

ЗАДАЧИ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ СИСТЕМ: РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Н.М. Лыченко

The procedures of synthesis of decentralized coordinated control of interconnecting continuous and discrete systems with known disturbances are submitted. The trajectories of interconnecting systems should track some known trajectories. The initial continuous problem is stated as optimization problem with performance index built on an errors between trajectories of subsystem states and etalon models. The initial discrete problem is reviewed as optimization problem with performance index, built on a difference between desirable trajectories and outputs of subsystems. The parallel calculation for coordination parameters was used. Illustrative examples are submitted.

Введение

Проблема качества систем является одной из основных проблем при синтезе современных систем управления. Она заключается в разработке математических методов анализа и синтеза систем, удовлетворяющих некоторым, заранее заданным показателям качества процесса управления. Для решения этой проблемы в современной теории управления широко используются методы оптимального управления, модального управления, теории H -бесконечности и другие. Одним из вариантов использования методов оптимального управления для обеспечения системе заданного качества является решение оптимизационной задачи с критерием, построенным на разности между состояниями системы и некоторой эталонной, заранее заданной траектории.

Метод декомпозиционно-координационной оптимизации динамических систем с адаптацией критерия [1], [2] позволяет решать широкий круг задач с учетом инженерных требований к качеству управления и в том числе позволяет получить желаемые эффекты задания требуемой динамики управляемой системы.

В настоящей работе предлагается метод синтеза координированных децентрализованных алгоритмов оптимального управления взаимосвязанными непрерывными и дискретными системами большой размерности с известными

© 2003 Н.М. Лыченко

E-mail: lychenko@aknet.kg

Киргизско-Российский Славянский университет (Киргизия, г.Бишкек)

возмущениями. При этом задание требуемой динамики для каждой из непрерывных подсистем формализуется с помощью введения эталонных динамических моделей, выходы дискретных систем должны отслеживать некоторые заданные траектории. Задачи слежения рассмотрены как оптимизационные, с критерием, построенным на ошибке между траекториями состояний подсистем и эталонных моделей (для непрерывных систем) и на разности между действительными и желаемыми траекториями выхода (для дискретных систем).

Синтез алгоритмов осуществляется на базе метода декомпозиционно-координационной оптимизации с адаптацией критерия [1], [2] с помощью двухуровневой вычислительной процедуры. Для решения оптимизационных задач на нижнем уровне используются параллельные вычисления [3], [4] что позволяет сделать итеративные процедуры синтеза алгоритмов более эффективными и получить лучшие по скорости сходимости показатели.

1. Задача слежения для непрерывных взаимосвязанных систем.

1.1. Постановка задачи.

Рассмотрим взаимосвязанную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^M A_{ij} x_j + \sum_{j=1}^M B_{ij} u_j + \mu_i(t), \\ x_i(t_0) &= x_{0i}, \forall i = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x_i(t) \in R^{n_i}$ и $u_i(t) \in R^{m_i}$ – векторы состояния и управления i -той подсистемы; $x_{0i} \in R^{n_i}$ – заданное начальное состояние; $A_i \in R^{n_i \times n_i}$, $B_i \in R^{n_i \times m_i}$ – матрицы коэффициентов, характеризующих динамику i -той подсистемы; (A_i, B_i – управляемые пары); $A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$, $B_{ij} \in R^{n_i \times m_j}$ – коэффициенты, характеризующие взаимосвязи между подсистемами; $\mu_i(t)$ – некоторые известные возмущения.

Цель управления заключается в следующем:

траектории состояния подсистем (1) должны максимально приближаться к траекториям состояния некоторых заданных эталонных моделей:

$$\dot{x}_{mi} = A_{mi} x_{mi} + B_{mi} u_{mi}, \quad x_{mi}(t_0) = x_{m0i}, \forall i = 1, \dots, M. \quad (2)$$

1.2. Синтез законов управления.

Определим ошибку между траекториями движения управляемой подсистемы и ее эталонной модели:

$$e_i(t) = x_i(t) - x_{mi}(t). \quad (3)$$

С учетом этого можно записать:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) = & A_{m_i}e_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1}^M A_{ij}x_j + \\ & + \sum_{j=1}^M B_{ij}u_j + \mu_i(t) + (A_i - A_{m_i})x_i - B_{m_i}u_{m_i}. \end{aligned} \quad (4)$$

Зададим критерий близости $x_i(t)$ и $x_{m_i}(t)$ для всех подсистем:

$$2J = e'(t_f)Q_{1d}e(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} (e'(t)Q_{1ed}e(t) + u'R_d u(t)) dt \quad (5)$$

и будем решать исходную задачу управления как следующую оптимизационную задачу:

синтезировать законы управления $u_i(t) \quad \forall i = 1, \dots, M$, которые доставят минимум критерию оптимальности (5) при ограничениях (4).

Предполагаем, что координатор предсказывает векторы ошибок и управлений $e_i(t)$ и $u_i(t)$:

$$\bar{e}_i(t) = e_i(t), \quad \bar{u}_i(t) = u_i(t)$$

и формируем следующую эквивалентную оптимизационную задачу:
минимизировать

$$\begin{aligned} 2J_1 = & \sum_{i=1}^M \{ \| e_i(t_f) \|_{Q_{1e_i}}^2 + \| e_i(t_f) - \bar{e}_i(t_f) \|_{Q_{2e_i}}^2 + \int_{t_0}^{t_f} (\| e_i(t) \|_{Q_{1e_i}}^2 + \\ & + \| u_i(t) \|_{R_i}^2 + \| e_i(t) - \bar{e}_i(t) \|_{Q_{2e_i}}^2 + \| u_i(t) - \bar{u}_i(t) \|_{Q_{2u_i}}^2) dt \} \end{aligned} \quad (6)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= A_{m_i}e_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^M A_{ij}(\bar{e}_j + x_{jm}) + \\ & + \sum_{j=1}^M B_{ij}\bar{u}_j + (A_i - A_{m_i})(\bar{e}_i + x_{m_i}) - B_{m_i}u_{m_i} + \mu_i, \\ e_i(t_0) &= x_i(t_0) - x_{m_i}(t_0), \\ \bar{e}_i &= e_i, \\ \bar{u}_i &= u_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Сформируем гамильтониан:

$$\begin{aligned} 2H = & \sum_{i=1}^M (\| e_i(t) \|_{Q_{1e_i}}^2 + \| u_i(t) \|_{R_i}^2 + \| e_i - \bar{e}_i(t) \|_{Q_{2e_i}}^2 + \| u_i(t) - \bar{u}_i(t) \|_{Q_{2u_i}}^2 + \\ & + 2\lambda'_i(A_{m_i}e_i + B_i u_i + \bar{f}_i) + 2\alpha'_i(e_i - \bar{e}_i) + 2\beta'_i(u_i - \bar{u}_i). \end{aligned}$$

Условия оптимальности:

$$\partial H_i / \partial e_i = -\dot{\lambda}_i : \quad -\dot{\lambda}_i = Q_{1ei} e_i + Q_{2ei} (e_i - \bar{e}_i) + A'_{m_i} \lambda_i + \alpha_i;$$

$$\partial H_i / \partial u_i = 0 : \quad R_i u_i + Q_{2ui} (u_i - \bar{u}_i) + B'_i \lambda_i + \beta_i = 0;$$

$$\partial H_i / \partial \lambda_i = \dot{e}_i : \quad \dot{e}_i = A_{m_i} e_i + B_i u_i + \bar{f}_i;$$

$$\partial H / \partial \bar{e} = 0 : \quad -Q_{2ed} (e - \bar{e}) + A'_{in} \lambda + (A - A_m)' \lambda - \alpha = 0;$$

$$\partial H / \partial \bar{u} = 0 : \quad -Q_{2ud} (u - \bar{u}) + B'_{in} \lambda - \beta = 0;$$

$$\partial H / \partial \alpha = 0 : \quad e - \bar{e} = 0;$$

$$\partial H / \partial \beta = 0 : \quad u - \bar{u} = 0.$$

Из условий оптимальности следуют алгоритмы нижнего уровня:

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= P_i B_i D_i B'_i P_i - P_i A_{m_i} - A'_{m_i} P_i - (Q_{1ei} + Q_{2ei}), \\ P_i(t_f) &= Q_{1i} + Q_{2i}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{f}_i &= (P_i B_i D_i B'_i - A'_{m_i}) f_i + P_i B_i D_i (\beta_i - Q_{2ui} \bar{u}_i) + \\ &\quad + Q_{2ei} \bar{e}_i - \alpha_i - P_i \left(\sum A_{ij} (\bar{e}_j + x_{m_j}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum B_{ij} \bar{u}_j + (A_i - A_{m_i}) (\bar{e}_i + x_{m_i}) - B_{m_i} u_{m_i} + \mu_i \right), \\ f_i(t_f) &= -Q_{2i} \bar{e}_i(t_f); \end{aligned} \quad (9)$$

$$u_i = -D_i (B'_i P_i e_i + B'_i f_i - Q_{2ui} \bar{u}_i + \beta_i), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= A_{m_i} e_i + B_i u_i + \sum A_{ij} (\bar{e}_j + x_{m_j}) + \sum B_{ij} \bar{u}_j + \\ &\quad + (A_i - A_{m_i}) (\bar{e}_i + x_{m_i}) - B_{m_i} u_{m_i} + \mu_i; \\ D_i &= (R_i + Q_{2ui})^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

и алгоритмы верхнего уровня:

$$\begin{aligned} z^{l+\delta_j} &= \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \bar{e}(t) \\ \beta(t) \\ \bar{u}(t) \end{bmatrix}^{l+\delta_j} = \\ &= \begin{bmatrix} -Q_{2xd} (e^{l+\delta_j}(t) - \bar{e}^{l+\delta_j}(t)) + Q_{1xof} \bar{e}^{l+\delta_j}(t) + A'_{in} (P e^{l+\delta_j} + f^{l+\delta_j}) \\ e^{l+\delta_j}(t) \\ -Q_{2ud} (u^{l+\delta_j}(t) - \bar{u}^{l+\delta_j}(t)) + R_{of} \bar{u}^{l+\delta_j}(t) + B'_{in} (P e^{l+\delta_j} + f^{l+\delta_j}) \\ u^{l+\delta_j}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь δ_j – символ, иллюстрирующий принадлежность соответствующих переменных только j -той подсистеме;

$$e_j^{l+\delta_j} = \left\{ e_i^{l+\delta_j} \right\}_{M \times 1}, \quad e_i^{l+\delta_j} = \begin{cases} e_i^{l-1}, & t < t_i \\ e_i^l, & t \geq t_i \end{cases},$$

$$u_j^{l+\delta_j} = \left\{ u_i^{l+\delta_j} \right\}_{M \times 1}, \quad u_i^{l+\delta_j} = \begin{cases} u_i^{l-1}, & t < t_i \\ u_i^l, & t \geq t_i \end{cases},$$

$$f_j^{l+\delta_j} = \left\{ f_i^{l+\delta_j} \right\}_{M \times 1}, \quad f_i^{l+\delta_j} = \begin{cases} f_i^{l-1}, & t < t_i \\ f_i^l, & t \geq t_i \end{cases},$$

t_i – время, необходимое i -у процессору для решения оптимизационной задачи i -й подсистемы;

$e_i^{l-1}, u_i^{l-1}, f_i^{l-1}$ – состояние, управление и вспомогательная функция i -й подсистемы на предыдущей итерации итеративной процедуры;

e_i^l, u_i^l – новая ошибка и управление i -й подсистемы, результат решения i -й оптимизационной задачи на l -й итерации.

Замечание . Поскольку A_{m_i} – устойчивые $\forall i = 1, \dots, M$, то вместо уравнения Риккати (8) можно [2] решать уравнения Ляпунова (16), если матрицы Q_{2xi} $\forall i = 1, \dots, M$ выбирать из условия:

$$\begin{aligned} Q_{2ei} &= P_i B_i D_i B_i' P_i + Q_{2e_i}^1 \\ \dot{P}_i &= -P_i A_{m_i} - A_{m_i}' P_i - (Q_{1ei} + Q_{2ei}^1) \end{aligned} \quad (16)$$

Алгоритм решения задачи будет следующим.

- Шаг 1. Решить уравнения Риккати (8) (или уравнения Ляпунова (16)) для каждой из M подсистем; последовательности $P_i(t) \forall i$ запомнить.
- Шаг 2. Задать начальный вектор координирующих переменных для всех подсистем: $z^{l+\delta_j}, \forall j, l = 1$.
- Шаг 3. Решить оптимизационные задачи параллельно для всех подсистем, используя (9), (10), (11), а также $P_i(t)$ и $z^{l+\delta_j}, \forall j$.
- Шаг 4. Переопределить вектор координирующих переменных $z^{l+\delta_j}$ для j -той подсистемы согласно (12), используя информацию об ошибках j -той подсистемы по мере ее поступления. Шаги 3 и 4 повторяются не больше M раз и завершаются вычислением полных векторов ошибок $e(t)$ и управлений $u(t)$.
- Шаг 5. Изменить $l = l + 1$.
- Шаг 6. Переопределить вектор координирующих переменных в соответствии с (12).
- Шаг 7. Вычислить $e^l = \| z^l - z^{l-1} \|$. Если e^l достаточно мало, расчеты прекращаются, иначе – переход к шагу 3, на новый цикл поиска оптимального решения.

Особенности вычислительной процедуры:

- на верхнем уровне формируется вектор координирующих переменных $z(t) = [\bar{e}(t), \alpha(t), \bar{u}(t), \beta(t)]'$, обеспечивающий сходимость процедуры к оптимальному для полной системы решению;
- на нижнем уровне независимо решаются оптимизационные задачи для каждой подсистемы при фиксированных координирующих переменных. (Результатом решения ОЗ являются вычисления ошибки

$e(t)$ ($x(t)$), управления $u(t)$ и вспомогательной функции $f(t)$.)

Структура закона управления. Как видно из (10), для каждой i -той подсистемы закон управления состоит из двух составляющих:

$$u_i(t) = -D_i B_i' P_i e_i - D_i (B_i' f_i - Q_{2ui} \bar{u}_i + \beta_i).$$

Первая составляющая представляет собой обратную связь по ошибке, вторая – программная составляющая, учитывающая, помимо взаимосвязей, параметры и траектории движений эталонных моделей.

1.3. Примеры моделирования.

Пример 1. Рассмотрим систему [1], состоящую из трех подсистем, модель каждой из которых задана в виде (1).

В этих моделях

$$\text{для первой подсистемы: } A_1 = \begin{bmatrix} -0,004 & -0,083 & -0,008 \\ -0,04 & -0,79 & -0,007 \\ -0,001 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -0,013 & -0,005 \\ 0,002 & -0,112 & -0,047 \\ -0,004 & -0,004 & -0,001 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} -0,003 \\ -0,032 \\ -0,001 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{для второй подсистемы: } A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,004 & -0,001 \\ 0 & -0,014 & -0,005 \\ -0,023 & -0,009 & -0,006 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -0,001 & -0,025 & 0 \\ -0,005 & -0,091 & -0,001 \\ -0,008 & -0,15 & -0,001 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} -0,001 \\ -0,004 \\ -0,006 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,45 & 1 \end{bmatrix},$$

для третьей подсистемы: $A_3 = [0,002]$, $A_{31} = [-0,002 \quad -0,044 \quad 0]$, $A_{32} = [0 \quad -0,007 \quad -0,003]$, $B_3 = [1]$, $B_{31} = [0 \quad 1 \quad 0]$.

Матрицы B_{13} , B_{21} , B_{23} , B_{32} – нулевые матрицы соответствующих размерностей.

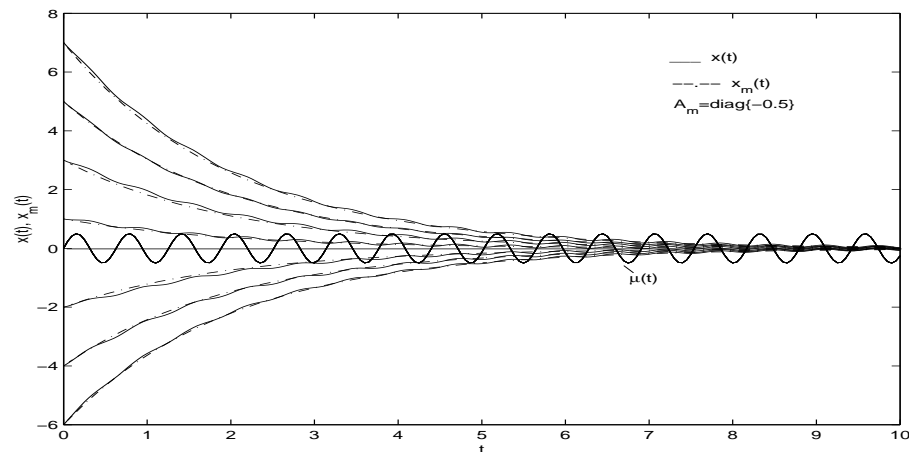


Рис. 1. Траектории состояний системы

Как видно, эта система – взаимосвязанная, неустойчивая, но управляемая, на каждую переменную состояния действует известное возмущение $\mu(t)$, вид которого представлен на рис. 1.

Необходимо найти управляющие воздействия, которые не только компенсируют возмущающие воздействия, но и будут «вести» переменные состояния подсистем по некоторым эталонным траекториям, которые являются решением дифференциальных уравнений вида (2), в которых $A_m = \text{diag}\{-0,5\}$ – диагональная матрица, B_m – нулевая матрица. Т.е. задаваемый моделью закон поведения системы – экспоненциальный.

Задача решалась как оптимизационная с критерием вида (5), построенным на разности между траекториями реальных и эталонных подсистем (3). На рис. 1 представлены траектории слежения $x(t)$ системы с возмущениями за состояниями эталонной модели $x_m(t)$, а на рис. 2 – координирующие управления $u_k(t)$ и результирующие управляющие воздействия $u(t)$ возмущенной системы.

Пример 2. Элементы матрицы эталонной модели выбраны, исходя из требования обеспечить системе, описанной в примере 1, меньшее время переходного процесса. Для этого матрица эталонной модели выбрана как $A_m = \text{diag}\{-3\}$. В результате получены траектории состояния и управления, показанные на рис. 3 и 4.

Как видно из сравнения графиков, представленных на рис. 1 и 3, во втором варианте время переходного процесса уменьшилось приблизительно в 3 раза.

Пример 3. Для этого примера матрицы и управление эталонной модели выбраны так, что траектории эталонной модели представляют собой гармонические функции:

$$A_m = \text{diag}\{-3\}, B_m = \text{diag}\{2\}, u_m = 0,5 \sin(10t).$$

Задача управления заключается в том, чтобы состояния заданной возмущенной системы (1) отслеживали эти траектории. На рис. 5 и 6 представлены соответствующие графики.

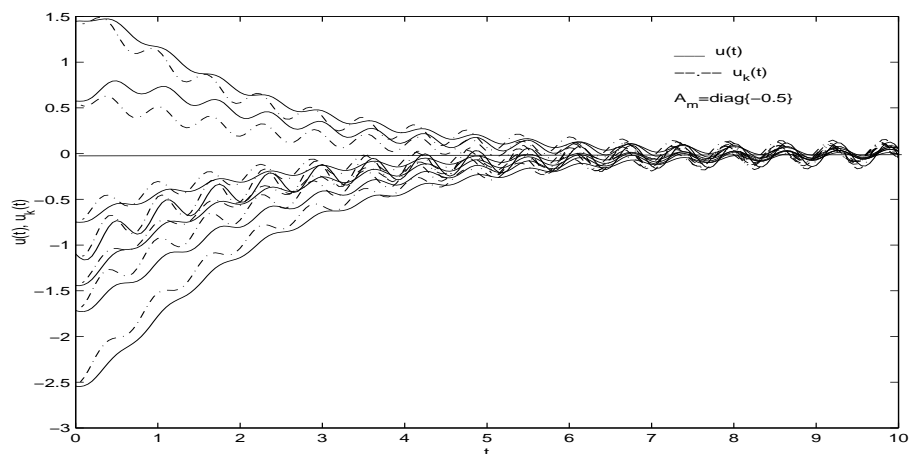


Рис. 2. Управляющие воздействия

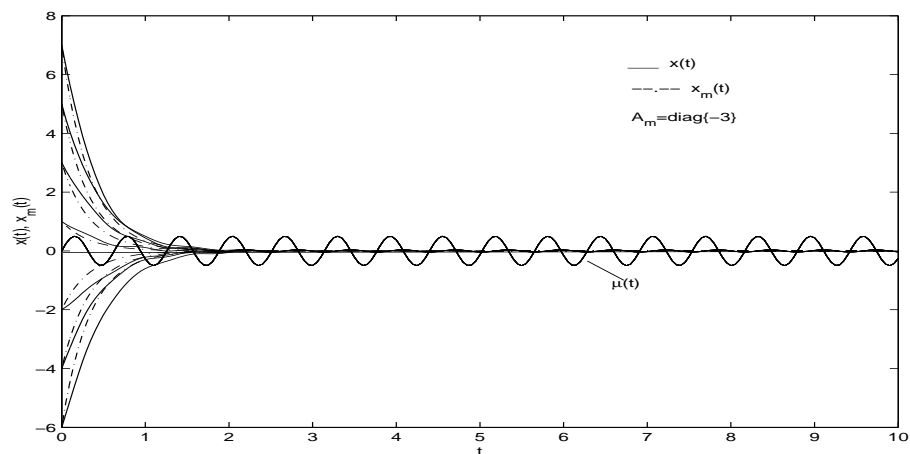


Рис. 3. Траектории состояний системы с возмущениями и эталонные траектории

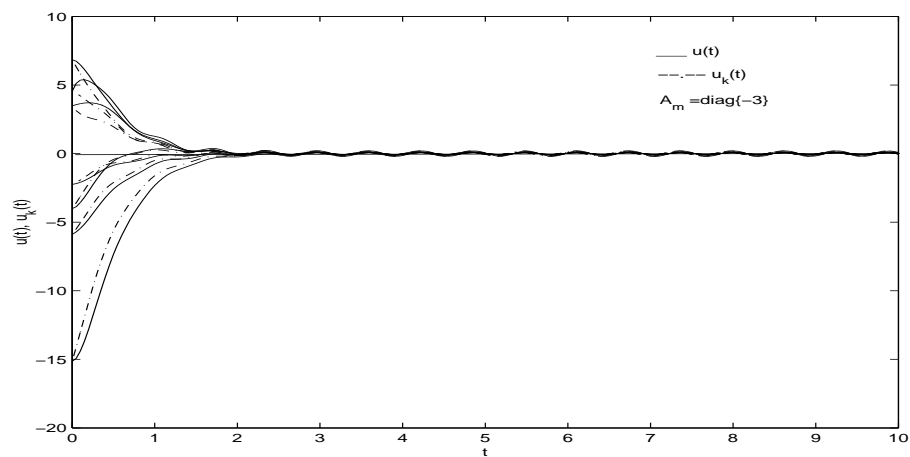


Рис. 4. Управляющие воздействия

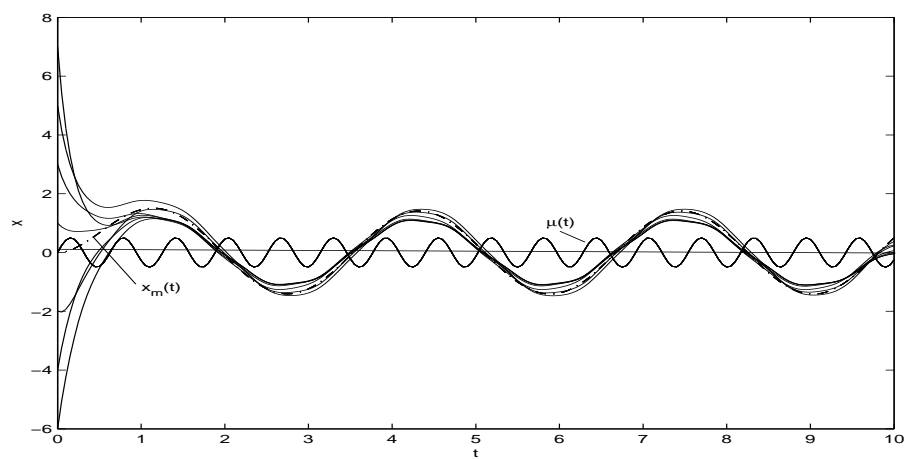


Рис. 5. Траектории состояний системы с возмущениями и эталонные траектории

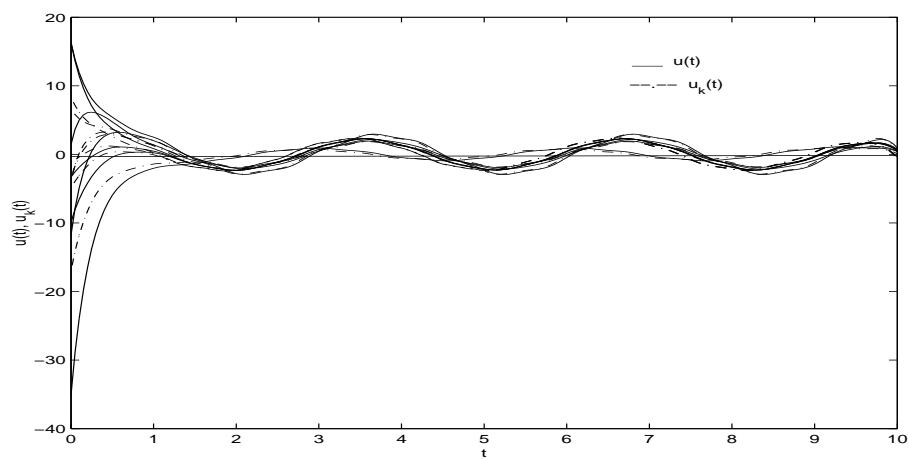


Рис. 6. Управляющие воздействия

2. Задача слежения для дискретных взаимосвязанных систем.

2.1. Постановка задачи.

Решение задачи слежения для дискретных систем рассмотрим в несколько иной постановке. Если в предыдущем разделе решается задача синтеза иерархических управлений, в которой задание требуемой динамики формируется с помощью введения эталонной динамической модели, то в настоящем разделе требуемая динамика взаимосвязанной системы формируется с помощью слежения выходов каждой из подсистем за эталонными траекториями, заданными как некоторые известные функции времени.

Рассмотрим взаимосвязанную систему в дискретном времени:

$$\begin{aligned} x_i[k+1] &= A_i x_i[k] + B_i u_i[k] + \sum_{j=1}^M A_{ij} x_j[k] + \sum_{j=1}^M B_{ij} u_j[k] + \mu_i[k], \quad x_i[k_0] = x_{0i} \\ y_i[k] &= C_i x_i[k], \quad \forall i = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (17)$$

Необходимо обеспечить слежение выходов каждой из подсистем $y_i[k]$ за эталонными траекториями $y_i^*[k] \quad \forall i = 1, \dots, M$, где $y_i^*[k] \in R^{s_i \times 1}$ – некоторые известные функции дискретного времени.

2.2. Синтез законов управления.

Для решения поставленной задачи управления сформируем функционал, построенный на ошибке слежения

$$e_i[k] = y_i[k] - y_i^*[k] : \quad (18)$$

$$2J = \sum_{i=1}^M 2J_i = 2 \sum_{i=1}^M \left\{ \| e_i[N] \|_{F_{1i}} + \sum_{k=k_0}^{N-1} \{ \| e_i[k] \|_{F_i} + \| u_i[k] \|_{R_i} \} \right\}. \quad (19)$$

Тогда задачу слежения выходов взаимосвязанной системы за эталонными траекториями можно сформулировать как следующую *оптимизационную задачу*:

найти управления $u_i[k] \quad \forall i = 1, \dots, M$, которые минимизируют функционал (19) при ограничениях (17) и (18).

Учитывая уравнение выхода системы (17) и уравнение (18), преобразуем функционал (19) к следующему виду:

$$\begin{aligned} 2J_i &= \| y_i^*[N] \|_{F_{1i}} - 2x_i'[N] G_{1i} y_i^*[N] + \| x_i[N] \|_{Q_{1i}} + \\ &+ \sum_{k=k_0}^N \{ \| y_i^*[k] \|_{F_i} - 2x_i'[k] G_i y_i^*[k] + \| x_i[k] \|_{Q_{1x_i}} + \| u_i[k] \|_{R_i} \}. \end{aligned}$$

Здесь:

$$Q_{1i} = C_i' F_{1i} C_i, \quad Q_{1x_i} = C_i' F_i C_i, \quad G_{1i} = C_i' F_{1i}, \quad G_i = C_i' F_i \quad (20)$$

Сформулируем эквивалентную оптимизационную задачу следующим образом:
минимизировать

$$\begin{aligned}
 2J_i = & \| y_i^*[N] \|_{F_{1i}} - 2x'_i[N]G_{1i}y_i^*[N] + \| x_i[N] - \bar{x}_i[N] \|_{Q_{2i}} + \\
 & + \| x_i[N] \|_{Q_{1i}} + \sum_{k=k_0}^{N-1} \{ \| y_i^*[k] \|_{F_i} - 2x'_i[k]G_i y_i^*[k] + \| x_i[k] \|_{Q_{1x_i}} + \\
 & + \| x_i[k] - \bar{x}_i[k] \|_{Q_{2x_i}} + \| u_i[k] \|_{R_i} + \| u_i[k] - \bar{u}_i[k] \|_{Q_{2u_i}} \}
 \end{aligned} \tag{21}$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned}
 x_i[k+1] &= A_i x_i[k] + \sum_{j=1}^M A_{ij} \bar{x}_j[k] + B_i u_i[k] + \sum_{j=1}^M B_{ij} \bar{u}_j[k] + \mu_i[k], \quad x_i[k_0] = x_{i0}, \\
 \bar{x}_i[k] &= x_i[k], \\
 \bar{u}_i[k] &= u_i[k].
 \end{aligned} \tag{22}$$

Далее процедура синтеза алгоритмов управления осуществляется также на базе метода декомпозиционно-координационной оптимизации с параллельной обработкой информации в двухуровневой структуре решения оптимизационных задач [3], [4].

Из условий оптимальности для дискретных систем следуют алгоритмы нижнего уровня:

$$\begin{aligned}
 u_i[k] = & -D_i B'_i P_i[k+1] A_i x_i[k] - \\
 & -D [B'_i P_i[k+1] (\sum_{j=1}^M A_{ij} \bar{x}_j[k] + \sum_{j=1}^M B_{ij} \bar{u}_j[k] + \mu_i[k]) + B'_i f_i[k+1] + \\
 & + \beta_i[k] - Q_{2u_i} \bar{u}_i[k]],
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$x_i[k+1] = A_i x_i[k] + B_i u_i[k] + \sum_{j=1}^M a_{ij} \bar{x}_j[k] + \sum_{j=1}^M B_{ij} \bar{u}_j[k] + \mu_i[k],$$

$$\begin{aligned}
 P_i[k] &= A'_i P_i[k+1] A_i - A'_i P_i[k+1] B_i D_i B'_i P_i[k+1] A_i + Q_{1x_i} + Q_{2x_i}, \\
 P_i[N] &= Q_{1i} + Q_{2i},
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 f_i[k] = & -Q_{2x_i} \bar{x}_i[k] - A'_i P_i[k+1] B_i D_i^{-1} [B'_i f_i[k+1] + \beta_i[k] - Q_{2u_i} \bar{u}_i[k] + \\
 & + B'_i P_i[k+1] (\sum_{j=1}^M A_{ij} \bar{x}_j[k] + \sum_{j=1}^M B_{ij} \bar{u}_j[k] + \mu_i[k])] + \alpha_i[k] + G_i y_i^*[k] + \\
 & + A'_i P_i[k+1] (\sum_{j=1}^M A_{ij} \bar{x}_j[k] + \sum_{j=1}^M B_{ij} \bar{u}_j[k] + \mu_i[k]) + A'_i f_i[k+1],
 \end{aligned}$$

$$f_i[N] = -Q_{2i}\bar{x}_i[N] - G_{1i}y_i^*[N]; \quad D_i = (R_i + Q_{2u_i} + B_i'P_i[k+1]B_i)^{-1}.$$

С учетом обозначений (20) уравнение Риккати (24) примет вид:

$$\begin{aligned} P_i[k] &= A_i'P_i[k+1]A_i - A_i'P_i[k+1]B_iD_iB_i'P_i[k+1]A_i + (C_i'F_iC_i + Q_{2x_i}), \\ P_i[N] &= C_i'F_iC_i + Q_{2i}. \end{aligned}$$

Производя преобразования, подобные приведенным в предыдущем подразделе, получим алгоритмы верхнего уровня:

$$\begin{aligned} x[k] - \bar{x}[k] &= 0; \quad u[k] - \bar{u}[k] = 0; \\ -Q_{2x}(x[k] - \bar{x}[k]) + A_{in}'\lambda[k+1] - \alpha[k] &= 0; \\ -Q_{2u}(u[k] - \bar{u}[k]) + B_{in}'\lambda[k+1] - \beta[k] &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда можно получить итерационную процедуру прогноза взаимодействий, подобную представленной в (12).

Алгоритм численного решения рассмотренной задачи также подобен алгоритму для непрерывных систем, с теми отличиями, что на нижнем уровне для подсистем вместо уравнений ошибок решаются уравнения состояния, и верхний уровень прогнозирует также состояния.

Из (23) видно, что, как и в других задачах координированного децентрализованного управления, закон управления для каждой i -той подсистемы формируется за счет двух составляющих. Первая представляет собой локальную обратную связь по состоянию, вторая учитывает взаимодействие между подсистемами, возмущения $\mu_i[k]$ и эталонную траекторию выхода $y_i^*[k]$.

2.3. Примеры моделирования.

Пример 4.¹ Рассмотрим систему [5], состоящую из трех подсистем, модель каждой из которых задана в виде (17).

В этих моделях

$$\begin{aligned} \text{для первой подсистемы: } A_1 &= \begin{bmatrix} 0,7142 & 0,1233 \\ 0,1048 & 0,5956 \end{bmatrix}, \\ A_{12} = \begin{bmatrix} -0,0114 & -0,0008 \\ -0,0114 & -0,0008 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} -0,0000 & 0,0000 \\ -0,0008 & 0,0000 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0,3911 & 0 \\ 0,0280 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{для второй подсистемы: } A_2 &= \begin{bmatrix} 0,5956 & 0,1239 \\ 0,1053 & 0,7245 \end{bmatrix}, \\ A_{21} = \begin{bmatrix} 0,0082 & 0,0968 \\ 0,0005 & 0,0082 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} 0,0121 & 0,0008 \\ 0,1359 & 0,0128 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_{21} = \begin{bmatrix} 0,0014 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,0023 \end{bmatrix}; \\ \text{для третьей подсистемы: } A_3 &= \begin{bmatrix} 0,7257 & 0,1352 \\ 0,1150 & 0,7142 \end{bmatrix}, \\ A_{31} = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0005 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}, A_{32} = \begin{bmatrix} 0,0087 & 0,1155 \\ 0,0005 & 0,0093 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0,0371 \\ 0 & 0,4152 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

¹Для удобства восприятия графиков функций в дискретном времени значения функций в дискретные моменты времени соединены ломаной кривой.

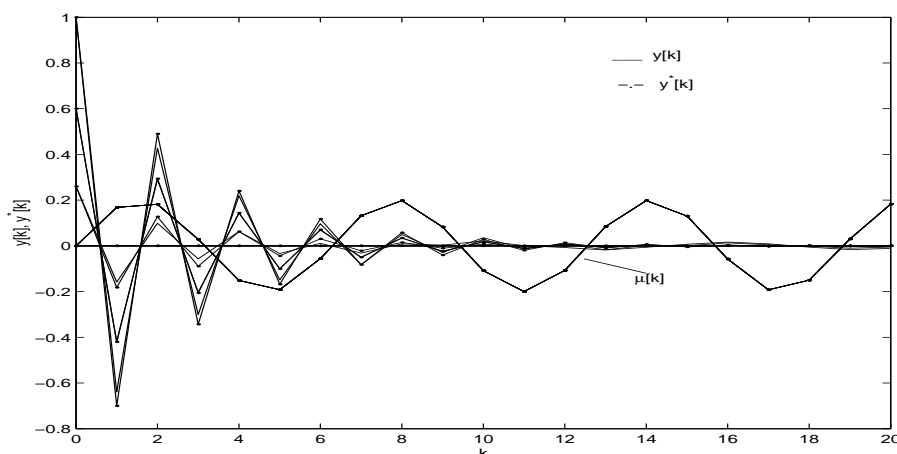


Рис. 7. Траектории выходов системы с компенсацией возмущений

Матрицы $B_{12}, B_{13}, B_{31}, B_{32}$ – нулевые матрицы соответствующих размерностей.

Как видно, рассматриваемая система – взаимосвязанная, на все переменные состояния действует одинаковое известное возмущение $\mu[k]$, вид которого представлен на рис. 7.

Необходимо найти управляющие воздействия, которые не только компенсируют возмущающие воздействия, но и будут «вести» переменные выходов подсистем по некоторым эталонным траекториям.

Задача решалась как оптимизационная с критерием вида (20), построенным на разности между траекториями выхода реальных подсистем и эталонных сигналов (18).

На рис. 7 и 8 представлены траектории состояний и управлений системы, соответствующие траекториям системы *без задания эталонных выходов*, но с компенсацией возмущений.

Зададим эталонные траектории выходов системы, исходя из желаемой динамики переходных процессов в подсистемах (эталонные траектории представлены на рис. 9) и потребуем слежения выходов системы, в которой присутствуют возмущения, за указанными эталонными траекториями.

Выполняющие это требование управляющие воздействия представлены на рис. 10, а соответствующие траектории выходов возмущенной системы – на рис. 9.

Пример 5. Для этого примера эталонные траектории выходов заданы в виде гармонических дискретных функций, вид которых представлен на рис. 11.

Задача управления заключается в том, чтобы состояния заданной возмущенной системы (17) отслеживали эти траектории. На рис. 11 и 12 представлены соответствующие графики.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе на базе метода синтеза координированных децентрализованных оптимальных управлений с параллельной обработкой ин-

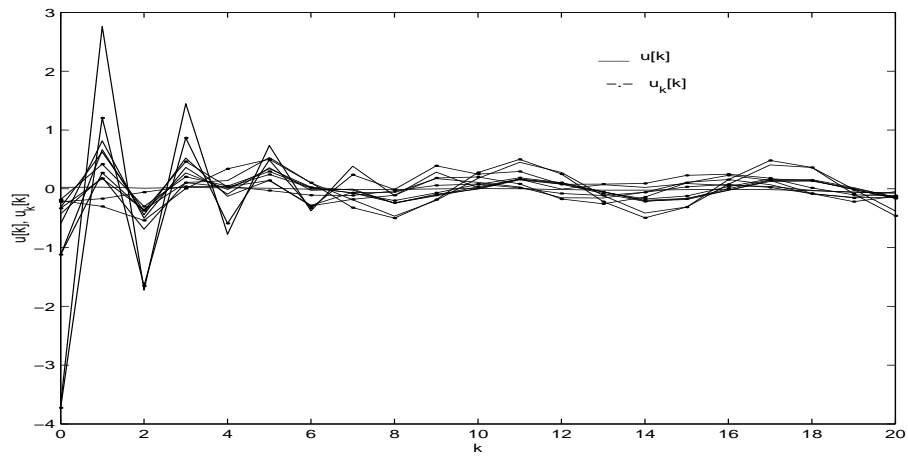


Рис. 8. Управляющие воздействия

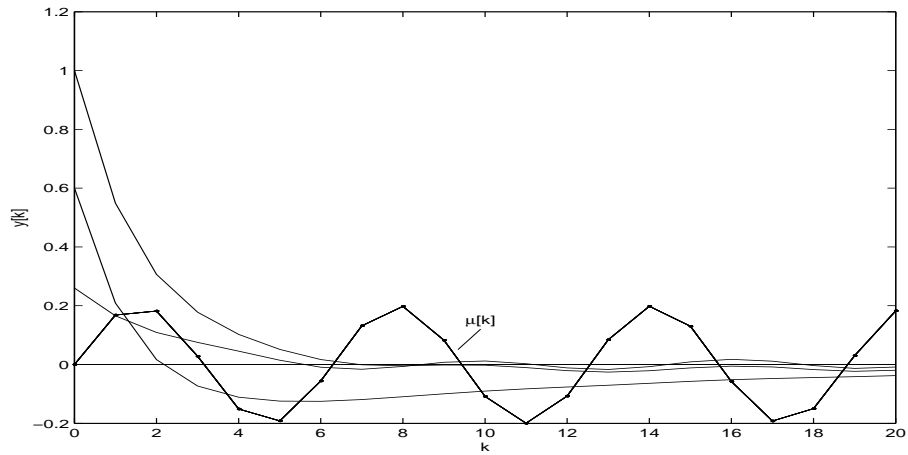


Рис. 9. Траектории выходов возмущенной системы, следующих за эталонными

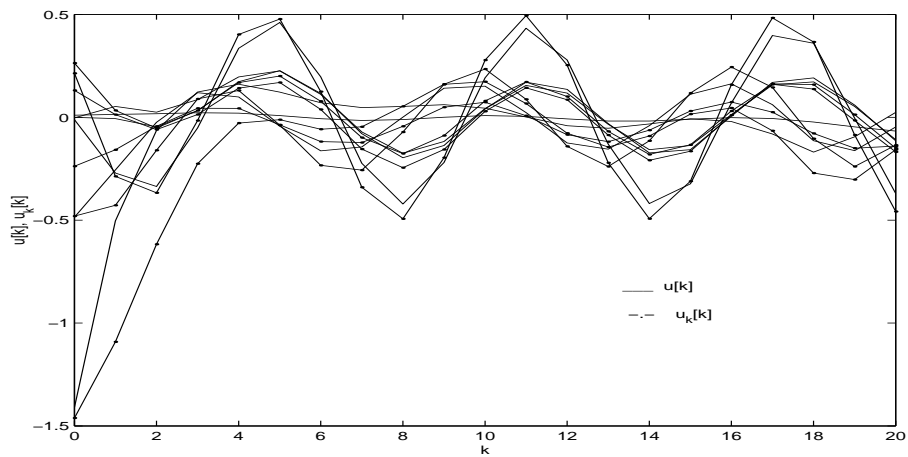


Рис. 10. Управляющие воздействия