фиксированном параметре n .

При $n = 2$ максимальное значение увеличивается примерно в 100 раз с уменьшением параметра a в 10 раз. При $n = 5$ функция распределения аналогичным образом зависит от изменения значения параметра a .

Заметим также, что максимум функции $\Psi^*\Psi$ будет увеличиваться с ростом параметра n (при постоянном значении величины a).

Таким образом, наиболее вероятное положение частицы, описываемой волновой функцией (66)–(69), находится вблизи поверхности цилиндра $r = a$. Можно также сказать, что спинорное поле сосредоточено вблизи поверхности магнитного поля.

5. Магнитное поле

Следует отметить, что ток, порождающий магнитное поле (4), определяется из уравнения

$$\nabla_i F^{ki} = -\frac{4\pi}{c} j^k \quad (72)$$

и, вычисленный в цилиндрических координатах (x^0, r, x^2, ϕ) , имеет следующий вид:

$$j_{mag}^0 = j_{mag}^1 = j_{mag}^3 = 0, \quad j_{mag}^2 = \frac{c \delta''(r - a)}{4\pi r}.$$

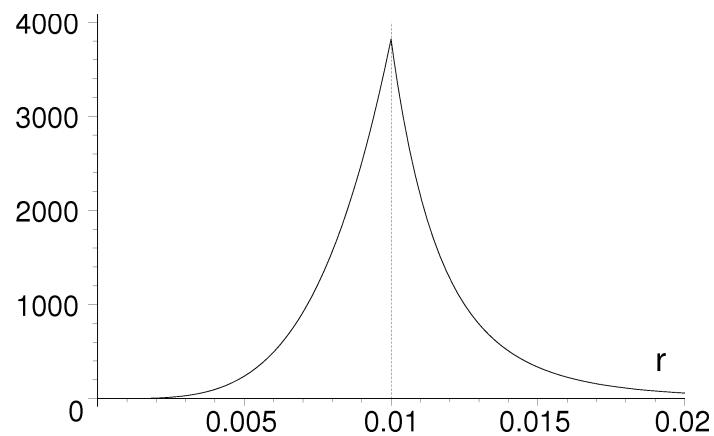


Рис. 3. Распределение вероятности при $n = 2$ и $a = 0.01$.

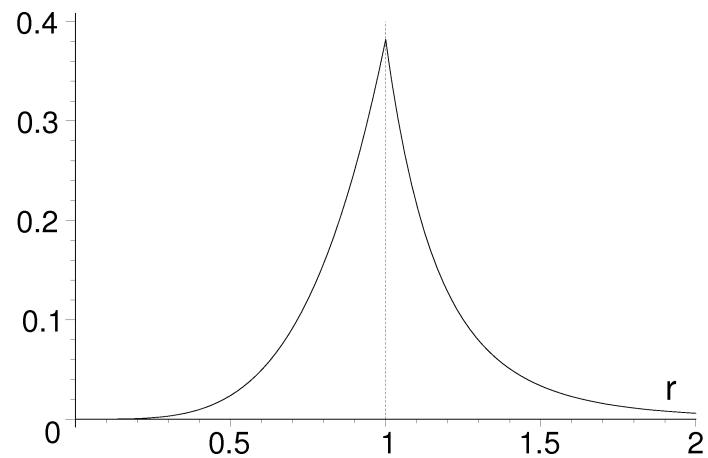


Рис. 4. Распределение вероятности при $n = 2$ и $a = 1$.

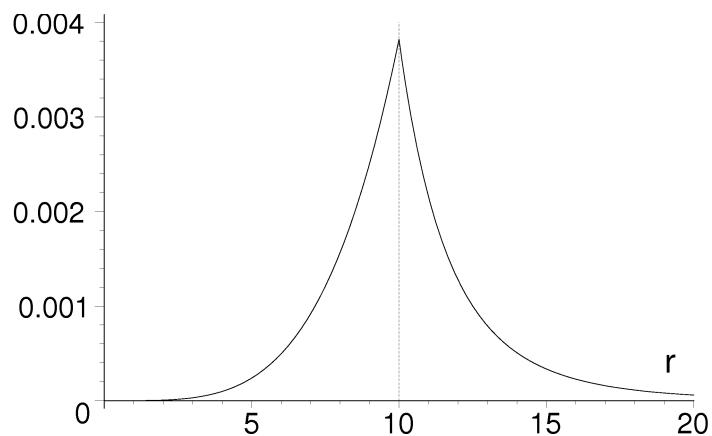


Рис. 5. Распределение вероятности при $n = 2$ и $a = 10$.

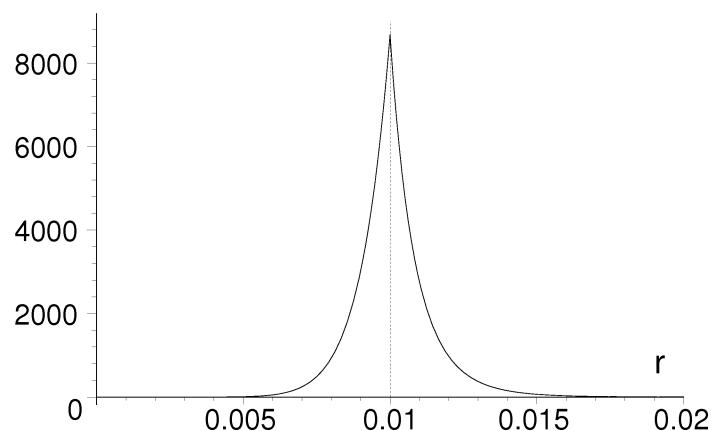


Рис. 6. Распределение вероятности при $n = 5$ и $a = 0.01$.

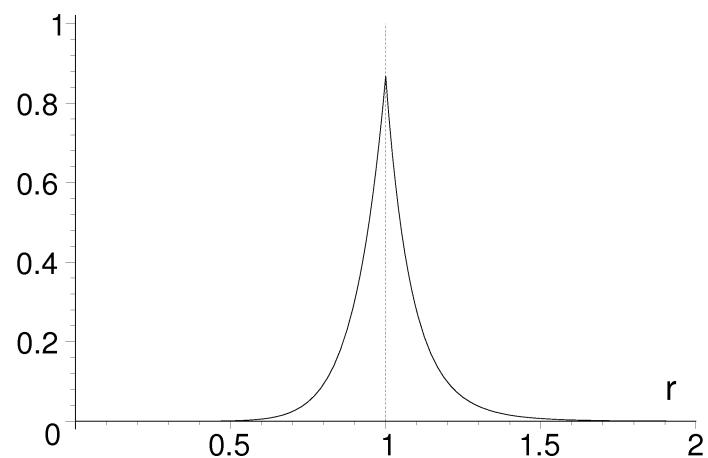


Рис. 7. Распределение вероятности при $n = 5$ и $a = 1$.

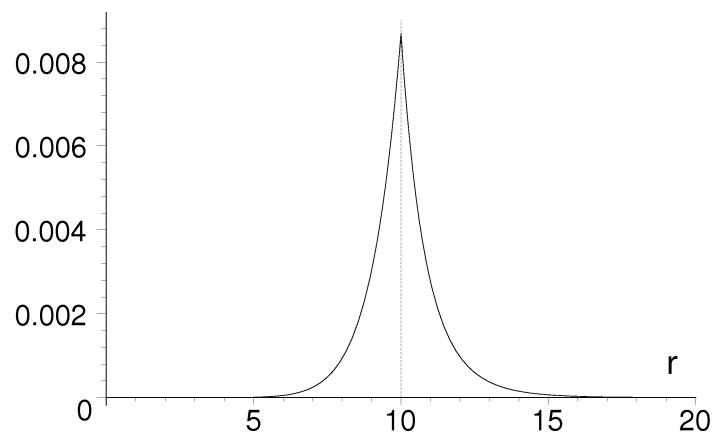


Рис. 8. Распределение вероятности при $n = 5$ и $a = 10$.

Так как в рассмотренных цилиндрических координатах интервал ds определяется соотношением

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dr^2 - (dx^2)^2 - r^2 d\phi^2,$$

то вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} и вектор магнитной индукции \mathbf{B} , вычисленные с помощью известных формул⁶ [13], принимают следующие значения (см. рис. 1)

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \left(0, 0, -\frac{\delta'(r-a)}{r} \right).$$

Полученное решение может соответствовать следующей физической задаче. Рассмотрим цилиндр радиуса a и высотой h , на поверхности которого определено достаточно большое магнитное поле, причем вне поверхности цилиндра поле очень быстро падает. Тогда можно в некотором приближении говорить о магнитном поле с δ -функциональным потенциалом. Рассмотрим достаточно малый по сравнению с h участок цилиндра и исследуем поведение спинорного поля в данной области. Тогда мы можем считать цилиндр радиуса a бесконечно протяженным. При таких приближениях мы как раз получим задачу (1) в пространстве-времени Минковского и ее решение (66) – (69).

ЛИТЕРАТУРА

- Налешева Е.В. *Решения уравнения Дирака с нулевым тензором энергии-импульса*. // Математические структуры и моделирование. 2004. Вып.13. С.114-118.
- Гололобова А.С., Кречет В.Г., Лапчинский В.Г. *Динамика спинорной материи в ОТО* // Теория относительности и гравитация / Под ред. В.И. Родичева и др. М.: Наука. 1976. С.133-158.
- McKellar B.H.J., Stephenson G.J., Jr. *Klein paradox and the Dirac-Kronig-Penney model* // Phys. Rev. A. 1987. V.36. P.2566.
- Roy C.L. *Boundary conditions across a δ -function potential in the one-dimensional Dirac equation* // Phys. Rev. A. 1993. V.47. P.3417.
- Sutherland B., Mattis D.C. *Ambiguities with the relativistic δ -function potential* // Phys. Rev. A. 1981. V.24. P.1194.

⁶

$$B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} B_{\beta\gamma}, \quad H^\alpha = -\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} H^{\beta\gamma},$$

где γ — определитель трехмерного метрического тензора

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}},$$

$e_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор 3-го ранга, в т.ч. $e_{123} = 1$, а тензоры $B_{\alpha\beta}$ и $H^{\alpha\beta}$ определяются по формулам

$$B_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}, \quad H^{\alpha\beta} = \sqrt{g_{00}} F^{\alpha\beta}.$$

Здесь F_{ik} — тензор электромагнитного поля.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Гостехиздат, 1953.
7. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике (для научных работников и инженеров)*. М.: Наука, 1978.
8. Фок В.А. *Геометризация Дираковской теории электрона / Альберт Эйнштейн и теория гравитации*. М.: Мир, 1979. С.415-432.
9. Хамермеш М. *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*. М.: Мир, 1966.
10. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*. М.: Физматгиз, 1958.
11. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. *Задачи по квантовой механике*. М.: Наука, 1981.
12. Barut A.O., Duru I.H. *Exact solutions of the Dirac equation in spatially flat Robertson-Walker space-times* // Phys. Rev. D. 1987. V.36. P.3705-3711.
13. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Теория поля*. М.: Физматлит, 2001.