Математические структуры и моделирование
2004, вып. 13, с. 80–??

УДК 519.1

О СМЕЖНОСТИ ДРОБНЫХ И ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

И.В. Уразова

In given paper some properties concerning adjacency of vertices of polytope of Humiltonian cycles are shown.

Важное место в дискретной оптимизации играет задача о коммивояжере. Большое количество исследований посвящено многограннику этой задачи, то есть выпуклой оболочке векторов инциденций гамильтоновых циклов графа. В этой работе рассмотрены некоторые свойства, касающиеся смежности вершин многогранника гамильтоновых циклов.

Введем необходимые понятия и обозначения. Пусть $K_n = (V, E)$–полный неориентированный граф без петель и кратных ребер с множеством вершин V и ребер E, $|V| = n$. Для всякого $G \subseteq K_n$ через VG и EG обозначим соответственно множество вершин и ребер графа G. При этом для ребра $e \in E$ будем использовать запись uv, где $u, v \in V$– пара инцидентных ребру e вершин. Циклом (простым циклом) в K_n называется связный однородный степени 2 подграф. Цикл называется гамильтоновым, если он проходит по каждой вершине графа ровно один раз. Циклы будем задавать последовательным списком ребер. Степенью относительно G произвольной вершины $u \in V$ назовем величину $d_G(u) \equiv d_{EG}(u) = |\delta_G(u)|$.

Через R^E обозначим пространство вектор столбцов, координаты которых соответствуют элементам множества E. Вектором инциденций произвольного графа $G \subseteq K_n$ называется вектор $x^G \in R^E$, такой что $x^G_e = 1$, если $e \in EG$ и $x^G_e = 0$, если $e \notin EG$. Обозначим через $\mathcal{H}$–множество всех гамильтоновых циклов полного графа. Под многогранником гамильтоновых циклов будем понимать выпуклую оболочку их векторов инциденций, то есть

$$P_n = conv\{x^H \in R^E | H \in \mathcal{H}\}.$$

Пусть c — аддитивный вещественный функционал на E. Обозначим этой же буквой вектор $c = (c_e : e \in E) \in R^E$, полагая $c_e = c(e)$. Тогда для $R \subseteq E$

E-mail: urazovainn@mail.ru
Омский государственный университет

имеем $c(R) = \sum_{e \in R} c_e = \sum_{e \in E} c_e x_e^R = c^T x^R$. Таким образом, вещественный функционал c, определенный на множестве вершин единичного куба, можно продолжить до линейного функционала $c(x) = c^T x, x \in R^E$.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$\min\{c^T x | x \in P_n\} \qquad (1)$$

Если известен полиэдр M [5], соответствующий многограннику P_n, то задача (1) может быть записана как задача линейного программирования (ЛП)(см. [2]).

$$\min\{c^T x | x \in M\} \qquad (2)$$

Решив ее, мы получим решение задачи (1). Такую постановку симметричной ЗК будем называть полиэдральной.

Для многогранника гамильтоновых циклов P_n часто используется полиэдральная релаксация [5] вида

$$M_n = \{x \in R^E | Ax = \bar{2}, \bar{0} \leq x \leq \bar{1}\},$$

где A-матрица вершинно-реберных инциденций графа K_n (строки матрицы соответствуют вершинам графа, столбцы - ребрам), $\bar{2}$,$\bar{0}$ и $\bar{1}$– вектор-столбцы с n компонентами равными $2, 0, 1$ соответственно.

Две вершины смежны в P_n, если они принадлежат одному ребру многогранника P_n.

Известно ,что M_n имеет нецелочисленные вершины. Опишем их структуру [2]. Для точки $\bar{x} \in M_n$ обозначим:

$C_{\bar{x}}$ - граф дробности точки $\bar{x}$ – индуцирован множеством ребер $EC_{\bar{x}} = \{e \in E | 0 < \bar{x}_e < 1\}$,

$T_{\bar{x}}$ - граф единиц точки $\bar{x}$ –3 индуцирован множеством ребер $ET_{\bar{x}} = \{e \in E | \bar{x}_e = 1\}$.

Теорема 1. [2] *Точка $\bar{x} \in M_n$ является вершиной полиэдра M_n тогда и только тогда, когда она целочисленна, либо ее граф дробности $C_{\bar{x}}$ и граф единиц $T_{\bar{x}}$ удовлетворяют условиям:*

1) $C_{\bar{x}}$ есть объединение четного числа простых вершинно-непересекающихся нечетных циклов, причем для любого $e \in EC_{\bar{x}}$ имеет место $\bar{x}_e = \frac{1}{2}$;

2) $d_{T_{\bar{x}}}(u) = 1$ для всех $u \in VC_{\bar{x}}$ и $d_{T_{\bar{x}}}(u) = 2$ для всех $u \in V \setminus VC_{\bar{x}}$.

■

Пусть $x^1, x^2 \in M_n$ – пара различных точек. Введем следующие обозначения:

$R(x^1, x^2)$=$\{e \in E | x_e^1, x_e^2 \in \{0, 1\}, x_e^1 + x_e^2 = 1\}$,

$\bar{R}(x^1, x^2)$=$E \setminus \{R(x^1, x^2) \cup E(C_{x^1} \cup C_{x^2})\}$,

$U(x^1, x^2) = \{u \in V \setminus V(C_{x^1} \cup C_{x^2}) | \delta_{T_{x^1}} = \delta_{T_{x^2}}\}$,

G_{x^1,x^2} – компоненты связности графа, индуцированного множеством ребер $R(x^1, x^2)$, не содержащие вершин из $V(C_{x^1} \cup C_{x^2})$.

Теорема 2. [2] *Пусть $x^1, x^2 \in M_n$ – вершины, $R(x^1, x^2) = \emptyset$. Тогда x^1 и x^2 смежны в M_n, если и только если*

$$|V(C_{x^1} \cup C_{x^2})| = |E(C_{x^1} \cup C_{x^2})| - 1. \qquad \blacksquare$$

Теорема 3. [2] *Пусть $x^1, x^2 \in M_n$ – вершины, $R(x^1, x^2) \neq \emptyset$, $C_{x^1} \cup C_{x^2}$ – набор простых вершино-непересекающихся циклов. Справедливы следующие утверждения:*
1) если $|R(x^1, x^2)| + |U(x^1, x^2)| = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})| + 1$, то вершины x^1 и x^2 смежны в M_n тогда и только тогда, когда G_{x^1,x^2} либо пуст, либо является парой простых нечетных циклов с одной общей вершиной;
2) если $|R(x^1, x^2)| + |U(x^1, x^2)| = |\overline{V}(C_{x^1} \cup C_{x^2})|$, то вершины смежны в M_n тогда и только тогда, когда G_{x^1,x^2} – четный цикл. ■

Используя, описанные выше результаты в работе были исследованы свойства многогранников P_n и M_n, касающиеся количества вершин многогранника P_n, смежных с дробными вершинами полиэдра M_n.

Замечание 1. Если вершины $x \in P_n$ и $\bar{x} \in M_n$ смежны, то $R(\bar{x}, x) = 1$.

Доказательство. Для существования смежных целочисленных вершин с данной дробной необходимо и достаточно выполнение критериев теоремы 3 [2]. Общее число смежных целочисленных вершин (гамильтоновых циклов) складывается из вершин, получаемых исключением ребер из $T_{\bar{x}}$ и вершин, получаемых добавлением ребер в графе $T_{\bar{x}}$. Рассмотрим подробнее процесс исключения и добавления ребер.
Пусть $\bar{x}$–дробная вершина, x–целочисленная, $R(\bar{x}, x) = \emptyset$. Вершины $\bar{x}$ и x смежны $\Rightarrow$ (по теореме 2[2]) $|V(C_{\bar{x}} \cup C_x)| = |E(C_{\bar{x}} \cup C_x)| - 1$. Очевидно, что $C_x = \emptyset$, то есть $|V(C_{\bar{x}} \cup C_x)| = 6$ и $|E(C_{\bar{x}} \cup C_x)| = 6$ для любой дробной вершины. Таким образом, для вершин многогранников M_n и P_n невозможен случай, когда $R(\bar{x}, x) = \emptyset$. Рассмотрим смежность вершин по Теореме 3.[2], когда $R(\bar{x}, x) \neq \emptyset$. Так как для исследуемых M_n и P_n всегда $|U(\bar{x}, x)| = |\overline{V}(C_{\bar{x}} \cup C_x)|$, то возможен только случай, когда $R(\bar{x}, x) = 1$. Таким образом, чтобы построить целочисленную вершину $x \in vertP_n$ (гамильтонов цикл), смежную с дробной вершиной $\bar{x} \in M_n$ необходимо исключить из $ET_{\bar{x}}$,либо добавить к $ET_{\bar{x}}$ одно ребро. Рассмотрим, когда эта процедура не дает гамильтонов цикл.

Пусть $C_{\bar{x}} = C_1 \cup C_2$ и $u_1, u_2, u_3 \in VC_1, v_1, v_2, v_3 \in VC_2, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3 \in ET_{\bar{x}}$, при этом $u_1u_2, u_2u_2 \in EC_1, v_1v_2, v_2v_3 \in EC_2$. (см. рис. 1)

1) Покажем, что в этом случае, удалив ребро u_2v_2 невозможно построить гамильтонов цикл. Так как u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 принадлежат разным

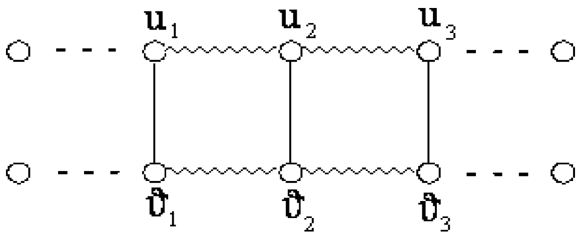

Рис. 1.

циклам графа $C_{\bar{x}}$, то исключение ребра u_2v_2 приведет к построению ребер $u_1u_2, u_2u_3, v_1v_2, v_2v_3$ в графе $ET_{\bar{x}}$. А так как в $ET_{\bar{x}}$ имеются ребра u_1v_1 и u_3v_3, то имеем цикл $u_1u_2u_3v_1v_2v_3$, то есть возникают две несвязные компоненты, одна из которых есть цикл $u_1u_2u_3v_1v_2v_3$. Таким образом, удалив ребро u_2v_2 невозможно построить вершину $x \in vertP_n$, смежную с дробной вершиной $\bar{x} \in vertM_n$.

2) Аналогичным образом нетрудно показать, когда процедура добавления ребра не даст гамильтонова цикла. Перечислим эти случаи:

- добавление ребра к $ET_{\bar{x}}$, инцидентного вершинам одного из пары циклов в $C_{\bar{x}} = C_1 \cup C_2$;
- добавление ребер u_1v_1 и u_3v_3;
- добавление ребра, инцидентного вершинам u_1, u_3, v_1, v_3 и вершинам, смежным с ними.

■

Полученные ниже свойства, касаются лишь частного случая смежности вершин многогранников P_n и M_n, а именно, когда дробная вершина $\bar{x} \in vertM_n$ имеет граф дробности $C_{\bar{x}} = C_1 \cup C_2$, такой что $|VC_1| = |VC_2|$.

Предложение 1. *Пусть $\bar{x} \in vertM_n, n \geq 7, |VC_{\bar{x}}| = 6$ и существует цепь в графе $T_{\bar{x}}$, соединяющая все вершины $V \setminus VC_{\bar{x}}$. Тогда $\bar{x}$ смежна ровно с восемью вершинами многогранника P_n.*

Доказательство. Используя замечание 1, заметим, что ребра, входящие в цепь графа $T_{\bar{x}}$ удалять нельзя, так как вершины, принадлежащие множеству $V \setminus VC_{\bar{x}}$ станут висячими, что не даст гамильтонов цикл. Поэтому возможны только две целочисленные вершины, получаемые удалением ребер $T_{\bar{x}}$, невходящих в цепь. Аналогично, добавить ребра можно только к вершинам графа $C_{\bar{x}}$, так как степень вершин в гамильбтоновом цикле равна двум. Таким образом, получаем восемь целочисленных вершин, смежных с данной дробной. ■

Следствие 1. *Пусть* $\bar{x} \in vertM_n, n \geq 8, |VC_{\bar{x}}| = 6$ *и существуют вершины* $v, u \in V \setminus VC_{\bar{x}}$, *смежные с вершинами только одного из пары циклов графа* $C_{\bar{x}}$. *Тогда* $\bar{x}$ *смежна ровно с четырьмя вершинами многогранника* P_n.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 1 рассмотрим процедуру исключения и добавления ребер в $T_{\bar{x}}$. Понятно, что таких вершин как v будет две и ребро , соединяющее две оставшиеся вершины в $C_{\bar{x}}$. Это следует из определения структуры нецелочисленных вершин и условия. Так как $|VC_{\bar{x}}| = 6$, то процесс исключения и добавления одного ребра в данном графе $T_{\bar{x}}$ приведет к возникновению двух несвязных циклов. Поэтому, добавить можно только ребра, инцидентные вершинам графа $C_{\bar{x}}$ и вершинам u и v. А таких вершин четыре. ■

Для анализа смежности вершин в более общем случае, а именно, когда граф $C_{\bar{x}}$ есть пара вершинно-непересекающихся циклов одинаковой длины, то есть $|VC_{\bar{x}}| = 4\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{N}$ введем обозначение $I_{\bar{x}}$ – общее число вершин P_n, смежных с дробной вершиной $\bar{x}$ из M_n.

Предложение 2. *Пусть* $\bar{x} \in M_n, C_{\bar{x}}$– *пара вершинно-непересекающихся циклов одинаковой длины, то есть* $|VC_{\bar{x}}| = 4\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{N}$. *Пусть граф* $T_{\bar{x}}$ *содержит только ребра, инцидентные вершинам разных циклов в* $C_{\bar{x}}$ *и для любой* $u \in T_{\bar{x}}$ $d_{T_{\bar{x}}}(u) = 1$, t *– число ребер* u_2v_2, *удовлетворяющих следующим условиям: если* $u_1, u_2, u_3 \in VC_1, v_1, v_2, v_3 \in VC_2, u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3 \in ET_{\bar{x}}$, *то* $u_1u_2, u_2u_2 \in EC_1, v_1v_2, v_2v_3 \in EC_2$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$\frac{3}{2}|VC_{\bar{x}}| - t \leq I_{\bar{x}} \leq \frac{|VC_{\bar{x}}|^2 - 4|VC_{\bar{x}}|}{2}$$

Доказательство. Заметим, что если $|VC_{\bar{x}}| = 4\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{N}$, то в условиях утверждения $|ET_{\bar{x}}| = 2\kappa + 1$. Число смежных целочисленных вершин складывается из количества вершин, получаемых последовательным удалением и добавлением ребер из графа $ET_{\bar{x}}$. Рассмотрим следующие возможные случаи:
1) $t = 0$. Тогда из замечания 1 следует, что из $ET_{\bar{x}}$ исключить можно $2\kappa + 1$ ребер. Теперь к каждой из вершин, инцидентных ребрам графа $ET_{\bar{x}}$, добавим по одному ребру. Понятно, что этих ребер будет $2(2\kappa + 1)$. Следовательно, количество смежных целочисленных вершин

$$I_{\bar{x}} = 2\kappa + 1 + 4\kappa + 2 = \frac{|VC_{\bar{x}}|}{2} + |VC_{\bar{x}}| = \frac{3}{2}|VC_{\bar{x}}|.$$

2)$t \neq 0$. Тогда из замечания 1 следует, что исключить можно $2\kappa + 1 - t$ ребер графа $ET_{\bar{x}}$. Нетрудно заметить, что при построении целочисленных вершин (гамильтоновых циклов) можно добавить не менее, чем $2(2\kappa + 1)$ ребер, но не более, чем $\frac{(4\kappa+2)(4\kappa+1)}{2} - (4\kappa + 2) - (2\kappa + 1)$ ребер. Таким образом,

$$2\kappa + 1 - t + 2(2\kappa + 1) \leq I_{\bar{x}} \leq \frac{(4\kappa + 2)(4\kappa + 1)}{2} - (4\kappa + 2) - (2\kappa + 1) - t$$

Так как $|VC_{\bar{x}}| = 4\kappa + 2$, то получаем

$$\frac{|VC_{\bar{x}}|}{2} - t + |VC_{\bar{x}}| = \frac{3}{2}|VC_{\bar{x}}| - t \le I_{\bar{x}} \le \frac{|VC_{\bar{x}}|(|VC_{\bar{x}}| - 1)}{2} - |VC_{\bar{x}}| - \frac{|VC_{\bar{x}}|}{2} - t =$$

$$= \frac{|VC_{\bar{x}}|^2 - 3|VC_{\bar{x}}|}{2} - t$$

Утверждение доказано. ■

Следствие 2. *Если в условии утверждения 1 существуют p вершин, принадлежащих множеству* $V \setminus VC_{\bar{x}}$, *то*

$$\frac{3}{2}|VC_{\bar{x}}| - t - 2p \le I_{\bar{x}} \le \frac{|VC_{\bar{x}}|^2 - 3|VC_{\bar{x}}|}{2} - t - 2p$$

■

Следствие 3. *Пусть* $\bar{x} \in vertM_n, |VC_{\bar{x}}| = 6$, *граф* $T_{\bar{x}}$ *содержит только* t *ребер, инцидентных вершинам разных циклов графа* $C_{\bar{x}}$. *Тогда* $I_{\bar{x}} = 6 + t$.

■

Литература

1. M.Grötshel, M.W.Padberg. *Polyhedral theory*//Ed. by E.L.Lawer, J.K.Lenstra, A.N.G.Rinnooy Kan, D.B.Shmoys. – The Traveling Salesman Problem. John Wiley, Sons Ltd., 1985.
2. Симанчев Р.Ю. *Структура нецелочисленных вершин релаксации многогранника k–факторов.* // Математические структуры и моделирование. Омск: ОмГУ. 1998. Вып.1. С.20-26.
3. Симанчев Р.Ю. *Смежность вершин многогранника k–факторов.* //Математические структуры и моделирование. Омск: ОмГУ. 1998. Вып.2. С.39-50.
4. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* М.: Мир, 1991. Т.1,2.
5. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники. Графы. Оптимизация.* М.: Наука, 1981.

м