Математические структуры и моделирование
2004, вып. 13, с. 30–38

УДК 519.8

ОДНА МОДЕЛЬ САМОРЕГУЛИРУЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

С.Н. Астраков, А.И. Ерзин

In this article a system of interactive elements is investigated. The interrelation of two elements may be presented by the edge in a given graph and depends on the quantity of resources directed from one to another. Depends on the distribution of limited amount of resources among the incident arcs and of strategy of elements the quality of the relations can be evaluated. In this paper we consider the case, when the valuation function reflects the threat from the neighbors, and a strategy of resource redistribution aim at minimization of maximum threat from the adjacent elements. The system evolution is investigated. An effective approach to find limiting and balanced state is proposed. In the case of complete graph the analytical representation for these states is found.

Введение

Исследованию свойств различных развивающихся систем посвящен целый ряд работ [1–6]. Когда известны стратегии элементов системы, тогда основным направлением исследований является изучение поведения системы в течение времени. Существует ли у системы предельное состояние? Является ли оно единственным? Среди состояний системы особо выделяются равновесные состояния. Это такие состояния, которые устраивают все элементы системы, несмотря на противоположность их интересов. В игровых постановках элементы с разными интересами часто называют игроками, а состояние равновесия – равновесием по Нэшу [1, 7]. В экономических системах понятие равновесия является одним из ключевых и ему посвящено множество работ, среди которым отметим [4, 7, 8]. Исследованием равновесных состояний занимаются также при изучении саморазвивающихся систем [3, 5–7, 9]. Одним из приложений последнего направления является исследование моделей теории конфликтов [9, 11, 12, 14]. В таких моделях от элементов, которые могут быть представлены вершинами графа, может исходить угроза соседям, степень которой зависит от величины выделенного на соответствующее ребро ресурса. В данной работе мы фиксируем

E-mail: astra@kemcity.ru, adil@math.nsc.ru
Кемеровский филиал РГТЭУ; Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Работа поддержана грантом РФФИ №02-01-00977

стратегии участников игры и исследуем в какое предельное состояние попадет система при своем развитии без вмешательства извне. В частности, исследуется вопрос поиска равновесного по Нэшу предельного состояния. Аналогичные исследования проводились в работах [12,13,15]. Так в [12] для частного случая функции оценки взаимоотношения сторон найдено необходимое и достаточное условие существования равновесия, которое может быть найдено путем решения системы линейных неравенств. В данной работе предложен итерационный метод, реализующий стратегии элементов системы, который позволяет аналитически выписать предельные и равновесные состояния, зависящие лишь от начального распределения ресурсов элементов.

1. Постановка проблемы и основные предположения

Рассмотрим систему S, некоторые элементы которой взаимодействуют друг с другом путем перераспределения своего ресурса (потенциала) направленного на соседей. Каждому элементу $i = 1, \ldots, n$ из S поставим в соответствие вершину $i \in V = \{1, 2, \ldots, n\}$ графа $G = (V, E)$, который назовем графом взаимоотношений. В этом графе дуга $(i, j) \in E$ существует лишь в том случае, если элемент i взаимодействует с элементом j. Суть этого взаимодействия зависит от области приложения рассматриваемой модели. Если рассматриваемая область – экономика, то взаимодействием может быть экономическое сотрудничество или конкуренция, а ресурс можно оценить по экономическому потенциалу страны. Если изучается военная область, то под взаимодействием можно понимать возможность военного конфликта между соответствующими странами- элементами, а ресурс страны есть его военный потенциал.

С каждой дугой $(i, j) \in E$ свяжем функцию $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$, которая численно оценивает взаимоотношения элементов i и j с точки зрения элемента i. В функциях $c_{ij}(x, y)$ переменная x характеризует количество ресурса i-го элемента, направленного на элемент j, а y – количество ресурса элемента j, направленного на элемент i. Если предположить, что функция $c_{ij}(x, y)$ отражает преимущество элемента j над элементом i, то естественно считать, что каждый элемент i стремится минимизировать максимальное преимущество соседей над ним на основе решения следующей задачи.

$$\max_{j|(i,j)\in E} c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) \longrightarrow \min_{\{x_{ij}\}}; \tag{1}$$

$$\sum_{j\in V_i} x_{ij} \leq q_i; \tag{2}$$

$$x_{ii} = 0;\ x_{ij} = 0,\ (i, j) \notin E, \tag{3}$$

Здесь V_i – множество смежных с i вершин, q_i – потенциал (ресурс) i-го элемента (вершины), а величины x_{ji} на момент решения задачи (1)-(3) следует считать известными.

Если предположить, что взаимоотношения в системе меняются с течением времени, и каждый элемент системы перераспределяет свой ресурс, опираясь на текущее распределение направленных на него ресурсов, то можно считать такую систему саморегулирующейся. В связи с этим возникает проблема описания изменений взаимоотношений в системе.

2. Свойства модели

Величину x_{ij} назовем весом дуги (i, j).

Определение 1. Состояние (набор весов $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющий условиям (2)-(3)), при котором $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = c_{ji}(x_{ji}, x_{ij})$ для всех $(i, j) \in E$, будем называть состоянием равновесия сил.

Очевидно, состояние равновесия существует не во всех случаях. В работе [2] рассмотрен вопрос о существовании равновесия в случае, когда функции $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ji} - x_{ij}$. Там сформулированы необходимые и достаточные условия существования равновесия $x_{ij} = x_{ji}$ (или $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = 0$), которое может быть найдено в результате решения системы линейных неравенств, количество неравенств в которой равно числу независимых множеств графа. Пусть в дальнейшем $c_{ij}(x, y) = y - x$, $x_{ij}^{(k)}$ – вес дуги (i, j) на временном шаге k и $x_{ij}^{(k)} = 0$ для всех $(i, j) \notin E$ (в частности, $x_{ii}^{(k)} = 0$). Для произвольного шага развития системы $k = 0, 1, \ldots$ обозначим через $p_i^{(k)} = \sum\limits_{j \in V_i} x_{ji}^{(k)}$ – суммарный потенциал (ресурс), направленный на элемент i, а через $q_i^{(k)} = \sum\limits_{j \in V_i} x_{ij}^{(k)}$ – суммарный потенциал вершины i, который распределен по инцидентным дугам графа на шаге k.

Процесс преобразования состояний системы S по времени (шагам) $k = 0, 1, \ldots$ определим рекуррентными соотношениями:

$$x_{ij}^{(k+1)} = x_{ji}^{(k)} - f_i^{(k)},\ f_i^{(k)} = \frac{p_i^{(k)} - q_i^{(k)}}{d_i},\ (i, j) \in E;\ x_{ii}^{(k)} = 0;\ x_{ij}^{(k)} = 0,\ (i, j) \notin E, \quad (4)$$

где d_i – степень вершины $i = 1, \ldots, n$. Нетрудно заметить, что такое определение весов дуг инцидентных вершине i эквивалентно решению задачи (1)-(3), в которой ограничение (2) является равенством (т.е. весь потенциал вершины распределяется по инцидентным дугам).

Таким образом, определяется последовательность состояний $\{X^{(k)}\}$, $k = 0, 1, \ldots$, свойства которой будут изучаться ниже.

Определение 2. Для каждого шага k определим следующие понятия:
$F^{(k)} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)})$ – вектор сил стабилизации;
$P^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \ldots, p_n^{(k)})$ – вектор противостояния.

Лемма 1. *Для всех векторов $F^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$ выполняются соотношения*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i f_i^{(k)} = 0. \quad (5)$$

Доказательство. По определению $d_i f_i^{(k)} = p_i f_i^{(k)} - q_i f_i^{(k)}$. Кроме того, из условия распределения каждой вершиной *всего* своего ресурса, следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} q_i^{(k)} = C = \mathrm{const}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i f_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} - \sum_{i=1}^{n} q_i^{(k)} = C - C = 0.$$

■

Лемма 2. *В результате преобразований (4) потенциал $q_i^{(k)}$ любого элемента i остается неизменным. То есть. $q_i^{(0)} = q_i^{(1)} = \cdots = q_i^{(k)} = q_i,\ i = 1, \ldots, n.$*

Доказательство. Справедлива следующая очевидная цепочка равенств

$$q_i^{(k+1)} = \sum_{j \in V_i} x_{ij}^{(k+1)} = \sum_{j \in V_i} (x_{ji}^{(k)} - f_i^{(k)}) = \sum_{j \in V_i} x_{ji}^{(k)} - d_i f_i^{(k)} = p_i^{(k)} - d_i f_i^{(k)} = q_i^{(k)},$$

которая и доказывает лемму. ■

Следствие 1. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in V_i} f_j^{(k)} = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Так как потенциал произвольной вершины $q_i^{(k)}$ не меняется, то верхний индекс можно опустить. Поэтому

$$d_i f_i^{(k)} = p_i^{(k)} - q_i = \sum_{j \in V_i} (x_{ji}^{(k)} - x_{ij}^{(k)}) = \sum_{j \in V_i} (x_{ij}^{(k-1)} - f_j^{(k-1)}) - \sum_{j \in V_i} x_{ij}^{(k-1)} = -\sum_{j \in V_i} f_j^{(k-1)}.$$

Просуммировав полученные равенства $d_i f_i^{(k)} = -\sum\limits_{j \in V_i} f_j^{(k-1)}$ по $i = 1, \ldots, n$, с учетом (5), получим (6). ■

3. Полный граф взаимоотношений

Пусть G полный граф, и состояние системы характеризуется начальным набором весов

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12}^{(0)} & \cdots & x_{1n}^{(0)} \\ x_{21}^{(0)} & 0 & \cdots & x_{2n}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}^{(0)} & x_{n2}^{(0)} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *Для произвольного $i = 1, \ldots, n$ последовательность $\{f_i^{(k)}\}$, $k = 0, 1, \ldots$ является сходящейся геометрической прогрессией со знаменателем $g = 1/(n-1)$.*

Доказательство. Раз степени всех вершин одинаковы и равны $|V_i| = n - 1$, то равенство $d_i f_i^{(k)} = -\sum\limits_{j \in V_i} f_j^{(k-1)}$ перепишется в виде

$$(n-1) f_i^{(k)} = -\sum_{j \neq i} f_j^{(k-1)}.$$

С другой стороны из (5) имеем, что

$$f_i^{(k-1)} = -\sum_{j \neq i} f_j^{(k-1)},$$

откуда следует утверждение леммы $f_i^{(k)} = \frac{1}{n-1} f_i^{(k-1)}$. ■

Следствие 2. *Имеют место следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{k \to \infty} F^{(k)} = \lim_{k \to \infty} (f_1^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}) = (0, \ldots, 0);$$

$$\lim_{k \to \infty} P^{(k)} = \lim_{k \to \infty} (p_1^{(k)}, \ldots, p_n^{(k)}) = (q_1, \ldots, q_n).$$

■

Приведенные выше результаты позволяют исследовать свойства предельных состояний и находить устойчивые состояния системы S.

Определение 3. Под устойчивым состоянием системы S будем понимать такое распределение ресурсов $X = (x_{ij})$, которое не меняется в результате преобразований (4).

Теорема 1. *Последовательность $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots$ определяет два предельных состояния: четное X_e^* и нечетное X_o^* , удовлетворяющих соотношениям:*
(a) $X_e^* = \lim\limits_{k \to \infty} X^{(2k)} = X^*$; $X_o^* = \lim\limits_{k \to \infty} X^{(2k+1)} = (X^*)^T$;
(b) предельные элементы матрицы весов X^* определяются явно через начальные условия:

$$x_{ij}^* = x_{ij}^{(0)} - f_i^{(0)} \frac{n-1}{n(n-2)} - f_j^{(0)} \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение (b). По Лемме 3

$$F^{(k)} = (f_1^{(k)}, \ldots, f_n^{(k)}) = \frac{1}{(n-1)^k} (f_1^{(0)}, \ldots, f_n^{(0)}).$$

Из (4) $x_{ij}^{(k+1)} = x_{ji}^{(k)} - f_i^{(k)}$ и $x_{ji}^{(k)} = x_{ij}^{(k-1)} - f_j^{(k-1)}$. Значит после двух преобразований (4) получим

$$x_{ij}^{(2)} = x_{ij}^{(0)} - f_j^{(0)} - f_i^{(1)} = x_{ij}^{(0)} - f_j^{(0)} - \frac{1}{n-1} f_i^{(0)}.$$

После $2k$ шагов имеем

$$x_{ij}^{(2k)} = x_{ij}^{(0)} - f_j^{(0)}(1 + g + g^2 + \cdots + g^k) - \frac{1}{n-1} f_i^{(0)}(1 + g + g^2 + \cdots + g^k),$$

где $g = \frac{1}{(n-1)^2}$. Переходя к пределу, получаем:

$$x_{ij}^* = \lim_{k\to\infty} x_{ij}^{(2k)} = x_{ij}^{(0)} - f_j^{(0)} \frac{1}{1-g} - \frac{1}{n-1} f_i^{(0)} \frac{1}{1-g} =$$

$$= x_{ij}^{(0)} - f_j^{(0)} \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2 - 1} - f_i^{(0)} \frac{n-1}{(n-1)^2-1} = x_{ij}^{(0)} - \frac{n-1}{n(n-2)}[(n-1)f_j^{(0)} + f_i^{(0)}].$$

Докажем (a). Так как $X_e^* = X^*$, то первая часть утверждения доказана. Покажем, что $X_o^* = (X^*)^T$. Это можно сделать, вычислив $x_{ij}^{(2k+1)}$ и перейдя к пределу. Из (4) $x_{ij}^{(2k+1)} = x_{ji}^{(2k)} - f_i^{(2k)}$. Учитывая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ji}^{(2k)} = x_{ji}^*$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f_i^{(k)} = 0$, получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ij}^{(2k+1)} = x_{ji}^* - \lim\limits_{k\to\infty} f_i^{(2k)} = x_{ji}^*$.
Теорема доказана полностью. ■

Теорема 2. *Множество состояний системы S с фиксированными потенциалами элементов (вершин) $(q_1, \ldots, q_n)$ всегда имеет устойчивое состояние $\overline{X} = \frac{1}{2}(X^* + X^{*T})$ и веса вычисляются по формулам*

$$\overline{x}_{ij} = \frac{1}{2}(x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2}\frac{n-1}{n-2}(f_i^{(0)} + f_j^{(0)}).$$

Доказательство. Учитывая утверждение (a) Теоремы 1, устойчивость состояния очевидна. Докажем приведенные формулы. Согласно (b) Теоремы 1, получаем:

$$\overline{x}_{ij} = \frac{1}{2}(x_{ij}^* + x_{ji}^*) = \frac{1}{2}(x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2}\left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)} + \frac{n-1}{n(n-2)}\right)(f_i^{(0)} + f_j^{(0)}) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2}\frac{n-1}{n-2}(f_i^{(0)} + f_j^{(0)}).$$

Теорема доказана. ■

3.1. Случай $n = 3$

Рассмотрим особенности поведения системы при некоторых значениях n. В первую очередь нас будет интересовать зависимость предельных и устойчивых состояний от начальных условий, а также число степеней свободы этих состояний. Рассмотрим модель при $n = 3$. По Теореме 2 элементы матрицы $\overline{X}$, определяющей устойчивое состояние, имеют вид:

$$\overline{x}_{ij} = \frac{1}{2}(x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2}\frac{n-1}{n-2}(f_i^{(0)} + f_j^{(0)}) = \frac{1}{2}(x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2}(p_j^{(0)} - q_j + p_i^{(0)} - q_i) =$$

$$= \frac{1}{2}(q_i + q_j + x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)} - x_{ij}^{(0)} - x_{lj}^{(0)} - x_{ji}^{(0)} - x_{li}^{(0)}) =$$

$$= \frac{1}{2}(q_i + q_j - x_{lj}^{(0)} - x_{li}^{(0)}) = \frac{1}{2}(q_i + q_j - q_l),$$

где $l \neq i, j$.

С учетом последнего сформулируем

Следствие 3. *При $n = 3$ модель имеет устойчивое состояние, определяющееся через потенциалы q_1, q_2, q_3:*

$$\overline{X} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (q_1 + q_2 - q_3) & (q_1 + q_3 - q_2) \\ (q_1 + q_2 - q_3) & 0 & (q_2 + q_3 - q_1) \\ (q_1 + q_3 - q_2) & (q_2 + q_3 - q_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Рассмотрим предельное состояние X^*. Можно положить $x_{ij}^* = \overline{x}_{ij} - \varepsilon$ и $x_{ji}^* = \overline{x}_{ij} + \varepsilon$, где $\varepsilon = \overline{x}_{ij} - x_{ij}^*$. Заметим, что приведенные соотношения верны для любой пары индексов $i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j$, т.е. ε не зависит от индексов. Действительно, $x_{ij}^* = q_i - x_{il}^*$, $\overline{x}_{ij} = q_i - \overline{x}_{il}$ и, как следствие, $\varepsilon = \overline{x}_{ij} - x_{ij}^* = q_i - \overline{x}_{il} - q_i + x_{il}^* = x_{il}^* - \overline{x}_{il}$. То есть $x_{il}^* = \overline{x}_{il} + \varepsilon$. Нетрудно показать также, что $x_{li}^* = \overline{x}_{li} - \varepsilon,\ x_{jl}^* = \overline{x}_{jl} - \varepsilon$ и $x_{lj}^* = \overline{x}_{lj} + \varepsilon$.

Тем самым доказано

Следствие 4. *При $n = 3$ матрица X^*, определяющая предельное состояние, зависит от одного параметра и имеет вид:*

$$X^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\overline{x}_{12} - \varepsilon) & (\overline{x}_{13} + \varepsilon) \\ (\overline{x}_{12} + \varepsilon) & 0 & (\overline{x}_{23} - \varepsilon) \\ (\overline{x}_{13} - \varepsilon) & (\overline{x}_{23} + \varepsilon) & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

■

Можно считать ε отклонением предельного состояния X^* от устойчивого состояния $\overline{X}$. В связи с этим возникают два естественных вопроса:
(1) Как зависят предельные состояния от начальных условий?
(2) При каких начальных условиях $X^{(0)}$ предельное состояние будет устойчивым, т.е. $\varepsilon = 0,\ X^* = \overline{X}$?

Учитывая, что суммы элементов строк матрицы $X^{(0)}$ являются потенциалами вершин, начальное состояние в общем случае зависит от трех параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и представимо в виде:

$$X^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (q_1 - \varepsilon_1) & (q_1 + \varepsilon_1) \\ (q_2 + \varepsilon_2) & 0 & (q_2 - \varepsilon_2) \\ (q_3 - \varepsilon_3) & (q_3 + \varepsilon_3) & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

где $-\infty < \varepsilon_i < +\infty,\ i = 1, 2, 3$.

Сходимость начального распределения весов (8) к однопараметрическому предельному состоянию $X^*(\varepsilon)$ свидетельствует о существовании инварианта

$$I(\varepsilon) = I(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Теорема 3. *Предельное распределение весов имеет вид (7) тогда и только тогда, когда для начального распределения весов (8) справедливо равенство* $\varepsilon = \frac{1}{6}|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3|$.

Предельное состояние является устойчивым, т.е. $X^* = \overline{X}$, *если* $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$.

Доказательство. Определим силу стабилизации по начальному распределению (8):

$$F^{(0)} = \frac{1}{2}(p_1^{(0)} - q_1, p_2^{(0)} - q_2, p_3^{(0)} - q_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(q_2 + q_3 - 2q_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3, q_1 + q_3 - 2q_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_3, q_1 + q_2 - 2q_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Применяя соотношения (b) Теоремы 1, получаем

$$x_{12}^* = \frac{q_1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{4}(q_1 + q_3 - 2q_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_3)\frac{4}{3} - \frac{1}{8}(q_2 + q_3 - 2q_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)\frac{4}{3} =$$

$$= \frac{q_1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{6}(2q_1 + 2q_3 - 4q_2 - 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 + q_2 + q_3 - 2q_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) =$$

$$= \frac{1}{2}(q_1 + q_2 - q_3) - \frac{1}{6}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \overline{x}_{12} - \varepsilon.$$

Аналогично вычисляются оставшиеся элементы:

$$x_{21}^* = \overline{x}_{12} + \varepsilon;\ x_{13}^* = \overline{x}_{13} + \varepsilon;\ x_{23}^* = \overline{x}_{23} - \varepsilon;\ x_{31}^* = \overline{x}_{13} - \varepsilon;\ x_{32}^* = \overline{x}_{23} + \varepsilon.$$

Доказательство второй части Теоремы 3 очевидно следует из доказанного выше. Теорема доказана полностью. ■

Выразим $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 через начальные условия:

$$\varepsilon_1 = \frac{x_{12}^{(0)} + x_{13}^{(0)}}{2} - x_{12}^{(0)} = \frac{x_{13}^{(0)} - x_{12}^{(0)}}{2};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{x_{21}^{(0)} - x_{23}^{(0)}}{2};\ \varepsilon_3 = \frac{x_{32}^{(0)} - x_{31}^{(0)}}{2};$$

Это позволяет определить отклонение ε через элементы начального состояния:

$$\varepsilon = \frac{1}{6}|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3| = \frac{1}{12}|x_{13}^{(0)} + x_{32}^{(0)} + x_{21}^{(0)} - x_{12}^{(0)} - x_{23}^{(0)} - x_{31}^{(0)}|.$$

В результате получаем

Следствие 5. *В случае* $n = 3$ *отклонение предельного состояния от устойчивого определяется через начальное распределение весов дуг.* ■

4. Заключение

В работе основные результаты по описанию предельных и устойчивых состояний развивающейся системы получены для частного случая функций cij и для полного графа взаимоотношений. При этом упомянутые состояния находятся аналитически, что существенно упрощает их поиск по сравнению с работой [2]. В дальнейшем планируется рассмотреть произвольные графы взаимоотношений, другие функции оценки этих взаимоотношений, а также интересные с точки зрения приложений частные случаи.

Литература

1. Нэш Д. *Бескоалиционные игры* // Матричные игры / Под ред. Н.Н. Воробьева. М.: Физматгиз, 1961.
2. Albin P.S., Hormozi F.Z. *Theoretical reconciliation of equilibrium and structural approaches* // Mathematical Social Sciences. 1983. V.6, N. 2. P.261-284.
3. Jahan S. *The determination of stability and similarity of Markovian land use change processes: A theoretical and empirical analysis* // Socio-Economic Planning Sciences. 1986. V.20, N.4. P.243-251.
4. Lunberg E. *On the concept of economic equilibrium* // Structural Change and Economic Dynamics. 1996. V.7, N.3. P.361-390.
5. Meyer F., Vallee J. *The dynamics of long-term growth.* // Technological Forecasting and Social Change. 1975. V.7, N.3. P.285-300.
6. Nishikawa T., Imai M., Shimizu S. *Nonlinear phenomena in a self-organizing model* // Computers and Mathematics with Applications. 1997. V.33, N.3. P.73-79.
7. Gibbons R. *Game Theory for Applied Economists.* Princeton: Princeton University Press, 1992.
8. Fudenberg D., Tirole J. *Game Theory.* Massachussets: MIT Press, 1991.
9. Павловский Ю.Н. *Имитационные модели и системы.* М.: ФАЗИС, ВЦ РАН, 2000.
10. Adamidou E. A., Kornhauser A. L., Koskosidis Y. A. *A game theoretic/network equilibrium solution approach for the railroad freight car management problem* // Transportation Research Part B: Methodological. 1993. V.27, N.3. P.237-252.
11. Иванилов В.Ю., Огарышев В.Ф., Павловский Ю.Н. *Имитация конфликтов.* М.: ВЦ РАН, 1993.
12. Макеев С.П. *О реализуемости взвешенных графов с заданными весами вершин* // Управляемые системы. ИМ СО РАН. 1993. Вып.31. С.40-52.
13. Миронов А.А. *О свойствах наборов степеней вершин обобщенных графов* // ДАН. 1992. Т.324, N.5. С.959-963.
14. Pawlak Z. *About conflicts* // Prace IPI PAN. Warsaw. 1981. N.451.
15. Хакими С.Л. *О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа* // Кибернетика. Сб. Новая серия. 1966. М.: Мир. Вып.2. С.40-53.