

А.А. Магазев, И.В. Широков

## ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ В ВАРИАЦИЯХ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЯ ЯКОБИ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Известно, что геодезические на римановых многообразиях локально представляют собой кратчайшие расстояния между двумя произвольно выбранными точками. Тем не менее уже на простейших примерах легко видеть, что данное свойство может не выполняться глобально на всем многообразии, или, другими словами, могут не выполняться достаточные условия существования минимума функционала длины. Для дополнительного исследования экстремальных свойств геодезических на римановых многообразиях используют вторую вариацию функционала действия (см., например, [1]), которая определяет соответствующее условие минимальности геодезических. При этом возникает необходимость изучать так называемое уравнение Якоби, которое представляет собой линейаризованное уравнение геодезических или уравнение в вариациях.

Решениями уравнения Якоби являются *якобиевы* векторные поля, описывающие отклонения геодезических при малых изменениях начальных условий и предоставляющие информацию об устойчивости решений соответствующих геодезических потоков. В частности, исследование решений уравнения Якоби позволяет делать выводы об экспоненциальном или осцилляционном характере поведения близких геодезических, что напрямую связано с топологическими свойствами риманова многообразия [2–4].

В настоящей статье изучается вопрос об интегрируемости уравнения Якоби на произвольных римановых многообразиях  $(M, g)$ , в частности, мы приводим критерий полной интегрируемости данного уравнения. Кроме того, в настоящей работе будет показано, что уравнение Якоби вместе с соответствующей системой геодезического потока может рассматриваться как расширенный геодезический поток на касательном расслоении  $TM$  риманова многообразия относительно некоторой индуцированной римановой структуры.

# 1. Гамильтоновы системы в вариациях на пуассоновых многообразиях

Перед тем как приступить к исследованию интегрируемости уравнения Якоби на римановых пространствах, приведем некоторые полезные конструкции, относящиеся к произвольным пуассоновым многообразиям и представляющие также самостоятельный интерес.

Пусть  $W$  есть гладкое пуассоново многообразие. Скобка Пуассона  $\{\cdot, \cdot\}$  задает в пространстве гладких функций  $\mathcal{C}^\infty(W)$  структуру бесконечномерной алгебры Ли и является билинейной кососимметрической операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби. Обозначив через  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, \dim W$  — локальные координаты на  $W$ , скобку Пуассона  $\{\cdot, \cdot\}$  можно представить в виде:

$$\{\varphi, \psi\} \equiv \omega(d\varphi, d\psi) = \sum_{i,j} \omega_{ij}(z) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \frac{\partial \psi(z)}{\partial z_j}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(W),$$

где  $\omega_{ij}(z) \equiv \{z_i, z_j\}$  и  $\omega_{ij}(z) = -\omega_{ji}(z)$ . Таким образом, пуассонова структура на  $W$  полностью задается кососимметрическим (в общем случае вырожденным) тензорным полем  $\omega_{ij}(z)$ .

Пусть  $H(z)$  — произвольная гладкая функция из  $\mathcal{C}^\infty(W)$  (гамильтониан). Функции  $H(z)$  можно поставить в соответствие гамильтонову систему вида:

$$\dot{z}_i = \{H, z_i\}, \quad z_i|_{t=0} = z_i^0. \quad (1)$$

Система (1), определяя динамику на пуассоновом многообразии,  $W$  реализует некоторую однопараметрическую группу диффеоморфизмов  $\gamma_t$ , которая естественным образом индуцирует динамику в касательном расслоении  $TW$  пространства  $W$ . Пусть  $\delta z_0$  — касательный вектор в точке  $z_0 \in W$ . Тогда

$$(\gamma_t)_* : \delta z_0 \rightarrow \delta z = (\gamma_t)_* \delta z_0, \quad \delta z_0 \in T_{z_0} W, \quad \delta z \in T_z W. \quad (2)$$

Отображение (2) в локальных координатах представляет собой решение системы уравнений

$$\delta \dot{z}_i = \frac{\partial}{\partial z_k} \{H, z_i\} \delta z_k, \quad \delta z_i|_{t=0} = \delta z_i^0 \quad (3)$$

и в линейном приближении описывает возмущение интегральной траектории гамильтоновой системы (1), начальные условия которой изменены на величину  $\delta z_0$ . Система (3) называется *гамильтоновой системой в вариациях*.

**Определение 1.** Гладкое отображение  $\delta : \mathcal{C}^\infty(W) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(TW)$ , такое что  $\delta \varphi \equiv \langle d\varphi, \delta z \rangle$ ,  $\delta z \in T_z W$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(W)$ , будем называть вариацией, а функцию  $\delta \varphi$  — вариацией функции  $\varphi$ .

Очевидно, что все вариации линейны на каждом слое  $p^{-1}(z) = T_z W$  ( $p$  — каноническая проекция  $TW \rightarrow W$ ).

**Предложение 1.** На касательном расслоении произвольного пуассонова многообразия  $W$  существует индуцированная пуассонова структура  $\{\cdot, \cdot\}_T$ , которая в локальных координатах  $(z_i, \delta z_i)$  имеет вид

$$\{F, G\}_T = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial \omega_{ij}(z)}{\partial z_k} \delta z_k \frac{\partial F}{\partial \delta z_i} \frac{\partial G}{\partial \delta z_j} + \omega_{ij}(z) \frac{\partial F}{\partial \delta z_i} \frac{\partial G}{\partial z_j} + \omega_{ij}(z) \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial G}{\partial \delta z_j} \right); \quad (4)$$

здесь  $F(z, \delta z), G(z, \delta z)$  – функции из  $\mathcal{C}^\infty(TW)$ . ■

Действительно, прямой проверкой можно легко убедиться, что скобка (4) удовлетворяет правилу Лейбница и тождеству Якоби, что и доказывает данное утверждение.

Пусть  $\varphi, \psi$  – произвольные функции из  $\mathcal{C}^\infty(W)$ ,  $\delta\varphi$  и  $\delta\psi$  – их соответствующие вариации. Из определения скобки  $\{\cdot, \cdot\}_T$  (4) легко вытекает

**Предложение 2.** Индуцированная скобка Пуассона  $\{\cdot, \cdot\}_T$  обладает следующими свойствами: 1)  $\{\varphi, \psi\}_T = 0$ ; 2)  $\{\delta\varphi, \psi\}_T = \{\varphi, \delta\psi\}_T = \{\varphi, \psi\}$ ; 3)  $\{\delta\varphi, \delta\psi\}_T = \delta\{\varphi, \psi\}$ . ■

Индуцированная пуассонова структура  $\{\cdot, \cdot\}_T$  позволяет представить гамильтонову систему (1) и соответствующую ей систему в вариациях (3) в виде расширенной гамильтоновой системы на  $TW$ . Действительно, используя свойства скобки  $\{\cdot, \cdot\}_T$ , перечисленные в Предложении 1, получаем

$$\dot{z}_i = \{H, z_i\} = \{\delta H, z_i\}_T, \quad \delta \dot{z}_i = \delta \{H, z_i\} = \{\delta H, \delta z_i\}_T. \quad (5)$$

Система (5) является гамильтоновой относительно скобки  $\{\cdot, \cdot\}_T$  с гамильтонианом  $\delta H$ , поэтому верна следующая

**Теорема 1.** Пусть  $H(z)$  – некоторая гладкая функция (гамильтониан) на произвольном пуассоновом многообразии  $(W, \{\cdot, \cdot\})$ . Тогда гамильтонова система (1) вместе с уравнениями в вариациях (3) представляют собой расширенную гамильтонову систему на пуассоновом многообразии  $(TW, \{\cdot, \cdot\}_T)$  с гамильтонианом  $\delta H$ . ■

**Пример 1.** Кокасательное расслоение  $T^*M$ . Естественная пуассонова структура на  $2m$ -мерном кокасательном расслоении  $W = T^*M$  задается с помощью симплектической 2-формы  $\omega = dp_a \wedge dx^a$ , где  $(x^1, \dots, x^m, p_1, \dots, p_m)$  – локальные координаты в  $T^*M$ . Скобка Пуассона на  $T^*M$ , соответствующая симплектической форме  $\omega$ , определяется следующими фундаментальными скобками:

$$\{x^a, x^b\} = \{p_a, p_b\} = 0, \quad \{p_a, x^b\} = \delta_a^b. \quad (6)$$

Введем локальные координаты в слое  $T_{(x,p)}(T^*M)$ :  $(\delta x^1, \dots, \delta x^m, \delta p_1, \dots, \delta p_m)$ . Индуцированная скобка  $\{\cdot, \cdot\}_T$  на  $T(T^*M)$  в этом случае имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$\{p_a, \delta x^b\} = \{\delta p_a, x^b\} = \delta_a^b. \quad (7)$$

**Пример 2.** *Дуальное пространство алгебры Ли.* Пусть  $\mathcal{G}$  —  $n$ -мерная вещественная алгебра Ли с билинейной кососимметричной операцией  $[\cdot, \cdot]$ ,  $W = \mathcal{G}^*$  — соответствующее дуальное пространство (коалгебра), элементы которого можно рассматривать как линейные функции из  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{G})$ . Выберем базис  $\{e_i\}$  в  $\mathcal{G}$  и соответствующий базис  $\{e^i\}$  в дуальном пространстве:  $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i$ . На коалгебре  $\mathcal{G}^*$  определена вырожденная линейная скобка Пуассона-Ли

$$\{\varphi, \psi\}^{lie} = \langle z, [d\varphi(z), d\psi(z)] \rangle = C_{ij}^k z_k \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \frac{\partial \psi(z)}{\partial z_j}; \quad \varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{G}^*)$$

с базисными коммутационными соотношениями:  $\{z_i, z_j\}^{lie} = C_{ij}^k z_k$ . Здесь  $C_{ij}^k$  — структурные константы алгебры  $\mathcal{G}$  в выбранном базисе.

Рассмотрим касательное расслоение  $T\mathcal{G}^*$  пространства  $\mathcal{G}^*$  с координатами  $(z_i, \delta z_i)$ . Из определения  $\{\cdot, \cdot\}_T$  следует, что ее фундаментальные скобки на  $T\mathcal{G}^*$  задаются следующими равенствами:

$$\{z_i, z_j\}_T^{lie} = 0, \quad \{z_i, \delta z_j\}_T^{lie} = \{\delta z_i, z_j\}_T^{lie} = C_{ij}^k z_k, \quad \{\delta z_i, \delta z_j\}_T^{lie} = C_{ij}^k \delta z_k.$$

## 2. Геодезические потоки и уравнение Якоби на римановых многообразиях

Пусть  $M$  — гладкое  $m$ -мерное риманово многообразие с невырожденной римановой метрикой  $g = (g_{ab})$ ,  $\det g_{ab} \neq 0$ ,  $(x^1, \dots, x^m)$ ,  $(p_1, \dots, p_m)$  — локальные координаты на многообразии  $M$  и в слое  $T_x^*M$  соответственно. С помощью пуассоновой структуры (6) на  $T^*M$  уравнение геодезических  $\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a(x) \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$  можно представить в гамильтоновой форме

$$\dot{x}^a = \{H(x, p), x^a\}, \quad \dot{p}_a = \{H(x, p), p_a\}, \quad (8)$$

где  $H(x, p) = \frac{1}{2} g^{ab}(x) p_a p_b$  (связность полагаем согласованной с метрикой). Гамильтонову систему (8) называют *геодезическим потоком*.

Пусть  $x^a = x^a(t)$  — геодезическая на  $M$ , параметризованная натуральным параметром  $t$ . Векторное поле  $\zeta^a(t) \subset T_{x(t)}M$  вдоль геодезической называется полем Якоби, если оно является решением следующего дифференциального уравнения второго порядка (уравнения Якоби) [5]:

$$\nabla_{\dot{x}}^2 \zeta^a + R_{bcd}^a(x) \dot{x}^b \dot{x}^c \zeta^d = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\nabla_{\dot{x}}$  — оператор ковариантного дифференцирования вдоль поля  $\dot{x}^a(t)$ , а  $R_{bcd}^a$  — компоненты тензора кривизны. Используя естественный изоморфизм пространств  $T^*M \simeq TM$ , а также симплектическую структуру  $\omega = dp_a \wedge dx^a$  можно показать, что уравнение Якоби (9) эквивалентно следующей гамильтоновой системе в вариациях:

$$\delta \dot{x}^a = \delta \{H(x, p), x^a\}, \quad \delta \dot{p}_a = \delta \{H(x, p), p_a\}, \quad (10)$$

где  $\delta x^a \equiv \zeta^a$ ,  $\delta p_a = g_{ab} \dot{\zeta}^b + g_{ab,c} \dot{x}^b \zeta^c$ , а зависимость от времени переменных  $x$  и  $p$  определяется системой (8).

Следуя предыдущему параграфу, зададим в пространстве  $T(T^*M)$  структуру пуассонового многообразия с ненулевыми фундаментальными скобками Пуассона (7). Согласно Теореме 1 геодезический поток (8) вместе с соответствующими уравнениями в вариациях (10) представляет собой расширенную гамильтонову систему

$$\dot{x}^a = \{\delta H(x, p), x^a\}_T, \quad \dot{p}_a = \{\delta H(x, p), p_a\}_T, \quad (11)$$

$$\delta \dot{x}^a = \{\delta H(x, p), \delta x^a\}_T, \quad \delta \dot{p}_a = \{\delta H(x, p), \delta p_a\}_T \quad (12)$$

с гамильтонианом

$$\delta H(x, p) = \frac{1}{2} \frac{\partial g^{ab}(x)}{\partial x^c} \delta x^c p_a p_b + g^{ab}(x) p_a \delta p_b.$$

Нетрудно видеть, что полученная система совпадает с каноническими уравнениями Гамильтона на кокасательном расслоении  $T^*(TM)$  с естественной симплектической структурой  $\delta\omega = dp_a \wedge d\delta x^a + d\delta p_a \wedge dx^a$  и описывает геодезический поток на  $TM$  относительно новой римановой метрики  $\tilde{g}(\cdot, \cdot)$ , ассоциированной с гамильтонианом  $\delta H(x, p)$ .

**Определение 2.** Геодезический поток, описываемый гамильтоновой системой (11)–(12), будем называть *расширенным геодезическим потоком*.

Исследуем интегрируемость гамильтоновой системы расширенного геодезического потока (11)–(12). Пусть  $I(x, p)$  – первый интеграл исходного геодезического потока (8) на римановом многообразии  $M$ . Очевидно, что данная функция остается также и интегралом расширенного геодезического потока, так как по свойству (2) скобки  $\{\cdot, \cdot\}_T$  имеем:

$$\{\delta H, I\}_T = \{H, I\} = 0.$$

Кроме того, функция  $I(x, p)$  доставляет системе (11)–(12) еще один интеграл движения, а именно: из свойства (3) следует, что вариация  $\delta I$  также коммутирует с  $\delta H$ . Легко при этом видеть, что функции  $I$  и  $\delta I$  коммутируют и функционально независимы на  $T(T^*M)$ .

Известно, что в случае вполне интегрируемого геодезического потока имеется набор  $m$  функционально независимых интегралов движения  $\{I_1, \dots, I_m\}$ , находящихся в инволюции относительно скобки Пуассона [6]. Из вышеизложенных фактов следует, что в случае расширенного геодезического потока данный набор можно дополнить соответствующими вариациями  $\{\delta I_1, \dots, \delta I_m\}$ , увеличивая тем самым число интегралов движения канонической гамильтоновой системы (11)–(12) до  $2m$ . Отсюда вытекает справедливость следующей важной теоремы:

**Теорема 2.** *Расширенный геодезический поток (11)–(12) на  $TM$  с гамильтонианом  $\delta H$  является вполне интегрируемым тогда и только тогда, когда вполне интегрируем исходный геодезический поток (8) на  $M$  с гамильтонианом  $H$ .* ■

Приведем простейший пример. Рассмотрим геодезический поток на двумерной плоскости Лобачевского  $L^2$ . Риманова метрика плоскости Лобачевского может быть записана в конформном виде следующим образом (метрика модели Клейна):

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad y > 0. \quad (13)$$

Легко видеть, что гамильтониан

$$H(x, p) = \frac{1}{2} y^2 (p_x^2 + p_y^2) \quad (14)$$

геодезического потока, соответствующего метрике (13), допускает в качестве первого интеграла функцию  $X(x, p) = p_x$  (переменная  $x$  является циклической), и ввиду функциональной независимости набора функций  $H(x, p)$  и  $p_x$  следует, что геодезический поток с гамильтонианом (14) является вполне интегрируемым.

Рассмотрим теперь расширенный геодезический поток на  $TL^2$  с гамильтонианом  $\delta H = y \delta y (p_x^2 + p_y^2) + y^2 (p_x \delta p_x + p_y \delta p_y)$ , эквивалентный уравнению Якоби на плоскости Лобачевского. Непосредственно проверяется, что первыми интегралами данной гамильтоновой системы являются функции  $\delta H(x, p)$ ,  $H(x, p)$ ,  $p_x$  и  $\delta p_x$ . Все интегралы функционально независимы, а следовательно, расширенный геодезический поток и соответствующее уравнение Якоби являются вполне интегрируемыми.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы и приложения*. М.: Наука, 1986.
2. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1989.
3. Аносов Д.В. *Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны* // Труды ин-та МИАН им. Стеклова. 1967. С. 56–69.
4. Casetti L. *Riemannian theory of Hamiltonian chaos and Lyapunov exponents* // arXiv: chaos-dyn/9609010. 1996.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*. М.: Наука. 1981.
6. Трофимов В. В., Фоменко Ф. Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений* М.: Факториал. 1995.