Математические
структуры и моделирование
2004, вып. 13, с. 53–61

УДК 517

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИКИ В СЛУЧАЕ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Н.Т. Копылова

In this article one problem of stability the non-stationary solution electrogasdynamics is presented.

В статье доказан факт стабилизации нестационарного решения задачи ЭГД к стационарному в норме пространства $W_2^1(0,1)$ при $t \to \infty$. При получении априорных оценок, независящих от величины T промежутка времени, на котором строится решение использовалась техника, разработанная А.В. Кажиховым [1].

Рассмотрим одномерную математическую модель ЭГД, описывающую двухкомпонентную среду, состоящую из нейтрального газа и ионов одного сорта при отсутствии внешнего магнитного поля [2].

$$\begin{gathered} \nu_t = u_x, \\ u_t = -p_x + (\frac{u_x}{\nu})_x + EE_x, \\ \theta_t = -pu_x + (\frac{\theta_x}{\nu})_x + \frac{u_x^2}{\nu} + b\nu E^2 E_x, \\ E_t = -bEE_x, \end{gathered} \tag{1}$$

$$p = \frac{\theta}{\nu},$$

где ν – удельный объем, p – давление, u – скорость, E – напряженность электрического поля, b – коэффициент подвижности заряженных частиц, θ – абсолютная температура.

В работе [3] была изучена корректность этой модели для конечного интервала времени $[0,T]$. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить оценки, равномерные по t. Сформулируем постановку задачи.

В области $Q = (0,1) \times (0,\infty)$ ищется решение системы уравнений (1). Решение удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, E(0,t) = 0, \theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0 \tag{2}$$

E-mail: Kopyl@alt.ru
Алтайский государственный технический университет

и начальным данным

$$u(x,0) = u_0(x), \nu(x,0) = \nu_0(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), E(x,0) = E_0(x). \qquad (3)$$

Функции $u_0(x)$, $\nu_0(x)$, $\theta_0(x)$, $E_0(x)$ считаются бесконечно дифференцируемыми, кроме того – строго положительные, ограниченные и

$$\int\limits_0^1 \nu_0(x)dx = 1,$$

$$\int\limits_0^1 (\theta_0(x) + \frac{u_0^2(x)}{2} + \frac{E_0^2(x)\nu_0(x)}{2})dx = 1. \qquad (4)$$

Стационарным решением системы (1), удовлетворяющим условиям (2), (3), является набор постоянных

$$\nu \equiv 1, \;\; u \equiv = 0, \;\; \theta \equiv = 1, \;\; E \equiv 0$$

.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Решение нестационарной задачи* (1)-(3) *существует при всех* $t > 0$ *и сходится к стационарному при неограниченном возрастании времени в норме пространства* $W_2^1(0,1)$.

Доказательство. Заметим, что выполняются тождества

$$\int\limits_0^1 \nu dx = 1,$$

$$\int\limits_1^1 (\theta + \frac{E^2\nu}{2} + \frac{u^2}{2})dx = 1, \forall t > 0,$$

$$\int\limits_0^1 [\frac{u^2}{2} + \frac{E^2\nu}{2} + (\theta - ln\theta - 1) + (\nu - ln\nu - 1)]dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 [\frac{u_x^2}{\theta\nu} + \frac{\theta_x^2}{\theta^2\nu} + \frac{bE_xE^2\nu}{\theta}]dxd\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 [\frac{u_0^2}{2} + \frac{E_0^2\nu_0}{2} + (\theta_0 - ln\theta_0 - 1) + (\nu_0 - ln\nu_0 - 1)]dx = const. \qquad (5)$$

Отсюда имеем первую априорную оценку, равномерную по t

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^1 [\frac{u^2}{2} + \frac{E^2\nu}{2} + (\theta - ln\theta - 1) + (\nu - ln\nu - 1)]dx +$$

$$+\int_0^\infty\int_0^1 [\frac{u_x^2}{\theta\nu}+\frac{\theta_x^2}{\theta\nu}+\frac{bE_xE^2\nu}{\theta}]dxdt \le C_0. \quad (6)$$

Изучим свойства функции E. Из [3] известно, что $bE_x \ge 0$ всюду в Q. Так как. $b > 0$, то $E_x \ge 0$ и напряженность возрастает по x. Значит, $\max\limits_{0\le x\le 1} E^2 = E^2(x,t)$.

Умножая четвертое уравнение в (1) на E и интегрируя по $\Omega = (0,1)$, имеем

$$\frac{d}{dt} \parallel E \parallel^2 + \int_0^1 bE_xE^2 = 0.$$

Отсюда получим равномерную оценку

$$\sup \parallel E \parallel^2 + \int_0^\infty\int_0^1 bE_xE^2dxdt \le c_1 \quad (7)$$

Интегрируя в (1) четвертое уравнение по x от 0 до 1, а затем по τ, выводим

$$\int_0^1 \max_{0\le x\le 1}\frac{E^2}{2}d\tau = \int_0^1 -\frac{1}{b}(E-E_0)dx.$$

Учитывая (6), заключаем, что

$$\max_{0\le x\le 1}\frac{E^2}{2} \in L_1(0,\infty). \quad (8)$$

Воспользуемся вспомогательной леммой, доказательство которой аналогично [1].

Лемма 1. *Существуют постоянные M_1 и m_1 такие, что $0 < m_1 \le \nu(x,t) \le M_1 < \infty$ для любых $x \in [0,1]$, $t \ge 0$.* ■

Получим оценки для производных от искомых функций. Умножим четвертое уравнение в (1) на E_{xx} и проинтегрируем по Ω

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel E_x \parallel^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 bE_x^3dx = -\frac{bEE_x^2}{2}|_{x=1} \le 0, \quad (9)$$

так как $bE \ge 0$ всюду в Q.

Интегрируя по t, имеем

$$\sup_{t>0} \parallel E_x \parallel^2 + \int_0^\infty\int_0^1 bE_x^3dxdt \le C_7. \quad (10)$$

Продифференцируем уравнение для E в по x дважды и умножим на E_{xx} и проинтегрируем по Ω

$$\frac{d}{dt} \parallel E_x \parallel^2 +5\int\limits_0^1 bE_xE_{xx}^2dxdt + bEE_{xx}^2|_{x=1} = 0.$$

Отсюда, интегрируя по t, получим

$$\sup_{t>0} \parallel E_{xx}^2 \parallel + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^1 bE_xE_{xx}^2dxdt \leq C_8.$$

Вычислим $E_x|_{x=0}$. Продифференцируем уравнение для E по x один раз и рассмотрим его при $x=0$

$$\frac{d}{dt}E_x|_{x=0} = -bE_x^2|_{x=0} \leq 0.$$

Следовательно,

$$E_x|_{x=0} \leq E_0'(0),$$
$$|E_x|_{x=0}| \leq C_9.$$

Заметим, что

$$|E_x| = |\int\limits_0^x E_{\xi\xi}d\xi + E_x|_{x=0}| \leq \parallel E_{xx} \parallel +C_9 \leq C_{10}.$$

Тогда $\max\limits_x |E_x| \leq C_{10}$, $\forall t > 0$. Введем вспомогательную функцию ω

$$\omega = \frac{u^2}{2} + \theta + \frac{E^2\nu}{2}.$$

Умножим первое уравнение в (1) на $\frac{E^2}{2}$, второе – на u, четвертое – на $E\nu$ и сложим вместе с третьим

$$\omega_t = (\frac{\theta_x}{\nu})_x + (\frac{uu_x}{\nu} - \frac{\theta u}{\nu} + \frac{E^2\nu}{2})_x.$$

Умножим это уравнение на ω, интегрируя по Ω, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel \omega \parallel^2 + \int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\nu} = \int\limits_0^1 [-\frac{\theta_x}{\nu}(2uu_x + EE_x\nu + \frac{E^2\nu_x}{2} - \theta u +$$

$$+\frac{E^2u\nu}{2}) + (EE_x\nu + \frac{E^2\nu}{2} + uu_x)\cdot(-\frac{E^2u}{2} + \frac{\theta u}{\nu} - \frac{uu_x}{\nu})]dx.$$

Оценим правую часть с помощью неравенств Юнга, Коши и простейших теорем вложения, используя предыдущие оценки

$$\frac{d}{dt} \parallel \omega \parallel^2 + \int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\nu} dx \le \delta \int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\nu} dx + C_\delta \int\limits_0^1 \frac{u^2 u_x^2}{\nu} +$$

$$+ C_{11}[\max_x E^2 \parallel (ln\nu)_x \parallel^2 + \max_x u^2 \parallel \omega \parallel^2 + \max_x E^2. \qquad (11)$$

Умножим второе уравнение в (1) на u^3 и проинтегрируем по Ω

$$\frac{1}{4}\frac{d}{dt} \parallel u \parallel_{L_4(0,1)}^4 + 3 \int\limits_0^1 \frac{u^2 u_x^2}{\nu} dx =$$

$$3 \int\limits_0^1 \frac{\theta u^2 u_x^2}{\nu} dx - \frac{3}{2} \int\limits_0^1 E^2 u^2 u_x^2 dx \le \frac{3}{2} \int\limits_0^1 \frac{u^2 u_x^2}{\nu} dx + 3 \int\limits_0^1 \frac{\theta^2 u^2}{\nu} dx + C_{12} \max_x E^2. \qquad (12)$$

Умножая (12) на $4C_\delta/3$, складывая с (11) и выбирая δ достаточно малым, имеем

$$\frac{d}{dt}(\parallel \omega \parallel^2 + \alpha \parallel u \parallel_{L_4(0,1)}^4) + \lambda \int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\nu} dx \le$$

$$\le C \max_x E^2 (\parallel (ln\nu)_x \parallel^2 + 1) + \max_x u^2 \parallel \omega \parallel^2 . \qquad (13)$$

Умножая второе уравнение в (1) на $(u - (ln\nu)_x)$ и интегрируя Ω по x, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u - (ln\nu)_x \parallel^2 + \int\limits_0^1 \frac{\theta}{\nu} (ln\nu)_x dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (EE_x u - EE_x (ln\nu)_x - \frac{\theta_x u}{\nu} + \frac{\theta \nu_x u}{\nu^2} + \frac{\theta_x}{\nu}(ln\nu)_x) dx. \qquad (14)$$

Оценим правую часть

$$\int\limits_0^1 |EE_x u| dx \le \frac{C_{10}}{2} (\max_x E^2 + \max_x u^2),$$

$$\int\limits_0^1 |EE_x (ln\nu)_x| dx \le \delta \int\limits_0^1 \frac{\theta}{\nu} (ln\nu)_x^2 dx + C_\delta \int\limits_0^1 \frac{E^2 E_x \nu}{\theta} dx,$$

$$\int\limits_0^1 |\frac{\theta_x u}{\nu} dx| \le \delta \int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\nu} dx + C_\delta \max_x u^2,$$

$$\int\limits_0^1 |\frac{\theta \nu_x u}{\nu}| dx \le \delta \int\limits_0^1 \frac{\theta}{\nu} (ln\nu)_x^2 dx + C_\delta \max_x u^2,$$

$$\int\limits_0^1 |\frac{\theta_x(ln\nu)_x}{\nu}|dx \leq \delta\int\limits_0^1 \frac{\theta(ln\nu)_x^2}{\nu}dx + C\delta\int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\theta^2\nu}dx + \delta_1\int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\nu}dx.$$

Складывая (13), (14) и выбирая δ, δ_1 достаточно малыми, получим неравенство

$$\frac{d}{dt}(\parallel \omega \parallel^2 + \alpha \parallel u \parallel^4_{L4(0,1)} + \parallel u-(ln\nu)_x \parallel^2) + \lambda_0\int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\nu}dx +$$

$$\lambda_1\int\limits_0^1 \frac{\theta}{\nu}(ln\nu)_x^2dx \leq C_{11}(\max_x E^2 + \max_x u^2 + \int\limits_0^1 \frac{\theta_x^2}{\theta^2\nu}dx +$$

$$\int\limits_0^1 \frac{E^2E_x\nu}{\theta}dx + \max_x u^2 \parallel \omega \parallel^2 + \max_x E^2 \parallel (ln\nu)_x \parallel^2).$$

Для функции

$$z = \parallel \omega \parallel^2 + \parallel u-(ln\nu)_x \parallel^2 + \alpha \parallel u \parallel^4_{L4(0,1)}$$

имеем дифференциальное равенство

$$\frac{dz}{dt} \leq Az + B,$$

$$A, B \in L_1(0,\infty).$$

Интегрируя по t, по лемме Гронуолла выводим $z \leq C_{12}$. Таким образом, имеем следующие оценки

$$\sup_{t>0} \parallel \theta \parallel^2 + \int\limits_0^\infty \parallel \theta_x \parallel^2 dt < C_{13}, \qquad (15)$$

$$\sup_{t>0} \parallel \nu_x \parallel + \int\limits_0^\infty \parallel \theta^{\frac{1}{2}}\nu_x \parallel^2 < C_{14}. \qquad (16)$$

Умножим второе уравнение в системе (1) на u и проинтегрируем по Ω

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \parallel u \parallel^2 + \int\limits_0^1 \frac{u_x^2}{\nu}dx = \int\limits_0^1 (-\frac{\theta_x u}{\nu} + \frac{\theta\nu_x u}{\nu^2} - E^2u_x)dx.$$

Оценим правую часть следующим образом

$$\int\limits_0^1 |\frac{\theta_x u}{\nu}|dx \leq C_{15} \parallel \theta_x \parallel^2 + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{u_x^2}{\nu}dx,$$

$$\int\limits_0^1 |\frac{\theta\nu_x u}{\nu^2}|dx \leq C_{16} \parallel \theta^{\frac{1}{2}}\nu_x \parallel^2 + C_{17}\max_x u^2,$$

$$\int\limits_0^1 |E^2 u_x| dx \le \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{u_x^2}{\nu} dx + C_{18} \max_x E^2.$$

Отсюда получим оценку

$$\sup_{t>0} \|u\|^2 + \int\limits_0^\infty \|u_x\|^2 dt \le C_{19}. \qquad (17)$$

Умножая второе уравнение в (1) на u_{xx} и интегрируя по Ω, заключаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 + \int\limits_0^1 \frac{u_{xx}^2}{\nu} dx = \int\limits_0^1 (\frac{\theta_x u_{xx}}{\nu} - \frac{\theta \nu_x u_{xx}}{\nu} + \frac{u_x \nu_x u_{xx}}{\nu^2} - E E_x u_{xx}) dx. \qquad (18)$$

Оценим интеграл справа с помощью неравенства Юнга с δ

$$\int\limits_0^1 |\frac{\theta_x u_{xx}}{\nu}| dx \le \delta \|u_{xx}\|^2 + C_\delta \|\theta_x\|^2,$$

$$\int\limits_0^1 |\frac{\theta \nu_x u_{xx}}{\nu^2}| dx \le \delta \|u_{xx}\|^2 + C_\delta (\|\theta_x\|^2 + \|\theta^{\frac{1}{2}} \nu_x\|^2)$$

так как в силу (5)

$$\theta^2 \le 2[\theta + \|\theta_x\|^2],$$

$$\int\limits_0^1 |\frac{u_x \nu_x u_{xx}}{\nu^2}| dx \le \delta \|u_{xx}\|^2 + C_\delta \|u_x\|^2,$$

$$\int\limits_0^1 |E E_x u_{xx}| dx \le \delta \|u_{xx}\|^2 + C_\delta \max_x E^2.$$

Выбирая δ достаточно малым и интегрируя по t, имеем

$$\sup_{t>0} \|u_x\|^2 + \int\limits_0^\infty \|u_{xx}\|^2 dt \le C_{20}. \qquad (19)$$

Умножая третье уравнение системы (1) на θ_{xx}, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_x\|^2 + \int\limits_0^1 \frac{\theta_{x\nu}^2}{\nu} dx = \int\limits_0^1 (\frac{\theta_x \theta_{xx} \nu_x}{\nu^2} + \frac{\theta u_x \theta_{xx}}{\nu} - \frac{u_x^2 \theta_{xx}}{\nu} - b\nu E_x E^2 \theta_{xx}) dx. \qquad (20)$$

Оценим правую часть аналогично (18)

$$\int_0^1 |\frac{\theta_x\theta_{xx}\nu_x}{\nu^2}|dx \leq \delta\|\theta_{xx}\|^2 + C_\delta\|\theta_x\|^2$$

$$\int_0^1 |\frac{\theta u_x\theta_{xx}}{\nu}|dx \leq \delta\|\theta_{xx}\|^2 + C_\delta\|u_x\|^2(1+\|\theta_x\|^2)$$

$$\int_0^1 |\frac{u_x^2\theta_{xx}}{\nu}|dx \leq \delta\|\theta_{xx}\|^2 + C_\delta\|u\|^4_{L_4(0,1)}$$

$$\int_0^1 |E_xE^2\theta_{xx}\nu|dx \leq \delta\|\theta_{xx}\|^2 + C_\delta \max_x E^2$$

С помощью неравенства $\max\limits_x u_x^2 \leq \|u_x\|\cdot\|u_{xx}\|$ из (20), выбирая δ достаточно малым, выводим

$$\frac{d}{dt}\|\theta_x\|^2 + \|\theta_{xx}\|^2 \leq C_{21}[\|\theta_x\|^2 + \max_x E^2 + \|u_x\|^2\cdot(1+\|\theta_x^2\| + \|u_{xx}\|^2)].$$

Интегрируя по t с учетом (15) и (19), заключаем

$$\sup_{t>0}\|\theta_x\|^2 + \int_0^\infty \|\theta_x\|^2 dt \leq C_{22}. \tag{21}$$

Из (18) и (20) так же следуют оценки

$$\int\int_0^\infty |\frac{d}{dt}\|u_x\|^2|dt \leq C_{23}, \quad \int_0^\infty |\frac{d}{dt}\|\theta_x\|^2|dt \leq C_{24}.$$

Вместе с (15) и (17) это означает, что

$$\|u_x(t)\| \to 0, \quad \|\theta_x(t)\| \to 0$$

при $t\to\infty$.

Верна также оценка

$$\int_0^\infty |\frac{d}{dt}\|\nu_x\|^2|dt \leq C_{24}.$$

Вместе с оценкой

$$\int_0^\infty \|\nu_x\|^2 dt \leq C_{25}$$

она дает $\|\nu_x(t)\| \to 0$ при $t\to\infty$.

Заметим, что из (9) следует

$$\frac{d}{dt}\|E_x\|^2 \leq 0.$$

Тогда оценим интеграл

$$\int\limits_0^\infty |\frac{d}{dt}\|E_x\|^2|dt = -\int\limits_0^\infty \frac{t}{dt}\|E_x\|^2 dt = -\lim_{a\to\infty}\|E_x\|^2|_{t=a} + \|E_0'(x)\|^2 \leq C_{26}.$$

Используя оценку (9) и уравнение для E, оценим интеграл

$$\int\limits_0^\infty \| E_x \|^2 \, dt = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 E_x^2 dxdt \leq \frac{1}{2}b \int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 E_x^3 dxdt + \frac{1}{2b}\int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 E_x dxdt \leq 2C_7$$

$$-\frac{1}{2b^2}\int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 \frac{dlnE}{dt} dxdt \leq 2C_7 - \frac{1}{2b^2}\int\limits_0^1 (\lim_{a\to\infty}(lnE|_{t=a}) - lnE_0(x))dx \leq$$

$$\leq C_{27}(1 + \|E\|) \leq C_{28}.$$

Таким образом,

$$\| E_x(t) \| \to 0$$

при $t \to \infty$.

В силу граничных условий для u, E, а также равенств (5) ясно, что сходимость имеет место к стационарному решению $u \equiv 0$, $\nu \equiv 1$, $\theta \equiv 1$, $E \equiv 0$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$. ∎

Литература

1. Антонцев С.Н., Кажихов А..В., Монахов В.Н.*Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* Новосибирск.: Наука, 1983.
2. Бортников Ю.С., Рубашов И.Б.*Электрогазодинамика.* М.: Атомиздат, 1971.
3. Файзуллина Н.Т. *Корректность краевой задачи электрогазодинамики для модели вязкого теплопроводного газа* // Динамика сплошной среды. 1990. Вып.97 С.135-148.