

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА В ПОЛЕ ААРОНОВА–БОМА

О.Л. Курнявко, И.В. Широков, Ю.А. Юревич

It is considered the charged scalar field, interactive with external Aharonov-Bohm field. An analytical expression for a vacuum energy-momentum tensor is received and dependence of a scalar field vacuum energy density on distance and field magnitude.

1. Введение

Исследование вакуумных эффектов является актуальной задачей квантовой теории поля. Под вакуумными эффектами понимается существование ненулевых средних операторов наблюдаемых физических величин в вакуумном состоянии. Природа вакуумных эффектов обусловлена воздействием внешних полей или нетривиальностью топологии пространства, т.е. либо его неодносвязностью, либо наличием у него границы [1].

Описанная ситуация характерна и для эффекта Ааронова–Бома. Напомним, что эффект Ааронова–Бома заключается в изменении интерференционной картины под воздействием поля Ааронова–Бома. Поле Ааронова–Бома — векторный потенциал магнитного поля бесконечно тонкого соленоида (но с конечным магнитным потоком). Магнитное поле в этом случае в доступном для частиц пространстве, т.е. вне соленоида, равно нулю. В общем случае, поле Ааронова–Бома можно определить как калибровочное поле, имеющее нулевую напряженность во всех доступных для частиц областях пространства, но незануляемое никаким калибровочным преобразованием.

Наличие в квантовых системах поля Ааронова–Бома приводит к ряду наблюдаемых физических явлений, не имеющих классического аналога. Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования доказали как сам факт существования данного эффекта, так и прояснили многие его нетривиальные особенности. В частности, можно показать, что наложение данного поля на атом водорода приводит к сдвигу его энергетических уровней. Наиболее общее исследование уравнений Дирака и Клейна–Гордона в поле Ааронова–Бома в комбинации с классическими внешними электромагнитными полями было проведено в работе [2], где были найдены все случаи допускающие точные решения

© 2004 О.Л. Курнявко, И.В. Широков, Ю.А. Юревич

E-mail: kurnyavko@univer.omsk.su

Институт сенсорной микроэлектроники СО РАН, Омский государственный университет

и получен явный вид соответствующих решений, а также показана возможность получения точных решений в (2+1) КЭД для рассмотренных полей. Однако, существует круг явлений, не рассмотренных ранее и связанных с топологической нетривиальностью пространства в случае эффекта Ааронова–Бома, что обуславливает возможность существования вакуумных квантовых эффектов и, в частности, поляризации вакуума [1].

Следует отметить, что поляризация вакуума в d -мерном пространстве для скалярных частиц в классическом поле Ааронова–Бома рассматривалась в работах [3]. Авторы этих работ получили асимптотические выражения для вакуумной плотности энергии скалярного поля и аналитическое выражение для специального случая поля Ааронова–Бома. Целью настоящей работы является получение в аналитическом виде вакуумного тензора энергии-импульса заряженного скалярного поля в классическом поле Ааронова–Бома.

2. Тензор энергии-импульса заряженного скалярного поля

1. Плотность лагранжиана заряженного скалярного поля в классическом внешнем поле имеет вид

$$L(x) = D_i^* \psi^*(x) D^i \psi(x) - m^2 \psi^*(x) \psi(x) \quad (1)$$

где ψ , ψ^* – волновые функции, заряженного скалярного поля, m – масса, соответствующая данному полю, под x понимаются все четыре пространственно-временные переменные $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Оператор D^i – есть оператор обобщенной производной и имеет вид

$$D^i = \partial^i + ieA^i$$

где A^i – 4-вектор потенциала электромагнитного поля, e – заряд частицы вместе со своим знаком (т.е. $e = \pm|e|$), при этом сигнатура метрики имеет вид $(+, -, -, -)$. Здесь и далее принята система единиц в которой $c = 1$, $\hbar = 1$. Лагранжиану (1) соответствуют уравнения поля

$$(D_i D^i + m^2) \psi(x) = 0 \quad (2)$$

$$(D_i^* D^{*i} + m^2) \psi^*(x) = 0 \quad (3)$$

Тензор энергии-импульса в данном случае будет иметь вид

$$T_{ij} = D_i^* \psi^*(x) D_j \psi(x) + D_j^* \psi^*(x) D_i \psi(x) - g_{ij} L(x).$$

При наличии поля Ааронова–Бома, компоненты 4-потенциала которого в цилиндрических координатах ($x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$) определяются как

$$A^0 = 0, \quad A^1 = \frac{a}{r}, \quad A^2 = 0, \quad A^3 = 0, \quad (4)$$

где $a = \frac{1}{2}BR^2$, B – индукция магнитного поля внутри соленоида, R – радиус соленоида, полную систему классических решений уравнений (2-3), можно построить с помощью двух наборов решений: отрицательно частотных и положительно частотных, каждое из которых имеет вид

$$\begin{aligned}\psi^{(-)}(r, \varphi, z, t) &= e^{-i(\omega t + n\varphi - kz)} f(r), \\ \psi^{(+)}(r, \varphi, z, t) &= e^{+i(\omega t + n\varphi - kz)} f(r).\end{aligned}$$

Учитывая, что векторный потенциал удовлетворяет условию кулоновской калибровке $\nabla \mathbf{A} = 0$, на функцию $f(r)$ получим уравнения Бесселя вида

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \left[\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{r^2} \right] \right) f(r) = 0, \quad (5)$$

где $\lambda^2 = \omega^2 - m^2 - k^2$, а $\alpha = |n - ea|$. Общее решение уравнения (5) может быть записано через функции Бесселя $J_\alpha(\lambda r)$:

$$f(r) = AJ_\alpha(\lambda r) + BJ_{-\alpha}(\lambda r), \quad (6)$$

где A и B – произвольные константы. Потребовав, чтобы при $r \geq 0$ волновые функции были ограничены, в (6) следует положить $B = 0$. В результате получим

$$\begin{aligned}\psi_n^{(-)}(k, \lambda) &= Ae^{-i(\omega t + n\varphi - kz)} J_\alpha(\lambda r) \\ \psi_n^{(+)}(k, \lambda) &= Ae^{+i(\omega t + n\varphi - kz)} J_\alpha(\lambda r),\end{aligned}$$

где приняты обозначения $\psi_n^{(\pm)}(k, \lambda) \equiv \psi_n^{(\pm)}(k, \lambda; r, \varphi, z, t)$. Полученная система решений обладает свойством полноты, а также является ортонормированной в терминах скалярного произведения вида

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int dV \left(\phi_1^* \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1^*}{\partial t} \phi_2 \right),$$

если положить

$$A = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{2\omega} \right)^{\frac{1}{2}},$$

тогда имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}\left(\psi_n^{(-)}(k, \lambda), \psi_{n'}^{(-)}(k', \lambda') \right) &= \delta_{nn'} \delta(k, k') \delta(\lambda, \lambda'), \\ \left(\psi_n^{(+)}(k, \lambda), \psi_{n'}^{(+)}(k', \lambda') \right) &= -\delta_{nn'} \delta(k, k') \delta(\lambda, \lambda'), \\ \left(\psi_n^{(\pm)}(k, \lambda), \psi_{n'}^{(\mp)}(k', \lambda') \right) &= 0.\end{aligned}$$

Свойства полноты и ортогональности могут быть проверены непосредственным вычислением с учетом, того что функции Бесселя образуют ортогональную и полную систему со следующими условиями ортогональности [2]

$$\int_0^\infty J_\alpha(\lambda' r) J_\alpha(\lambda r) r dr = \frac{1}{\lambda} \delta(\lambda, \lambda'), \quad \lambda > 0, \quad \lambda' > 0.$$

и полноты

$$\int_0^{\infty} J_{\alpha}(\lambda r') J_{\alpha}(\lambda r) \lambda d\lambda = \frac{1}{r} \delta(r, r'), \quad r > 0, \quad r' > 0.$$

Таким образом в результате общие решения уравнений (2-3) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi, z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda [a_n(k, \lambda) \psi_n^{(-)}(k, \lambda) + b_n^+(k, \lambda) \psi_n^{(+)}(k, \lambda)] \\ \psi^*(r, \varphi, z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_0^{\infty} d\lambda [a_n^+(k, \lambda) \psi_n^{(+)}(k, \lambda) + b_n(k, \lambda) \psi_n^{(-)}(k, \lambda)]. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Процедура квантования состоит в переходе к операторам

$$\psi, \psi^* \rightarrow \hat{\psi}, \hat{\psi}^*$$

со следующими правилами коммутации:

$$\left[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \frac{\partial \hat{\psi}^*(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \right] = i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где \mathbf{r} – совокупность пространственных координат. Все остальные (не выписанные здесь) коммутаторы равны нулю. Таким образом оператор тензора энергии-импульса определится как

$$\hat{T}_{ij} = D_i^* \hat{\psi}^*(x) D_j \hat{\psi}(x) + D_j^* \hat{\psi}^*(x) D_i \hat{\psi}(x) - g_{ij} \hat{L}(x)$$

Вакуумные средние элементов тензора энергии-импульса имеют вид

$$\langle 0 | \hat{T}_{00} | 0 \rangle = \frac{1}{r^4} \int d\tilde{k} dp A^2 [2\tilde{\omega}^2 J_{\beta}^2(p) + 2\tilde{\omega}^2 \Phi_{\beta}(p) + \Psi_{1\beta}(p)], \quad (8)$$

$$\langle 0 | \hat{T}_{11} | 0 \rangle = \frac{1}{r^4} \int d\tilde{k} dp A^2 p^2 [J_{\beta}^2(p) + \Phi_{\beta}(p) - J_{\beta-1}(p) J_{\beta+1}(p) + \Psi_{2\beta}(p)], \quad (9)$$

$$\langle 0 | \hat{T}_{22} | 0 \rangle = \frac{1}{r^4} \int d\tilde{k} dp A^2 p^2 [J_{\beta}^2(p) + \Phi_{\beta}(p) + J_{\beta-1}(p) J_{\beta+1}(p) - \Psi_{2\beta}(p)], \quad (10)$$

$$\langle 0 | \hat{T}_{33} | 0 \rangle = \frac{1}{r^4} \int d\tilde{k} dp A^2 [2\tilde{k}^2 J_{\beta}^2(p) + 2\tilde{k}^2 \Phi_{\beta}(p) - \Psi_{1\beta}(p)], \quad (11)$$

где $\beta = -ea$, $\tilde{m} = rm$, $\tilde{k} = rk$, $p = r\lambda$, $\tilde{\omega} = r\omega$, а функции $\Phi_{\beta}(p)$, $\Psi_{1\beta}(p)$ и $\Psi_{2\beta}(p)$ есть

$$\Phi_{\beta}(p) = J_{\beta-1}^2(p) - \frac{1}{2} J_{1-\beta}^2(0) - \frac{1}{2} J_{\beta}^2(0) + \frac{p^{2+2\beta} F\left(\begin{matrix} 1+\beta, 3/2+\beta; \\ 2+2\beta, 2+\beta, 2+\beta; \end{matrix} -p^2\right)}{2^{1+2\beta} (2+2\beta) \Gamma(1+\beta) \Gamma(2+\beta)}$$

$$\Psi_{1\beta}(p) = \frac{1}{2} p^2 (J_{\beta-1}^2(p) - J_{1-\beta}^2(p) + J_{-\beta}^2(p) - J_{\beta}^2(p))$$

$$\Psi_{2\beta}(p) = \frac{1}{4} p (J_{-\beta-1}(p) J_{-\beta+2}(p) - J_{-\beta}(p) J_{-\beta+1}(p) + J_{\beta-1}(p) J_{\beta+2}(p) - J_{\beta}(p) J_{\beta+1}(p))$$

Все остальные компоненты тензора энергии-импульса равны нулю.

3. Перенормировка тензора энергии-импульса

Полученные выше выражения для компонент тензора энергии-импульса после интегрирования, очевидно, приводят к расходимости. Для их устранения в квантовой теории применяется программа перенормировок [1]. В данном случае она может быть реализована с помощью вычитательных процедур, которые состоят в том, что из данного бесконечного выражения вычитается некоторое другое бесконечное выражение. Последнее подбирается так, чтобы, во-первых, полученная разность была конечной, а, во-вторых, чтобы данную операцию можно было интерпретировать в терминах перенормировок тех или иных физических констант. Технически для того, чтобы иметь возможность, осуществлять указанные операции с бесконечными выражениями необходимо предварительно их регуляризовать т.е. временно сделать их конечными. После того, как все необходимые операции проделаны регуляризацию надо снять.

Рассматриваемая в данной работе ситуация, характеризуется, как уже было сказано во введении, наличием не тривиальной топологии пространства, таким образом наблюдаемые значения физических величин можно интерпретировать как разность величины полученной в данном случае и величины полученной в пространстве с тривиальной топологией – топологией Минковского [1]. Таким образом

$$\langle 0|\hat{T}_{ij}^{ren}|0\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\langle 0|\hat{T}_{ij}|0\rangle_{\epsilon} - \langle 0_M|\hat{T}_{ij}|0_M\rangle_{\epsilon} \right],$$

здесь ϵ - параметр регуляризации (при $\epsilon = 0$ регуляризация снимается), $\langle 0_M|$, $|0_M\rangle$ – вакуумное состояние в пространстве с топологией Минковского. Остановимся более подробно на процедуре регуляризации полученных выше выражений, каждое из которых имеет вид

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k} \int_0^{\infty} dp f(\tilde{k}, p) \tilde{\omega}, \quad \tilde{\omega} = (p^2 + \tilde{k}^2 + \tilde{m}^2)^{-s}. \quad (12)$$

где, s может принимать значения $-1/2, 0, 1/2$. Данная процедура основана на применении тождества [4]

$$z^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} e^{-z^2 t}, \quad Re s > 0, Re z > 0. \quad (13)$$

Выражение (12) с учетом (13) можно записать

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k} \int_0^{\infty} dp f(\tilde{k}, p) (p^2 + \tilde{k}^2 + \tilde{m}^2)^{-s} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k} \int_0^{\infty} dp f(\tilde{k}, p) e^{-(p^2 + \tilde{k}^2 + \tilde{m}^2)t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Упомянутый выше параметр регуляризации ϵ в данном случае имеет вид $\epsilon = 1/2 \pm s$ либо $\epsilon = s$. После применения процедуры регуляризации и перенормировки все интегралы в выражениях (8-11) могут быть вычислены аналитически. Точные выражения для перенормированных компонент тензора энергии-импульса приведены в приложении №1, а в приложении №2 даны графики зависимости безразмерных выражений для компонент тензора энергии-импульса от дробной части величины магнитного потока β и безразмерной массы $M = mr$

4. Заключение

Из проделанных выше расчетов и приведенных графиков видно, что плотность вакуумной энергии всюду отрицательна, зависит лишь от дробной части магнитного потока α и при фиксированном расстоянии принимает максимальное по модулю значение при $\beta = 1/2$. В окрестности нуля модуль плотности вакуумной энергии меняется согласно закону r^{-4} , при больших расстояниях — убывает экспоненциально. Отрицательность плотности вакуумной энергии означает нарушение условия энергодоминантности. Отметим, что нарушение условия энергодоминантности играет важную роль в квантовой космологии, поскольку в этом случае не выполняются условия теоремы Хокинга–Пенроуза (о неизбежности сингулярностей в общей теории относительности).

В ближайшее время авторы настоящей статьи намерены представить результаты расчета вакуумного тензора энергии-импульса для электронно-позитронного поля во внешнем поле Ааронова–Бома.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. *Вакуумные эффекты в сильных полях*, М.: Энергоатомиздат, 1988.
2. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тлячев В.Б. *Труды физического общества республики Адыгея*, 2001, № 6, стр. 11-40.
3. Sitenko Y.A., Gorkavenko V.M. *Induced vacuum energy-momentum tensor in the background of d-2 - brane in d+1-dimensional space-time* // arXiv: hep-th/0210099v3.
4. Абрамовиц М.А., Стиган И.А. *Справочник по специальным функциям с формулами*, М.: Мир, 1979.

Приложение №1

$$\begin{aligned}
 T_{00}^{ren} = & \frac{2\beta(\beta-1)(\beta^2-\beta+1)+3m^2r^2(2\beta^2-2\beta+1)}{48\pi^2r^4} + \\
 & \frac{(\beta^2-1)\beta}{24\pi^2r^4} F\left(\begin{matrix} -3/2; \\ \beta-1, -\beta-1; \end{matrix} m^2r^2\right) - \frac{(\beta-2)(\beta-1)\beta}{24\pi^2r^4} F\left(\begin{matrix} -3/2; \\ \beta-2, -\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{m^2(\beta-1)}{8\pi^2r^2} F\left(\begin{matrix} -1/2; \\ \beta-1, -\beta+1; \end{matrix} m^2r^2\right) - \frac{m^2\beta}{8\pi^2r^2} F\left(\begin{matrix} -1/2; \\ \beta, -\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) - \\
 & \frac{2^{2\beta-5}m^4(mr)^{-2\beta}(\beta-1)\Gamma(\beta)}{\pi^2\Gamma(3-\beta)} F\left(\begin{matrix} 1/2-\beta; \\ 3-\beta, 1-2\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{4^{\beta-3}m^6(mr)^{-2\beta}r^2\Gamma(\beta)}{\pi^2\Gamma(4-\beta)} F\left(\begin{matrix} 3/2-\beta; \\ 4-\beta, 2-2\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{2^{2\beta-7}m^6(mr)^{-2\beta}r^2\csc(\pi\beta)}{\pi\Gamma(2-\beta)\Gamma(3-\beta)} F\left(\begin{matrix} 3/2-\beta; \\ 3-2\beta, 4-\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) - \\
 & \frac{4^{\beta-4}m^8(mr)^{-2\beta}r^4(72\Gamma(\beta)+((\beta^2-7)^2(\beta-2)\beta-36)\Gamma(1+\beta))}{\pi^2(\beta-3)(\beta-2)^2(\beta-1)^2(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)\Gamma(5-\beta)} \\
 & F\left(\begin{matrix} 5/2-\beta; \\ 4-2\beta, 5-\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{2^{-2\beta-3}m^4(mr)^{-2+2\beta}\beta\Gamma(-1-\beta)}{\pi^2\Gamma(\beta)} F\left(\begin{matrix} \beta-1/2; \\ 2+\beta, -1+2\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) - \\
 & \frac{2^{-2\beta-4}m^4(mr)^{2\beta}\Gamma(-2-\beta)}{\pi^2\Gamma(\beta)} F\left(\begin{matrix} \beta+1/2; \\ 2\beta, 3+\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{2^{-2\beta-5}m^4(mr)^{2\beta}\csc(\pi\beta)(-2\Gamma(\beta)+\Gamma(2+\beta))}{\pi(\beta-1)\Gamma(\beta)\Gamma(1+\beta)\Gamma(3+\beta)} F\left(\begin{matrix} \beta+1/2; \\ 3+\beta, 1+2\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{4^{-\beta-3}m^6(mr)^{2\beta}r^2\Gamma(-3-\beta)}{\pi^2\Gamma(1+\beta)} F\left(\begin{matrix} \beta+3/2; \\ 4+\beta, 2+2\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) - \\
 & \frac{2^{2\beta-7}m^6(mr)^{-2\beta}r^2\Gamma(-3+\beta)}{\pi^2\Gamma(2-\beta)} F\left(\begin{matrix} -\beta+1, -\beta+3/2; \\ 3-2\beta, 4-\beta, 2-\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{2^{-2\beta-5}m^4(mr)^{2\beta}\Gamma(-\beta-2)(\Gamma(\beta)-\Gamma(\beta+1))}{\pi(\beta-1)\Gamma(\beta)\Gamma(\beta+1)} F\left(\begin{matrix} \beta+1/2; \\ 3+\beta, 1+2\beta; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{m^6r^2}{384\pi^2(\beta^2-1)} F\left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 4, \beta+2, -\beta+2; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{m^6r^2}{384\pi^2(\beta-2)\beta} F\left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 4, -\beta+3, \beta+1; \end{matrix} m^2r^2\right) + \\
 & \frac{m^4(3(\beta-1)\beta+2(\beta-1)\beta(\pi\cot(\pi\beta)+2\ln 2-\ln(m^2r^2))+4(\beta-1)\beta\Psi(\beta)-1)}{64\pi^2(\beta-1)\beta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{11}^{ren} = & -\frac{(-1+\beta)\beta(1+\beta)(2+\beta)}{24\pi^2 r^4} F\left(\begin{matrix} -3/2; \\ -2-\beta, -1+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{(-2+\beta)(-1+\beta)\beta(1+\beta)}{24\pi^2 r^4} F\left(\begin{matrix} -3/2; \\ -1-\beta, -2+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{(-1+\beta)\beta(1+\beta)}{8\pi^2 r^4} F\left(\begin{matrix} -3/2; \\ -1-\beta, -1+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{(-2+\beta)(-1+\beta)\beta}{24\pi^2 r^4} F\left(\begin{matrix} -3/2; \\ -2+\beta, -\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{m^2(-1+\beta)}{16\pi^2 r^2} F\left(\begin{matrix} -1/2; \\ 1-\beta, -1+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \frac{m^2\beta}{16\pi^2 r^2} F\left(\begin{matrix} -1/2; \\ -\beta, \beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{4^{-3+\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 \Gamma(-3+\beta)}{\pi^2 \Gamma(1-\beta)} F\left(\begin{matrix} 3/2-\beta; \\ 2-2\beta, 4-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{2^{-7+2\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 (-2+\beta) \Gamma(-3+\beta)}{\pi^2 \Gamma(2-\beta)} F\left(\begin{matrix} 3/2-\beta; \\ 3-2\beta, 4-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{4^{-4+\beta} m^8 (mr)^{-2\beta} r^4 \Gamma(-4+\beta)}{\pi^2 \Gamma(2-\beta)} F\left(\begin{matrix} 5/2-\beta; \\ 4-2\beta, 5-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{2^{-5-2\beta} m^4 (mr)^{2\beta} (-1+\beta) \csc(\pi\beta)}{\pi \Gamma(1+\beta) \Gamma(3+\beta)} F\left(\begin{matrix} 1/2+\beta; \\ 3+\beta, 1+2\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{2^{-7+2\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 (-2+\beta) \Gamma(-3+\beta)}{\pi^2 \Gamma(2-\beta)} F\left(\begin{matrix} 1-\beta, 3/2-\beta; \\ 3-2\beta, 2-\beta, 4-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{4^{-4+\beta} m^8 (mr)^{-2\beta} r^4 (-1+\beta) \Gamma(-4+\beta)}{\pi^2 \Gamma(3-\beta)} F\left(\begin{matrix} 2-\beta, 5/2-\beta; \\ 4-2\beta, 3-\beta, 5-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{2^{-5-2\beta} m^4 (mr)^{2\beta} (1+\beta) \Gamma(-2-\beta)}{\pi^2 \Gamma(1+\beta)} F\left(\begin{matrix} \beta, 1/2+\beta; \\ 1+\beta, 3+\beta, 1+2\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{4^{-3-\beta} m^6 (mr)^{2\beta} r^2 \beta \Gamma(-3-\beta)}{\pi^2 \Gamma(2+\beta)} F\left(\begin{matrix} 1+\beta, 3/2+\beta; \\ 2+\beta, 4+\beta, 2+2\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{m^6 r^2}{128\pi^2 (-1+\beta^2)} F\left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 3, 2-\beta, 2+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{m^6 r^2}{128\pi^2 (-2+\beta)\beta} F\left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 3, 3-\beta, 1+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{m^6 r^2}{384\pi^2 (-1+\beta^2)} F\left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 4, 2-\beta, 2+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{m^6 r^2}{384\pi^2 (-2+\beta)\beta} F\left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 4, 3-\beta, 1+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{m^4 r^4 (3-3(-1+\beta)\beta) + 8(-1+\beta)^2 \beta^2 (1+(-1+\beta)\beta)}{192\pi^2 r^4 (-1+\beta)\beta} - \\
 & \frac{6m^4 r^4 (-1+\beta)\beta (\pi \operatorname{ctg}(\pi\beta) + \ln(4) - 2 \ln(mr)) - 12m^4 r^4 (-1+\beta)\beta \Psi(\beta)}{192\pi^2 r^4 (-1+\beta)\beta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{22}^{ren} = & \frac{(-1 + \beta)\beta(1 + \beta)(2 + \beta)}{24\pi^2 r^4} F \left(\begin{matrix} -3/2; \\ -2 - \beta, -1 + \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{(-2 + \beta)(-1 + \beta)\beta(1 + \beta)}{24\pi^2 r^4} F \left(\begin{matrix} -3/2; \\ -1 - \beta, -2 + \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{5(-1 + \beta)\beta(1 + \beta)}{24\pi^2 r^4} F \left(\begin{matrix} -3/2; \\ -1 - \beta, -1 + \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{(-2 + \beta)(-1 + \beta)\beta}{24\pi^2 r^4} F \left(\begin{matrix} -3/2; \\ -2 + \beta, -\beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{m^2(-1 + \beta)}{16\pi^2 r^2} F \left(\begin{matrix} -1/2; \\ 1 - \beta, -1 + \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \frac{3m^2\beta}{16\pi^2 r^2} F \left(\begin{matrix} -1/2; \\ -\beta, \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{4^{-3+\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 \Gamma(-3 + \beta)}{\pi^2 \Gamma(1 - \beta)} F \left(\begin{matrix} 3/2 - \beta; \\ 2 - 2\beta, 4 - \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{2^{-7+2\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 (-2 + \beta) \Gamma(-3 + \beta)}{\pi^2 \Gamma(2 - \beta)} F \left(\begin{matrix} 3/2 - \beta; \\ 3 - 2\beta, 4 - \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{4^{-4+\beta} m^8 (mr)^{-2\beta} r^4 \Gamma(-4 + \beta)}{\pi^2 \Gamma(2 - \beta)} F \left(\begin{matrix} 5/2 - \beta; \\ 4 - 2\beta, 5 - \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{2^{-5-2\beta} m^4 (mr)^{2\beta} (1 + 3\beta) \csc(\pi\beta)}{\pi \Gamma(1 + \beta) \Gamma(3 + \beta)} F \left(\begin{matrix} 1/2 + \beta; \\ 3 + \beta, 1 + 2\beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{2^{-5-2\beta} m^6 (mr)^{2\beta} r^2 \csc(\pi\beta)}{\pi \Gamma(1 + \beta) \Gamma(4 + \beta)} F \left(\begin{matrix} 3/2 + \beta; \\ 4 + \beta, 2 + 2\beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{2^{-7+2\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 (-2 + \beta) \Gamma(-3 + \beta)}{\pi^2 \Gamma(2 - \beta)} F \left(\begin{matrix} 1 - \beta, 3/2 - \beta; \\ 3 - 2\beta, 2 - \beta, 4 - \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{4^{-4+\beta} m^8 (mr)^{-2\beta} r^4 (-1 + \beta) \Gamma(-4 + \beta)}{\pi^2 \Gamma(3 - \beta)} F \left(\begin{matrix} 2 - \beta, 5/2 - \beta; \\ 4 - 2\beta, 3 - \beta, 5 - \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{2^{-5-2\beta} m^4 (mr)^{2\beta} (1 + \beta) \Gamma(-2 - \beta)}{\pi^2 \Gamma(1 + \beta)} F \left(\begin{matrix} \beta, 1/2 + \beta; \\ 1 + \beta, 3 + \beta, 1 + 2\beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{4^{-3-\beta} m^6 (mr)^{2\beta} r^2 \beta \Gamma(-3 - \beta)}{\pi^2 \Gamma(2 + \beta)} F \left(\begin{matrix} 1 + \beta, 3/2 + \beta; \\ 2 + \beta, 4 + \beta, 2 + 2\beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{m^6 r^2}{128\pi^2 (-1 + \beta^2)} F \left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 3, 2 - \beta, 2 + \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) - \\
 & \frac{m^6 r^2}{128\pi^2 (-2 + \beta)\beta} F \left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 3, 3 - \beta, 1 + \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{m^6 r^2}{384\pi^2 (-1 + \beta^2)} F \left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 4, 2 - \beta, 2 + \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{m^6 r^2}{384\pi^2 (-2 + \beta)\beta} F \left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 4, 3 - \beta, 1 + \beta; \end{matrix} m^2 r^2 \right) + \\
 & \frac{m^4 r^4 (3 - 3(-1 + \beta)\beta) + 8(-1 + \beta)^2 \beta^2 (1 + (-1 + \beta)\beta)}{192\pi^2 r^4 (-1 + \beta)\beta} - \\
 & \frac{6m^4 r^4 (-1 + \beta)\beta (\pi \operatorname{ctg}(\pi\beta) + \ln(4) - 2 \ln(mr)) - 12m^4 r^4 (-1 + \beta)\beta \Psi(\beta)}{192\pi^2 r^4 (-1 + \beta)\beta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_{33}^{ren} = & \frac{\beta(1-\beta^2)}{24\pi^2 r^4} F\left(\begin{matrix} -3/2; \\ -1-\beta, -1+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{(-2+\beta)(-1+\beta)\beta}{24\pi^2 r^4} F\left(\begin{matrix} -3/2; \\ -2+\beta, -\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{m^2(-1+\beta)}{8\pi^2 r^2} F\left(\begin{matrix} -1/2; \\ 1-\beta, -1+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \frac{m^2\beta}{8\pi^2 r^2} F\left(\begin{matrix} -1/2; \\ -\beta, \beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{2^{-5+2\beta} m^4 (mr)^{-2\beta} (-1+\beta)\Gamma(-2+\beta)}{\pi^2 \Gamma(1-\beta)} F\left(\begin{matrix} 1/2-\beta; \\ 1-2\beta, 3-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{4^{-3+\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 \Gamma(-3+\beta)}{\pi^2 \Gamma(1-\beta)} F\left(\begin{matrix} 3/2-\beta; \\ 2-2\beta, 4-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{2^{-7+2\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 \csc(\pi\beta)}{\pi \Gamma(2-\beta)\Gamma(3-\beta)} F\left(\begin{matrix} 3/2-\beta; \\ 3-2\beta, 4-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{4^{-4+\beta} m^8 (mr)^{-2\beta} r^4 \Gamma(-1+\beta)}{\pi^2 \Gamma(5-\beta)} F\left(\begin{matrix} 5/2-\beta; \\ 4-2\beta, 5-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{2^{-3-2\beta} m^4 (mr)^{-2+2\beta} \beta \Gamma(-1-\beta)}{\pi^2 \Gamma(\beta)} F\left(\begin{matrix} -1/2+\beta; \\ 2+\beta, -1+2\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{4^{-2-\beta} m^4 (mr)^{2\beta} \Gamma(-2-\beta)}{\pi^2 \Gamma(\beta)} F\left(\begin{matrix} 1/2+\beta; \\ 2\beta, 3+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{2^{-5-2\beta} m^4 (mr)^{2\beta} \Gamma(-1-\beta)}{\pi^2 \Gamma(1+\beta)} F\left(\begin{matrix} 1/2+\beta; \\ 3+\beta, 1+2\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{4^{-3-\beta} m^6 (mr)^{2\beta} r^2 \Gamma(-3-\beta)}{\pi^2 \Gamma(1+\beta)} F\left(\begin{matrix} 3/2+\beta; \\ 4+\beta, 2+2\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{2^{-7+2\beta} m^6 (mr)^{-2\beta} r^2 \Gamma(-3+\beta)}{\pi^2 \Gamma(2-\beta)} F\left(\begin{matrix} 1-\beta, 3/2-\beta; \\ 3-2\beta, 2-\beta, 4-\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) + \\
 & \frac{2^{-5-2\beta} m^4 (mr)^{2\beta} \Gamma(-2-\beta)}{\pi^2 \Gamma(1+\beta)} F\left(\begin{matrix} \beta, 1/2+\beta; \\ 1+\beta, 3+\beta, 1+2\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{m^6 r^2}{384\pi^2 (-1+\beta^2)} F\left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 4, 2-\beta, 2+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{m^6 r^2}{384\pi^2 (-2+\beta)\beta} F\left(\begin{matrix} 1, 1, 3/2; \\ 2, 4, 3-\beta, 1+\beta; \end{matrix} m^2 r^2\right) - \\
 & \frac{8(-1+\beta)^2 \beta^2 (1+(-1+\beta)\beta) + 12(mr)^2 (-1+\beta)\beta (1+2(-1+\beta)\beta)}{192\pi^2 r^4 (-1+\beta)\beta} + \\
 & \frac{3(mr)^4 (-1+3(-1+\beta)\beta) + 6(mr)^4 (-1+\beta)\beta (\pi \operatorname{ctg}(\pi\beta) + \ln(4) - 2\ln(mr))}{192\pi^2 r^4 (-1+\beta)\beta} + \\
 & \frac{12(mr)^4 (-1+\beta)\beta \Psi(\beta)}{192\pi^2 r^4 (-1+\beta)\beta}.
 \end{aligned}$$

Здесь T_{00}^{ren} , T_{11}^{ren} , T_{22}^{ren} , T_{33}^{ren} это усредненные по вакууму значения соответствующих компонент тензора энергии импульса.

Приложение №2

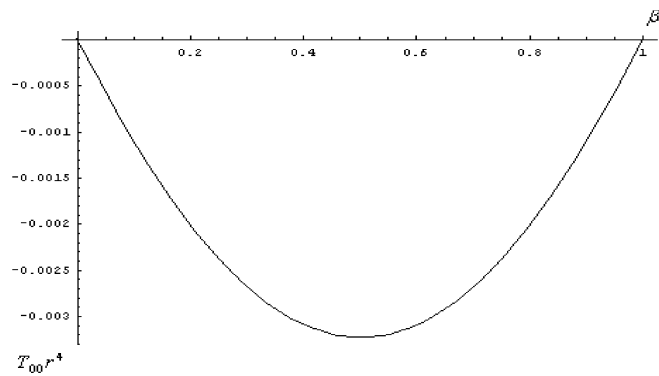


Рис. 1. Зависимость величины $T_{00} r^4$ от величины магнитного поля в соленоиде β при $mr = 1$

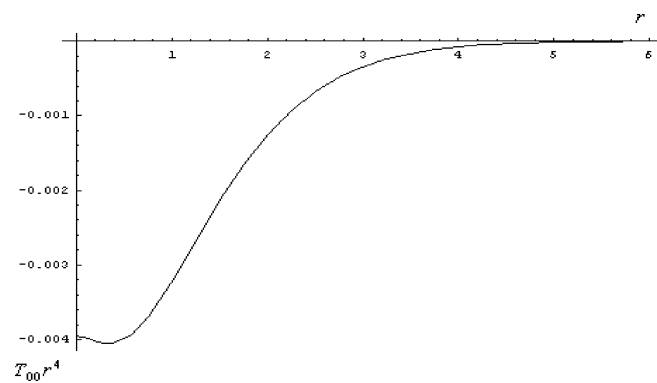


Рис. 2. Зависимость величины $T_{00} r^4$ от безразмерной массы скалярного поля $M = mr$ при $\beta = 1/2$