Математические структуры и моделирование
2004, вып. 13, с. 97–102

УДК 539.12:530.145

О РАССЛОЕНИЯХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ, ДОПУСКАЮЩИХ ВТОРОЙ ОПЕРАТОР ДИРАКА

В.В. Клишевич, Р.А. Кузякин

We consider Riemannian spaces where a second Dirac operator exists. In such spaces one can construct main bundle with a structure group and some specific bundles. The group of conjugations of Dirac operators is a structure group in the main bundle. Examples with the Minkowski space and one curved space are discussed.

Введение

Пусть $\mathcal{M}_4$ – четырехмерное гладкое многообразие класса C^∞ с метрикой g произвольной сигнатуры (g – симметричный тензор второго ранга) со связностью Леви-Чивита. Пара $(\mathcal{M}_4, g)$ называется (псевдо) римановым пространством. Мы рассматриваем оператор Дирака D в некоторой системе координат $\{x^i\}$ многообразия $\mathcal{M}_4$:

$$D \equiv \gamma^k P_k. \tag{1}$$

Здесь $P_k = \mathrm{i}(\nabla_k + \Gamma_k)$, ∇_k – оператор ковариантной производной, Γ_k – спинорная связность. Матрицы Дирака в римановых пространствах определяются как произвольное, но фиксированное решение системы $\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2g^{ij}(x)\widehat{E}_4$, где $\widehat{E}_4$ – единичная матрица, g^{ij} – метрический тензор.

Второй оператор Дирака определяется следующими соотношениями:

$$L^2 = D^2, \quad L \neq D, \quad [D, L] = 0. \tag{2}$$

Как показано в работе [1] среди операторов симметрии для оператора Дирака таким свойством может обладать только оператор вида:

$$L = \overset{*}{\gamma}_j f^{kj} P_k. \tag{3}$$

Здесь $\overset{*}{\gamma}_i = -\frac{1}{3!} e_{ijkl}\gamma^j\gamma^k\gamma^l$. Тензорное поле в операторе (3) антисимметрично и ковариантно постоянно

$$f_{ij;k} = 0, \quad f_{ij} + f_{ji} = 0, \tag{4}$$

и называется *тензорным полем Яно-Киллинга.*

E-mail: klishe@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Как показано в статье [2], из существования оператора L со свойством (2) (и необязательно с условием коммутрирования), вытекает существование невырожденной матрицы S, которая удовлетворяет условию

$$SL = DS. \tag{5}$$

В данной статье мы рассмотрим некоторые следствия условий (5).

1. Группа сопряжений операторов Дирака

Отметим свойства матриц S из уравнения (5), которые подробно доказаны в работе [3].

- Матрицы S образуют группу G; на матрицы накладывается дополнительное условие $\det(S) = 1$;
- Группа G не зависит от выбора тетрады;
- Группа G не зависит от выбора системы координат.

Определение 1. *Группа G называется группой сопряжений операторов Дирака. Мы также говорим, что многообразие $\mathcal{M}_4$ допускает группу G.*

Следствие 1. *Если два римановых многообразия $\mathcal{M}_4$ и $\mathcal{N}_4$ диффеоморфны, то группы сопряжений $G_{\mathcal{M}_4}$ и $G_{\mathcal{N}_4}$ операторов Дирака этих многообразий изоморфны.* ■

Группа G есть некоторый инвариант риманова многообразия.

2. Главное расслоение и расслоения $\xi^{\pm}$

Предположим, что риманово многообразие $\mathcal{M}_4$ допускает группу сопряжений операторов Дирака G. Рассмотрим тройку

$$\xi = (\mathcal{M}_4 \times G, \pi, \mathcal{M}_4). \tag{6}$$

Лемма 1. *ξ является главным расслоением со структурной группой G и базой $\mathcal{M}_4$.* ■

Доказательство. Проекция расслоения π действует по формуле $\pi(x, g) = x$, $x \in \mathcal{M}_4$, $g \in G$. Произведение $\mathcal{M}_4 \times G$ является правым G-пространством относительно действия $(x, g)h = (x, gh)$, $x \in \mathcal{M}_4$, $g, h \in G$. ■

Отметим, что расслоения вида (6) называются тривиальными главными расслоениями [4].

В этой статье будем рассматривать случай, когда группа G содержит бесконечное число элементов и в таком случае, как показано в [3], автоматически является группой Ли. Известны примеры, когда группа G конечна (дискретна) [3].

Пусть X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ – генераторы группы G. Рассмотрим условие вида

$$[D, e^{-tX} D e^{tX}] = 0, \tag{7}$$

здесь $tX = t_1X_1 + \ldots + t_nX_n$, t_k – действительные параметры. Это условие на параметры t_k задает замкнутую поверхность σ_- в $\mathbb{R}^n$. По теореме Уитни [5] поверхность σ_- можно задать уравнением $f_-(t_1, \ldots, t_n) = 0$, где f_- – бесконечно-дифференцируемая функция. Рассмотрим условие вида

$$\{D, e^{-tX}De^{tX}\} = 0, \tag{8}$$

тогда получим поверхность σ_+, которая задается функцией $f_+(t_1, \ldots, t_n) = 0$.

Свяжем с каждой точкой многообразия $\mathcal{M}_4$ поверхность σ_-, в этом случае получим расслоение ξ^-. Аналогично, если свяжем с каждой точкой многообразия $\mathcal{M}_4$ поверхность σ_+, получим расслоение ξ^+. Таким образом

$$\xi^{\pm} = (\mathcal{M}_4 \times \sigma_{\pm}, \pi, \mathcal{M}_4). \tag{9}$$

Проекция π действует по формуле $\pi(x, s) = x$, $x \in \mathcal{M}_4$, $s \in \sigma_{\pm}$. В общем случае неизвестно, как группа G действует в слоях нашего расслоения.

Как показано в работе [3] для пространства Минковского поверхности $\sigma_{\mp}$ в $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ распадаются на две независимые последовательности сфер, а группа G есть группа $SO(4)$. Поскольку $SO(4) = SO(3) \times SO(3)$, то подгруппы $SO(3)$ действуют транзитивно на каждой сфере. В данной работе мы вычислим расслоения $\xi^{\pm}$ (слои) для искривленного пространства, которое рассматривалось в работе [6].

3. Пример расслоения искривленного пространства

Рассмотрим риманово пространство с линейным элементом

$$ds^2 = x^1 dx^{1^2} + \frac{4x^{1^2} + x^{3^2}}{4x^1} dx^{2^2} - \frac{x^2x^3}{2x^1} dx^2dx^3 + \frac{x^3}{x^1} dx^2dx^4 + \frac{4x^{1^2} + x^{2^2}}{4x^1} dx^{3^2} + \frac{dx^{4^2}}{x^1}. \tag{10}$$

Метрика (10) является частным случаем метрики (32.4) из монографии А.З. Петрова [7, стр.284] при $a_{11} = cx^{4^{2/3}}$, $a_{22} = 4e_4c^2x^{4^{-2/3}}/9$, $e_4 = \pm 1$. Если в метрике Петрова сделать замену координат $x^{1'} = cx^{4^{2/3}}$, $x^{2'} = x^3$, $x^{3'} = -x^1$, $x^{4'} = -x^2 - x^1x^3/2$, $c^3 = 9e_4/4$, мы получим (10). Метрика (10) была независимо найдена Нюровским и Прзановским в работе [8]. Отметим, что (10) удовлетворяет вакуумным уравнениям Эйнштейна, является почти кэлеровым и некэлеровым пространством.

Операторы Дирака в пространстве (10) были построены в работе [6]. Поскольку эти операторы имеют довольно громоздкий вид, в данной статье они не приводятся. Общее число вторых операторов Дирака три и они образуют антикоммутативный набор. В общем случае матрица вида (5) имеет следующий вид:

$$S = (\lambda/2)[\widehat{E}_4 + \mathrm{i}\widehat{\gamma} - a_1(\widehat{\gamma}^{13} - \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{24}) + a_2(\widehat{\gamma}^{12} + \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{34}) + a_3(\widehat{\gamma}^{14} + \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{23})]. \tag{11}$$

Параметр λ определяется из условия $\det(S) = 1$ и принимает значение $\lambda = e_1 \exp(e_2\mathrm{i}\pi/4)$, $e_1 = \pm 1$, $e_2 = \pm 1$. Числа a_1, a_2, a_3 – действительные параметры, на которые наложено условие $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Поскольку матрица S неисключительная ($\det(\widehat{E}_4 + S) \neq 0$), мы применим к ней преобразование Кэли ($S^\sharp = (\widehat{E}_4 - S)(\widehat{E}_4 + S)^{-1}$) и вычислим алгебру Ли нашей группы. Вычисления приводят к следующим результатам (мы придаем поочередно параметрам a_k в матрице (11) значения $a_1 = \pm 1$, $a_2 = a_3 = 0$; $a_2 = \pm 1$, $a_1 = a_3 = 0$; $a_3 = \pm 1$, $a_1 = a_2 = 0$; кроме того, мы добавляем к рассматриваемому множеству матриц матрицу $S_0 = \widehat{\gamma}$):

$$\begin{array}{rcl}
S_0^\sharp &=& -\widehat{\gamma};\\
S_1^\sharp &=& e_2[e_1 \mathrm{i}\sqrt{2}\widehat{E}_4 - q(\widehat{\gamma} - \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{12} - \widehat{\gamma}^{34})]/(2p);\\
S_2^\sharp &=& e_2[e_1 \mathrm{i}\sqrt{2}\widehat{E}_4 - q(\widehat{\gamma} + \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{12} + \widehat{\gamma}^{34})]/(2p);\\
S_3^\sharp &=& e_2[e_1 \mathrm{i}\sqrt{2}\widehat{E}_4 - q(\widehat{\gamma} + \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{13} - \widehat{\gamma}^{24})]/(2p);\\
S_4^\sharp &=& e_2[e_1 \mathrm{i}\sqrt{2}\widehat{E}_4 - q(\widehat{\gamma} - \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{13} + \widehat{\gamma}^{24})]/(2p);\\
S_5^\sharp &=& e_2[e_1 \mathrm{i}\sqrt{2}\widehat{E}_4 - q(\widehat{\gamma} - \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{14} - \widehat{\gamma}^{23})]/(2p);\\
S_6^\sharp &=& e_2[e_1 \mathrm{i}\sqrt{2}\widehat{E}_4 - q(\widehat{\gamma} + \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{14} + \widehat{\gamma}^{23})]/(2p).
\end{array}$$

Здесь $p = 1 + e_1\sqrt{2}$, $q = p + 1$. Выбирая линейно-независимые матрицы среди $S_k^\sharp$, $k = 0, 1, \ldots, 6$, коммутационные соотношения приведем к виду

$$[X_1, X_2] = X_3; [X_2, X_3] = X_1; [X_3, X_1] = X_2.$$

Группа G представляет собой локально группу вращений $SO(3)$. Генераторы X_k, $k = 1, 2, 3$ имеют следующий явный вид

$$\begin{array}{rcl}
X_1 &=& -\dfrac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_z & -\widehat{\sigma}_z \\ -\widehat{\sigma}_z & \widehat{\sigma}_z \end{pmatrix};\\
X_2 &=& +\dfrac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_y & -\widehat{\sigma}_y \\ -\widehat{\sigma}_y & \widehat{\sigma}_y \end{pmatrix};\\
X_3 &=& -\dfrac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix} \widehat{\sigma}_x & -\widehat{\sigma}_x \\ -\widehat{\sigma}_x & \widehat{\sigma}_x \end{pmatrix}.
\end{array}$$

Здесь $\widehat{\sigma}_x, \widehat{\sigma}_y, \widehat{\sigma}_z$ – матрицы Паули.

Пусть t_1, t_2, t_3 – произвольные действительные параметры. Матрица e^{tX}, $tX = t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3$ имеет следующий вид:

$$\begin{array}{rcl}
e^{tX} &=& \dfrac{1}{2}\left[\cos(\theta) + 1\right]\widehat{E}_4 + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\left[-\cos(\theta) + 1\right]\widehat{\gamma} + \\
&& \dfrac{1}{2}[t_1(\widehat{\gamma}^{14} + \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{23}) - t_2(\widehat{\gamma}^{13} - \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{24}) + t_3(\widehat{\gamma}^{12} + \mathrm{i}\widehat{\gamma}^{34})]\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}.
\end{array}$$

Здесь введено сокращение $\theta = \frac{1}{2}\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}$. С точностью до множителя эта матрица включает в себя матрицу (11).

Поверхности $\sigma_\mp$ из условий (7), (8) для пространства (10) задаются уравнениями:

$$\sigma_- : \quad \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}\right) = 0;$$

$$\sigma_+ : \quad \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}\right) = 0.$$

Таким образом поверхности $\sigma_{\mp}$ в $\mathbb{R}^3$ представляют собой последовательности сфер

$$\begin{aligned} \sigma_- : \quad & t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 4\pi^2 n^2; \\ \sigma_+ : \quad & t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 4\pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2; \\ & n = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

причем, расстояние между любыми двумя соседними поверхностями σ_+ и σ_- не зависит от n и равно π. В отличие от плоского пространства таких последовательностей по одной.

Отметим, что вопрос о нахождении точных решений уравнения Дирака (даже с внешними полями) в пространстве Минковского неявно с учетом второго оператора Дирака рассмотрен в статье [9]. Данные результаты можно перенести на искривленное пространство (10).

Близкие конструкции типа (5) для скалярных уравнений рассматривались в работе Фейгина [10].

4. Заключение

В данной статье показано, что в римановом пространстве с условием (4) естественным образом можно определить главные расслоения со структурной группой, а также расслоения некоторого специального типа. Структурная группа в расслоении представляет собой группу сопряжений операторов Дирака на заданном многообразии и является глобальной калибровочной группой. Согласно теории объединения полей для описания конкретного поля в расслоении необходимо связать с каждой точкой базисного многообразия одну точку слоя. Набор всех таких точек в расслоении называется сечением расслоения; сечение эквивалентно некоторому полю. Отметим, что электромагнитные поля можно ввести стандартным образом, как это делается в физике. В операторах Дирака (1), (3) сделаем замену $P_k \to P_k + A_k$, здесь A_k – векторный потенциал. Поля A_k, которые сохраняют условие (2), назовем допустимыми полями. Класс таких полей согласован (объединен) с гравитационным полем в расслоениях $\xi^{\pm}$. Нахождение такого класса электромагнитных полей для метрики (10), а также в общем случае будет предметом дальнейших исследований авторов.

Литература

1. Клишевич В.В., Должин М.В. *О классификации римановых пространств, допускающих второй оператор Дирака.* 2001. Вестник Омского университета. Физика. N1. С.21-22.
2. Klishevich V.V. *On the existence of the second Dirac operator in Riemannian space.* 2000. Class.Quantum Grav. **17**. N.2. P.305-318.
3. Klishevich V.V. *Group conjugations of Dirac operators as an invariant of Riemannian manifold.* 2002. Class. Quantum Grav. **19**. N.16. P.4287-4300.

4. Постников М.М. *Дифференциальная геометрия.* М.: Наука, 1988.
5. Постников М.М. *Гладкие многообразия.* М.: Наука, 1988.
6. Klishevich V.V. *Exact solution of Dirac and Klein-Gordon-Fock equations in a curved space admitting a second Dirac operator.* 2001. Class. Quantum Grav. **18**. N.17. P.3735-3752.
7. Петров А.З. *Пространства Эйнштейна.* М.: Наука, 1961.
8. Nurowski P. and Przanowski M. 1999 *A four-dimensional example of a Ricci flat metric admitting almost-Kahler non-Kahler structure.* Class. Quantum Grav. **16**. N3. L.9-L.13.
9. Bagrov V.G., Baldiotti M.C., Gitman D.M. and Shirokov I.V. 2002. *New solutions of relativistic wave equations in magnetic fields and longitudinal fields.* J. Math. Phys. **43**. N.5. P.2284-2305.
10. Фейгин М.В. *Сплетающие соотношения для сферических частей обобщенных операторов Калоджеро.* 2003. ТМФ. **135**. N.1. C.55-69.