

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

Выпуск 11

Омск 2003

УДК 007, 53, 62, 378, 515, 517, 518, 519, 530, 532, 536, 548, 621, 653, 669, 681.

Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр.
/ Под ред. А.К. Гуца. – Омск: Омск. гос. ун-т, 2003. – Вып. 11. – 184 с.

ISBN 5 – 8239 – 0128 – 3

Сборник составлен из статей преподавателей, аспирантов и студентов факультета компьютерных наук, математического и физического факультетов Омского государственного университета, других вузов и учреждений.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакционная коллегия

В.А. Топоногов

д-р физ.-мат. наук, профессор

Институт математики СО РАН (г. Новосибирск)

А.К. Гуц

д-р физ.-мат. наук, профессор

Н.Ф. Богаченко

к-т физ.-мат. наук

Д.Н. Лавров

к-т техн. наук

Художественное оформление

В.В. Коробицын

Адрес научной редакции

Россия, 644077, Омск - 77, пр. Мира, 55 А

Омский государственный университет

факультет компьютерных наук

E-mail: guts@univer.omsk.su

zhihalkina@math.omsu.omskreg.ru

lavrov@univer.omsk.su

ISBN 5 – 8239 – 0128 – 3

© Омский госуниверситет, 2003

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

В серии сборников публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике и размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества.

Публикуются также статьи по информационным технологиям, философии и истории математики.

Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Сборник является реферлируемым. Рефераты статей публикуются в журналах "Zentralblatt für Mathematik" (Германия) и "Mathematical Reviews" (США).

Электронная версия сборника представлена в сети «Интернет» по адресу:

<http://cmm.univer.omsk.su>

Сборник издается на коммерческие средства факультета компьютерных наук Омского государственного университета.

Факультет готов к сотрудничеству в издании сборника. Наш E-mail:

cmm@univer.omsk.su

Подробную информацию можно найти на Web-сервере:

<http://cmm.univer.omsk.su>

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика

- О.Т. Данилова, Р.Т. Файзуллин. *Приближенный глобальный алгоритм решения задачи коммивояжера с неравенством треугольника* ... 5
- А.Т. Когут. *Численный алгоритм решения нелинейных уравнений с использованием вторых производных* 10
- А.М. Мызников. *Решение больших систем нелинейных уравнений применительно к задачам расчета гидравлических, тепловых и электрических сетей* 15
- А.А. Чемёркин. *О некоторых свойствах секвенциального замыкания* 21
- В.А. Стадников, С.Н. Чуканов. *Описание гладких векторных полей динамических систем с помощью списков характеристик особых точек* 28
- С.Н. Чуканов. *Траекторные кривые динамических систем* 34

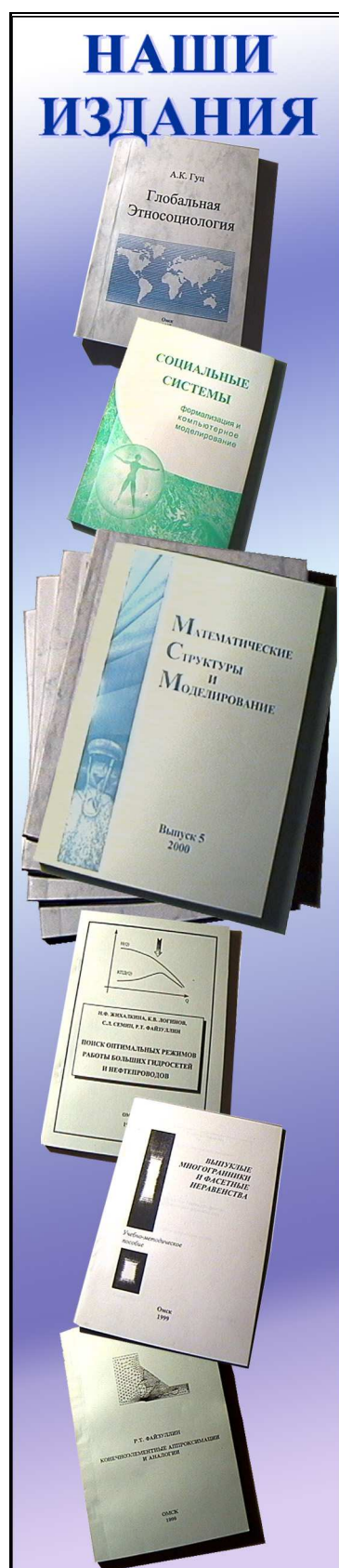
Моделирование

- С.В. Белим, С.Ю. Белим. *Реализация логических операций на основе квантового нейрона* ... 39
- О.А. Голованова, В.А. Когут, Е.В. Желяев. *Моделирование нуклеации оксалата кальция* 42
- О.Т. Данилова, Ф.В. Коржов. *Построение модели расчета процесса влияния электромагнитного поля на вещество* 48
- В.А. Маренко. *Антенный комплекс как сложная система* 54
- А.В. Пролубников. *Алгоритм поиска приближенного решения задачи проверки изоморфизма подграфов* 59
- А.С. Толстуха. *Обтекание решеток произвольных лопастей идеальной несжимаемой жидкостью* 67

Математическая экономика

- М.А. Добренко, А.К. Гуц. *Первичные структуры отношений Кулакова в микроэкономике* .. 88

продолжение на след. странице



Теоретическая физика

- С.В. Белим. *Критическая динамика трехмерных спиновых систем с эффектами дальнего действия* 97
- А.К. Гуц, Е.В. Палешева. *Обобщенный закон времени и его следствия* 102
- В.В. Прудников, В.Н. Бородихин, А.Н. Вакилов, П.В. Прудников. *Компьютерное моделирование критического поведения трехмерной неупорядоченной модели Изинга* 108

Информационные технологии

- Р.И. Газизов, Н.В. Жданов, С.Л. Ланчук, Г.Б. Тодер. *Компьютерная демонстрационно-обучающая программа «Удивительный мир кристаллов. Свойства симметрии»* 124
- И.А. Земсков. *SIMCOSAR: программный комплекс моделирования процесса мониторинга состояния информационного поля Интернет* 128
- И.М. Зырянова, Г.Б. Тодер. *Комплексный подход к образованию: реализация межпредметных связей в традиционных и новых образовательных технологиях* 158
- И.М. Зырянова, Г.Б. Тодер, А.А. Яцук. *Расширенная версия компьютерной контролирующе-обучающей программы «Строение атома и периодическая система элементов». Результаты ее использования и их анализ* 162
- Д.Н. Лавров, А.В. Мухоморов. *Защита базы данных фотодокументов* 172
- А.В. Угаров. *Автоматизация построения запросов к реляционным базам данных* 175

ПРИБЛИЖЕННЫЙ ГЛОБАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С НЕРАВЕНСТВОМ ТРЕУГОЛЬНИКА

О.Т. Данилова, Р.Т. Файзуллин

We propose algorithm for the salesman problem with triangle inequality based on consideration of the solution as a smoothest trajectory.

Рассмотрим задачу коммивояжера в евклидовом пространстве [1] как поиск минимума функционала $S(p)$

$$S(p) = ((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^p + \dots ((x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2)^p, \quad (1)$$

где $p = 1/2$.

Заметим, что, варьируя p , можно получить целый класс задач на минимум, зависящий от параметра p . Рассмотрим случай, когда $p = 1$.

Тогда функционал $S(1)$ имеет областью определения пространство размерности $2N$ и действует на конечном наборе точек – $u_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, $u_2 = (x_2, x_1, \dots, x_n, y_2, \dots, y_n), \dots$

Взяв частные производные по $2N$ переменным, мы получим условия минимума функционала, определенного на всем пространстве R^{2N} , которые сводятся к однородной системе уравнений:

$$(\vec{d}) = Au = 0, \quad (2)$$

где матрица A ленточная – на диагонали стоит число 2, на, под и над диагоналями стоит число -1, из условия замкнутости пути следует, что -1 стоят в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы A .

Очевидно, что минимум по конечному числу точек и по всему пространству совпадают тогда и только тогда, когда мы имеем N совпадающих копий одной точки. Но обратим внимание на то, что при $p = 1$ функционал положительно определен. Иначе говоря, если мы найдем «точку» среди конечного числа данных «точек», для которой произведение A на вектор координат наименьшее, то она и будет точкой минимума функционала.

Учитывая, что $\vec{d}$ можно представить как

$$\vec{d} = Au = A \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i \vec{v}_i, \quad (3)$$

где $\vec{v}_i$ базис из собственных векторов матрицы A , и без потери общности считая, что норма u равна единице, можно сделать вывод о том, что минимум S будет достигаться на векторе u , для которого коэффициенты α_i наиболее быстро убывают с ростом i .

В свою очередь можно заметить, что матрица A – это не что иное, как результат конечноэлементной аппроксимации левой части одномерной краевой задачи на собственные значения с периодическими краевыми условиями:

$$-\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \lambda_i y_i, \quad y_i(0) = y_i(2\pi), \quad (4)$$

причем аппроксимации, проведенной на равномерной сетке.

Тогда собственные векторы матрицы A – это и есть наилучшие по энергии аппроксимации базисных функций Фурье на окружности, то есть обычных синусов и косинусов. Заменяя собственные векторы в разложении вектора u на базисные комплексные функции Фурье и подставив соответствующие коэффициенты разложения, мы получим гладкую кривую, которая проходит вблизи точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Построенная гладкая кривая, то есть кривая, для которой коэффициенты Фурье убывают наиболее быстро, будет отвечать наименьшей длине ломаной, которую можно приблизительно восстановить, соединяя точки отрезками прямых.

Алгоритм построения искомой кривой заключается в следующем – на каждом шаге с помощью метода наименьших квадратов выбирается такой коэффициент при известной собственной функции, чтобы получившееся произведение было наименее удалено в норме L_2 от совокупности текущих координат – исходные координаты точек минус сумма значений предыдущих приближений. Так, на первом шаге мы выбираем наилучший в среднеквадратичном смысле эллипс, аппроксимирующий заданное множество точек (первые гармоники). Затем, проектируя заданные точки на эллипс, мы получаем новые координаты (s, n) , связанные с эллипсом, и находим следующие гармоники и т.д.

Число рассматриваемых собственных функций ограничено критерием Найквиста [2]. Т.е. если значение коэффициента при собственной функции получается меньшим, чем среднее отклонение точек от суммарной кривой, то дальнейшие приближения уже не имеют смысла. Данное условие несет в себе неявное ограничение на область применимости алгоритма – если априори известно, что данные представляют собой «траекторию», то алгоритм априори эффективен, но если характер убывания первых коэффициентов Фурье имеет тот же порядок $1/n$, что и для набора равномерно распределенных точек, то это не «траектория» [3].

Перейдем к случаю $p = 1/2$. Как и в предыдущем случае, норма производной от функционала равна нулю тогда и только тогда, когда координаты всех N точек совпадают. И в самом деле, условие минимума функционала можно записать аналогично предыдущему, на диагоналях A , главной и двух соседних, будут стоять числа:

$$\frac{1}{h_{i,i-1}^2} + \frac{1}{h_{i,i+1}^2}, \quad -\frac{1}{h_{i,i-1}^2}, \quad -\frac{1}{h_{i,i+1}^2}. \quad (5)$$

Как мы видим, матрица обладает слабым диагональным преобладанием и вырождена. Вырождение происходит на собственном векторе, состоящем из констант, где одна константа относится к координате x , другая к y .

Как и в случае $p = 1$, мы можем рассматривать аппроксимацию краевой задачи, но уже определенной на интервале, длина которого равна длине T ломаной – пути коммивояжера, и с неравномерным разбиением этого интервала, где длина звена ломаной равна расстоянию между точками при обходе пути. Т.е. мы получаем конечноэлементную аппроксимацию задачи:

$$-\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \lambda_i y_i, \quad y_i(0) = y_i(T). \quad (6)$$

Для всех рассуждений, которые были приведены выше, разница в длине интервала несущественна, т.к. мы будем опять рассматривать ортонормированные собственные функции, и очевидно, что вариация T не сказывается на их представлении, так же, если варьируется T , то большим значениям L отвечают большие значения нормы производной.

На следующих рисунках приведены результаты приближенного решения задачи коммивояжера для 1000 случайно выбранных точек, распределенных в квадрате.

На рис.1 приведен промежуточный шаг поиска гладкой кривой, который наилучшим L_2 образом приближает заданные точки. Ломаная, построенная на основе гладкой кривой, при выполнении критерия Найквиста приведена на рисунке 2. Как можно увидеть на рисунке 3, решение задачи коммивояжера для заданных точек методом эластичной нейронной сети совпадает в большом масштабе с предыдущим решением, отличаясь лишь в малых вариациях пути обхода. Данные различия иногда устраняются локальным поиском, например, выбирая 4 или 5 точек на ломаной (так называемый шаблон), мы фиксируем начальную и конечную точки, а порядок обхода промежуточных точек выбираем из условия минимума пути между начальной и конечной точкой. Далее шаблон сдвигается вдоль ломаной. Как можно увидеть на рисунке 4, подобный алгоритм локального поиска не работает для метода «иди к ближайшему соседу», и вполне понятно почему: локальная вариация промежуточных точек в этом методе может приводить к глобальной перестройке всей ломаной. Последний рисунок также иллюстрирует свойство только локальной непрерывности стандартного алгоритма.

Основываясь на данном подходе, удалось разработать специальную модификацию алгоритма эластичной нейронной сети [4], учитывающую априорную гладкость траекторий частиц, регистрируемых приборами в экспериментах физики высокой энергии.

Кроме того, с помощью данного алгоритма можно вычислять устойчивую аутентификационную характеристику графического файла, т.е. наиболее экономно вычислять коэффициенты Фурье кривой, проходящей через заданные

характерные точки рисунка.

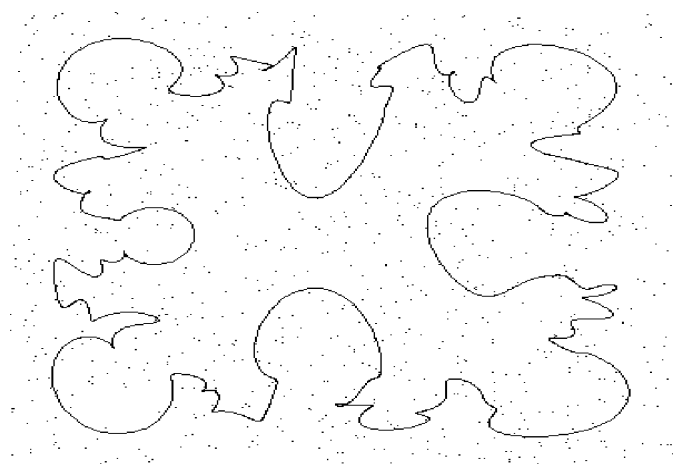


Рис. 1. Промежуточный шаг работы алгоритма.

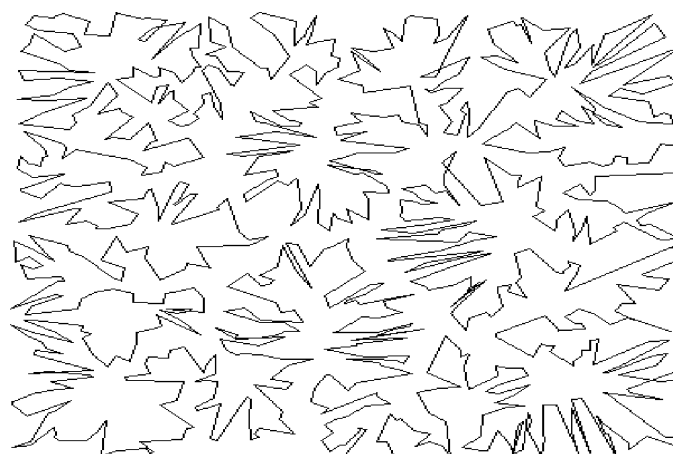


Рис. 2. Итоговая ломаная.

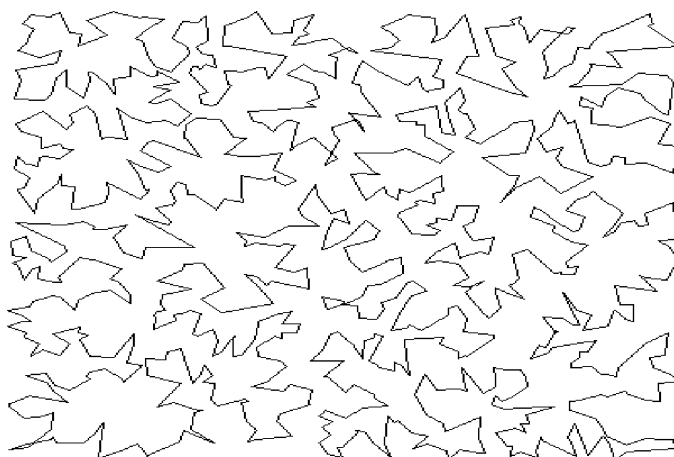


Рис. 3. Ломаная, построенная с помощью эластичной нейронной сети.

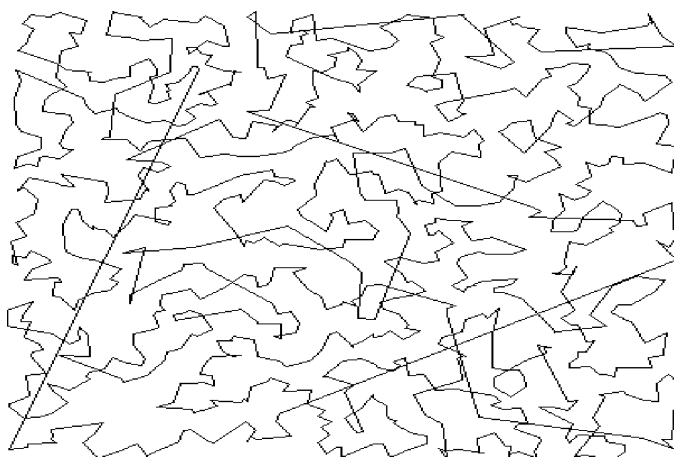


Рис. 4. Решение с помощью эвристики «иди к ближайшему соседу».

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джоносон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи* М.: Мир, 1982. 420 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. *Прикладной анализ случайных величин*. М.: Мир, 1989. 440 с.
3. Толстов Г.П. *Ряды Фурье*. М.: Наука, 1980. 320 с.
4. Горбунов С.В., Кисель И.В., Конотопская Е.В., Файзуллин Р.Т. Сравнение методов гарантированной гладкости и эластичной сети для задачи коммивояжера на плоскости // Сообщение(препринт)ОИЯИ Р5-97-258. Дубна,1997.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВТОРЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А.Т. Когут

In this article a modification of Newton's method for solution of nonlinear equation is reviewed. The Newton's method may be derived by decomposition of nonlinear smooth functions in linear section of Taylor's series taking into account only the first derivative. It is offered a linear approximation, based on Taylor's series and including second-order derivative. Both forms of linearization were received by means of which the recurrence procedures, that use classical Newton's method, were designed. Convergence of worked out algorithms was examined and the cubic speed was obtained.

Введение

Простейший итерационный метод решения нелинейных уравнений содержит значения самой функции, метод Ньютона – первую производную и обладает уже квадратичной скоростью сходимости. Существуют итерационные методы высших порядков, которые содержат вторые и более высокие производные [1]. В работе предлагается один из возможных подходов к получению рекуррентных процедур второго порядка путем построения линейных аппроксимаций, основанных на разложении нелинейной функции в ряд Тейлора и учитывающих вторые производные.

1. Построение алгоритмов

Рассмотрим определение на интервале $[a, b]$ корня x^* нелинейного уравнения

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где $f(x)$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция.

Для численного решения уравнения (1) часто применяется метод Ньютона, представляющий собой рекуррентную процедуру [1]:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2)$$

и его модификацию

$$x_{k+1} = x_k - h_{k+1} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (3)$$

где h_{k+1} – в общем случае переменный шаг, вводимый для ускорения сходимости.

Формула (3) может быть получена из разложения $f(x_{k+1})$ в ряд Тейлора вида

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + O(\Delta x^2). \quad (4)$$

В выражении (4) разность

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k. \quad (5)$$

Для получения явных вычислительных схем допустим, что

$$f(x_{k+1}) = 0. \quad (6)$$

Отбрасывая слагаемое $O(\Delta x^2)$ с учетом формул (5) и (6), получим рекуррентную процедуру (3).

В разложении (4) учитывается только первая производная. Рассмотрим приближение $f(x_{k+1})$ квадратичным многочленом Тейлора следующего вида:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_k)\Delta x \cdot \Delta x. \quad (7)$$

Заменяем в (7) одну из разностей Δx на некоторую известную величину δ_{k+1} , тогда одним из возможных представлений приближения для $f(x_{k+1})$ является

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1} \cdot \Delta x$$

или

$$[f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1}]\Delta x = f(x_{k+1}) - f(x_k).$$

Применяя последовательно формулы (6) и (7), получим

$$x_{k+1} = x_k - h_{k+1} \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1}}. \quad (8)$$

Заменяв в (7) произведение $\Delta x \cdot \Delta x$ на δ_{k+1}^2 , можно получить для $f(x_{k+1})$ другое приближение

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1}^2.$$

Выполняя аналогичные преобразования, запишем

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h_{k+1}f(x_k) - \frac{1}{2}f''(x_k)\delta_{k+1}^2}{f'(x_k)}. \quad (9)$$

Как показано в работе [2], третья возможная форма аппроксимации является неработоспособной.

На основании формул (8) и (9) можно получить вычислительный алгоритм только в том случае, если известен или задан способ определения разности δ_{k+1} . Допустим, что

$$\delta_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} - x_k. \quad (10)$$

В разности (10) значение $\tilde{x}_{k+1}$, вообще говоря, может быть рассчитано по любому рекуррентному алгоритму. Для сохранения общности будем определять $\tilde{x}_{k+1}$ по методу Ньютона

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - h_{k+1} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (11)$$

На $(k+1)$ -й итерации на основе известного приближения x_k по формуле (11) вычисляется $\tilde{x}_{k+1}$, формируется по (10) разность δ_{k+1} , которая в дальнейшем подставляется в (8) или в (9) в зависимости от используемой формы алгоритма второго порядка. Итерационная процедура, как обычно, продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие достаточной точности.

2. Анализ сходимости

В [1] показано, что метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости. Оценим сходимость предлагаемых вычислительных алгоритмов при $h_{k+1} = 1$. Подставим в формулу (8) выражения (10), (11) и запишем

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{1}{2}f''(x_k)\left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]}. \quad (12)$$

Вычтем из левой и правой частей (12) значение x^* и перепишем в виде

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right] \frac{f'(x_k)}{f'(x_k) - \frac{1}{2}f''(x_k)\left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right]}.$$

Учитывая, что в соответствии с [1, с. 468]

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = (x_k - x^*) - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2, \quad (13)$$

где ξ заключено между x^* и x_k , получим

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \left[(x_k - x^*) - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2 \right] \times$$

$$\times \frac{f'(x_k)}{f'(x_k) - \frac{1}{2}f''(x_k) \left[(x_k - x^*) - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2 \right]}.$$

Приведем к общему знаменателю и получим

$$x_{k+1} - x^* = \frac{\frac{1}{2} [f''(\xi) - f''(x_k)] (x_k - x^*)^2 + \frac{1}{4} \frac{f''(x_k) f''(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^3}{f'(x_k) - \frac{1}{2} f''(x_k) \left[(x_k - x^*) - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2 \right]}. \quad (14)$$

Введем обозначения

$$m_1 := \min_{y \in [a, b]} |f'(y)|; \quad M_{21} := \max_{y \in [a, b]} \frac{|f''(y)|^2}{|f'(y)|}; \quad M_3 := \max_{y \in [a, b]} |f^{(3)}(y)|. \quad (15)$$

Естественно, что выполняется следующее:

$$|f''(\xi) - f''(x_k)| \leq M_3 |\xi - x_k| \leq M_3 |x_k - x^*|, \quad (16)$$

поэтому для (14) можно записать

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{\frac{M_3}{2} + \frac{M_{21}}{4}}{|f'(x_k) + O(x_k - x^*)|} |x_k - x^*|^3. \quad (17)$$

Оценим выражение, стоящее в знаменателе. При достаточно малом $|x_k - x^*|$ соблюдается условие

$$|O(x_k - x^*)| < \frac{m_1}{2}.$$

Теперь допустим, что для знаменателя выполняется требование

$$|f'(x_k) + O(x_k - x^*)| < \frac{m_1}{2}.$$

Тогда

$$|f'(x_k) + O(x_k - x^*)| + |O(x_k - x^*)| < m_1,$$

но в силу неравенства треугольника

$$|f'(x_k) + O(x_k - x^*)| + |O(x_k - x^*)| \geq |f'(x_k)|,$$

поэтому

$$|f'(x_k)| < m_1,$$

что противоречит определению m_1 . Следовательно, для знаменателя формулы (17) должно выполняться

$$|f'(x_k) + O(x_k - x^*)| \geq \frac{m_1}{2}.$$

Окончательно (17) можно записать в виде

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{2M_3 + M_{21}}{2m_1} |x_k - x^*|^3,$$

т.е. алгоритм второго порядка (8) обладает кубической скоростью сходимости.

Оценим сходимость вычислительной процедуры (9). Для этого подставим в (9) формулы (10), (11), вычтем из левой и правой частей x^* и после преобразований получим

$$x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} \left[\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right]^2.$$

С учетом формулы (13) запишем

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2 - \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} \left[(x_k - x^*) - \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2 \right]^2.$$

Выпишем все слагаемые до $(x_k - x^*)^3$ включительно:

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi) - f''(x_k)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)f''(\xi)}{f'(x_k)^2} (x_k - x^*)^3 + O(x_k - x^*)^4.$$

С учетом неравенства (16), а также формул (15) в окончательном виде получим

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \left(\frac{M_3}{2m_1} + \frac{1}{2} M_{22} \right) |x_k - x^*|^3,$$

где

$$M_{22} := \max_{y \in [a, b]} \frac{|f''(y)|^2}{|f'(y)|^2}.$$

Таким образом, алгоритм (9), как и процедура (8), обладает кубической сходимостью, то есть на порядок выше, чем у классического метода Ньютона.

3. Заключение

Получены две формы итерационных процедур численного решения нелинейных уравнений, основанных, как и метод Ньютона, на разложении функций в ряд Тейлора, но учитывающих кроме первой и вторую производную. Исследована сходимость предложенных алгоритмов и доказана их кубическая скорость сходимости, что на порядок превышает сходимость метода Ньютона. Методика линеаризации может быть распространена и на учет производных более высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Том 1.* М.: Наука, 1966.
2. Когут А.Т., Малютин А.Г., Щегольский И.А. *Применение квадратичной аппроксимации в задачах параметрической идентификации и оптимизации* // Информатика и процессы управления. 1997. С.44-48.

РЕШЕНИЕ БОЛЬШИХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ РАСЧЕТА ГИДРАВЛИЧЕСКИХ, ТЕПЛОВЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

А.М. Мызников

This article describe the method to solve large nonlinear equation systems of gydraulic type. The method is a modification of the method performed in the work [1]. This modification allow to solve the tasks more quickly and to use the method in other areas, like to solve equation systems in electrical engineering.

Введение

Трубопроводные сети представляют собой сложные и дорогостоящие инженерные сооружения. Расчет трубопроводных систем является одним из важных элементов технологического проектирования, причем от качества расчетов зависит экономия средств при строительстве и эксплуатации.

В связи с тем, что широкоизвестные алгоритмы лишь частично удовлетворяют конечного пользователя и требуют предварительной специальной подготовки информации инженерами, проблема разработки более эффективных, более общих методов остается открытой.

Многие алгоритмы расчета гидравлических сетей базируются на известных аналогах, разработанных для электротехники. Одинаковые математические формулировки для гидравлических, электрических и тепловых задач позволяют использовать одни и те же алгоритмы с определенными ограничениями для разных видов физических задач. В данной статье будет рассмотрена задача установившегося течения жидкости в трубах, которая представляет собой систему нелинейных уравнений, составленную исходя из первого и второго законов Кирхгофа.

В силу того что законы Кирхгофа – общие для задач гидравлики и электрических задач, будем рассматривать далее первый тип задач. Особенности для электрических, тепловых и иных схожих по структуре и законам сетей будут указываться отдельно.

Для решения задачи стационарного распределения жидкости в трубах предлагается применить метод, в основу которого положен алгоритм, предложенный Р.Т.Файзуллиным и К.В.Логиновым в работе [1]. Алгоритм был предложен для

решения задачи стационарного течения жидкости в трубах с квадратичным законом гидравлического сопротивления. Удалось модифицировать метод применительно к задачам с произвольным законом гидравлического сопротивления, а также значительно ускорить исходный метод.

1. Постановка задачи и метод решения

Задача распределения потоков в трубах сводится к решению системы уравнений вида:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= Q_1, \\ &\dots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n &= Q_k, \\ &\dots \\ a_{(k+1)1}|x_1|^{\beta_1-1}x_1 + \dots + a_{(k+1)n}|x_n|^{\beta_n-1}x_n &= H_1, \\ &\dots \\ a_{n1}|x_1|^{\beta_1-1}x_1 + \dots + a_{nn}|x_n|^{\beta_n-1}x_n &= H_{n-k}, \end{aligned}$$

где x_i – расход по i -й трубе; коэффициент a_{ij} определяется по первому или второму закону Кирхгофа. Для первого закона Кирхгофа втекающий в контрольную точку поток приносит коэффициент, равный единице; вытекающему потоку отвечает коэффициент, равный минус единице. Для второго закона Кирхгофа и для нелинейных уравнений a_{ij} – коэффициент сопротивления трубы. Далее H_i – приложенные напоры, Q_i – отбор в узле, β_j – степень в законе зависимости величины напора от значения расхода. Более подробно о построении данной системы можно прочитать в работе [3].

Запишем систему уравнений в векторном виде:

$$A(x)x = H,$$

где

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(k+1)1}|x_1|^{\beta_1-1} & \dots & a_{(k+1)n}|x_n|^{\beta_n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}|x_1|^{\beta_1-1} & \dots & a_{nn}|x_n|^{\beta_n-1} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \dots \\ Q_k \\ H_1 \\ \dots \\ H_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Доказано, что задача имеет единственное решение в силу использования модулей в нелинейных уравнениях.

Метод, описанный в работе [1], заключается в следующем: решение задачи ищется как предел итераций вида

$$A(\alpha X_i + (\alpha - 1)X_{i-1})X_{i+1} = H.$$

Здесь A – матрица системы уравнений, нижний индекс обозначает приближенные решения, полученные на $i - 1, i, i + 1$ шагах. При вычислении коэффициентов матрицы A используются приближения, полученные на предыдущих шагах, $0 < \alpha < 1$. Следует также отметить, что эффективность метода обуславливается способом представления данных (хранятся только ненулевые значения, которых относительно немного) и тем, что для линейной части только один раз выполняется прямой ход метода Гаусса решения системы линейных уравнений.

При исследовании метода получили, что в случае $\alpha = 0,8$ имеем оптимальную сходимость, а в случае $\alpha = 1$, т.е. одношаговый случай, сходимости нет.

Как показывает практика, данный метод очень быстро сходится (в пределах 20 итераций, для метода Ньютона требуется как минимум 40 итераций) для большинства гидравлических задач, причем количество итераций слабо зависит от размерности задачи и от выбора начального приближения. Таким образом, мы имеем алгоритм, позволяющий решать задачу в реальном времени (т.е. времени, необходимом для принятия решений). Напомним, что алгоритм был предложен для решения задач с квадратичным законом сопротивления ($\beta = 2$).

2. Увеличение быстродействия метода

Изменим способ получения следующего приближения. Для каждой итерации вычисляем следующее приближение исходя из формул:

$$X_{i+\frac{1}{2}} = \alpha X_i + (1 - \alpha)X_{i-\frac{1}{2}}$$

$$A(X_{i+\frac{1}{2}})X_{i+1} = H,$$

где X_i, X_{i+1} – приближенные решения на i и $i+1$ шаге соответственно, $X_{i-\frac{1}{2}}, X_{i+\frac{1}{2}}$ – промежуточные решения, $0 < \alpha < 1$.

В результате численных экспериментов было установлено:

1. Данный метод позволяет решать задачи определения неизвестных стационарных значений расходов по трубам. Причем в случае постоянного закона гидравлического сопротивления (при одинаковых для всех неизвестных) и, в частности, для неквадратичного закона метод сходится за 5-7 итераций, что в 3 раза меньше, чем у исходного метода (здесь и далее результаты приводятся для невязки правой части $< 10^{-8}$ (рис. 1).

В случае различных законов гидравлического сопротивления (для каждого слагаемого в нелинейной части системы свой β) процесс сходится за вдвое большее количество итераций, т.е. около 14. В данном случае напомним, что для гидравлической задачи β лежит в пределах от 1 (что соответствует ламинарному течению) до 2-х.

2. Установлено, что метод сходится для степеней β вплоть до 10, но количество итераций резко возрастает. Например для 4-х – в пределах 20, а для 10 уже около 50 (рис. 2). Следует заметить, что метод последовательных приближений, модифицированный для случая неквадратичного сопротивления, вообще не желает сходиться уже при степени β , большей 2,5.

3. Для каждой степени β имеется свой наиболее оптимальный параметр α . Для $\beta=2$, например он равен 0,5. Зависимость α от β можно посмотреть на графике (рис. 3). Если для каждого слагаемого в нелинейной части системы имеем свой β , то α целесообразно выбирать либо для наиболее часто встречающегося, либо для среднего β .
4. Система уравнений является хорошо обусловленной, если хорошо обусловлена ее начальная матрица. Имеется устойчивость по правой части.
5. К сожалению, исследование метода на «аварийный режим работы», когда отключается одна или несколько труб (сопротивление α_{ij} , соответствующее данной трубе x_j , приравнивается числу много большего порядка), дало не очень перспективные результаты. При исключении труб, причем неважно, одной или нескольких, получаем резкое увеличение количества итераций, причем зависящее от разницы порядков элементов матрицы и сопротивления исключенных труб. Например, для разницы порядков в 8 требуется порядка 18-20 итераций, а для 16 – уже порядка 30-40. Причем точность начинает резко возрастать только при больших номерах итераций. А также имеем, что расход по исключенной трубе (который на самом деле равен нулю) – ноль четвертого и восьмого порядка соответственно, т.е. количество точных цифр в два раза меньше, чем разница порядков. Это вызвано тем, что число обусловленности начальной матрицы велико из-за разницы порядков коэффициентов.

3. Заключение

Полученный метод позволяет решать гидравлические задачи не только для случая квадратичного гидравлического сопротивления, но и для более общего случая (степень меняется в пределах от 1 до 2-х).

Представляется возможным использовать алгоритм для расчета электрических сетей с нелинейностями определенного вида, когда вольтамперная характеристика элемента проводимости представляет собой степенную функцию степени от 1 до 10.

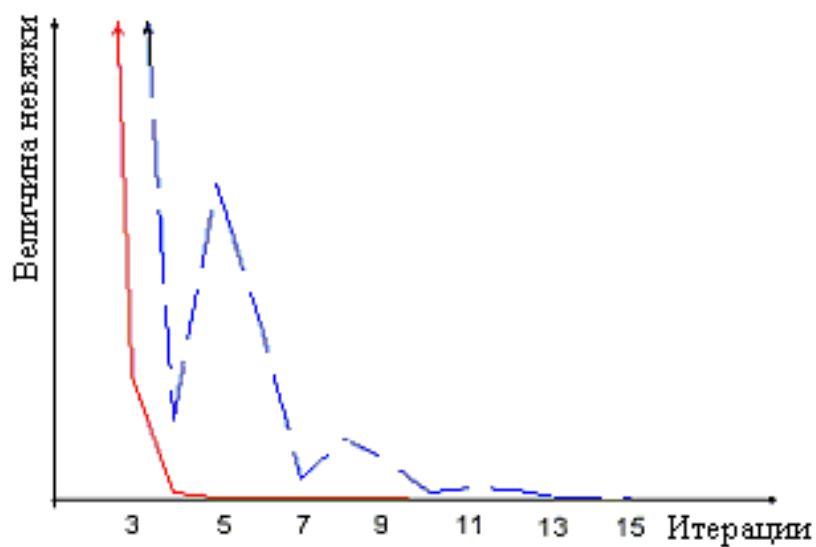


Рис. 1. Поведение невязки правой части для метода последовательных приближений (пунктир) и для модифицированного метода (сплошная линия).

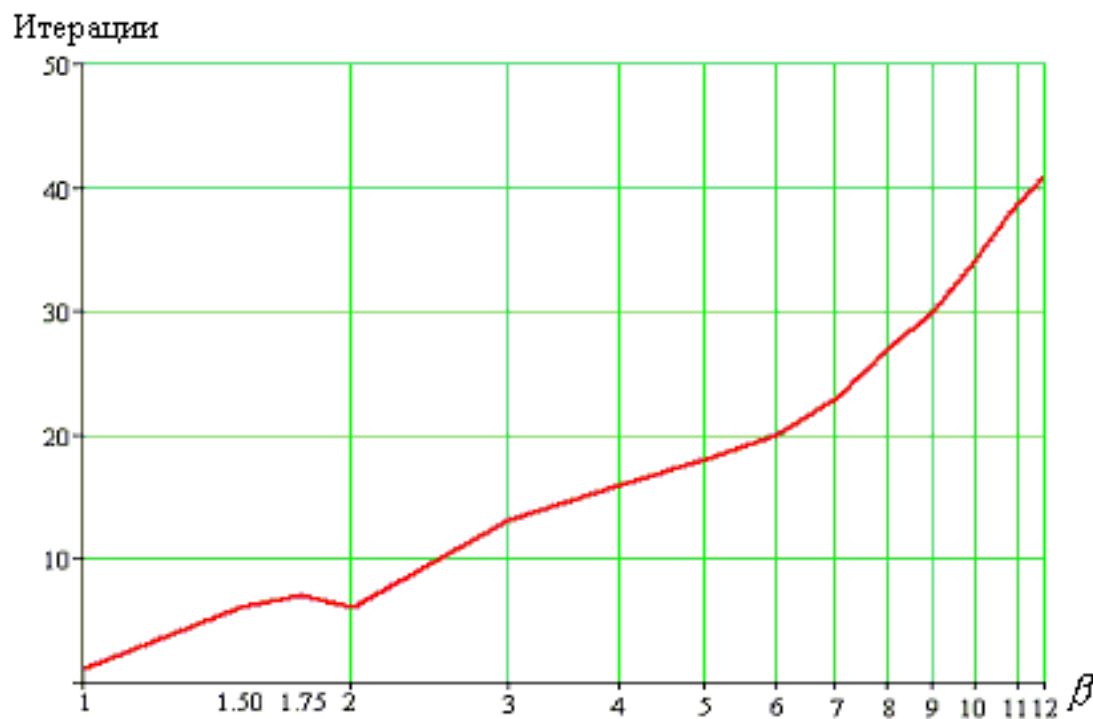


Рис. 2. График зависимости количества итерации от степени β .



Рис. 3. График зависимости коэффициента α от степени β .

ЛИТЕРАТУРА

1. Жихалкина Н.Ф., Логинов К.В., Семин С.Л., Файзуллин Р.Т. *Поиск оптимальных режимов работы больших гидросетей и нефтепроводов*. Омск: ОмГУ, 1999. 96 с.
2. Абрамов Н.Н., Поспелова М.М., Варапаев В.Н., Керимова Д.Ч., Сомов М.А. *Расчет водопроводных сетей*. М.: Стройиздат, 1976. 304 с.
3. Хасилев В.Я., Меренков А.П., Каганович Б.М. и др. *Методы и алгоритмы расчета тепловых сетей*. М.: Энергия, 1978. 176 с.
4. Нерретер В. *Расчет электрических цепей на персональной ЭВМ*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 220 с.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЕКВЕНЦИАЛЬНОГО ЗАМЫКАНИЯ

А.А. Чемёркин

In this paper it is proved that the operation of sequential closure generates some topology on a set. Properties of this topology are considered.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Замыкание множества $A \subset X$ в топологии τ будем обозначать $\text{cl } A$ (или при необходимости $\text{cl}_\tau A$).

Определение 1. Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется секвенциально замкнутым, если оно содержит предел каждой своей сходящейся последовательности. Наименьшее секвенциально замкнутое множество, содержащее множество A , называется его секвенциальным замыканием и обозначается $\text{scl } A$.

Приведем основные свойства секвенциального замыкания в следующей лемме (см., например, [1, с.4], [2, с.14]).

Лемма 1. Для любых $A, B \subset X$ верно

1. $\text{scl } \emptyset = \emptyset$
2. $A \subset \text{scl } A \subset \text{cl } A$
3. A секвенциально замкнуто $\Leftrightarrow A = \text{scl } A$
4. $\text{scl}(\text{scl } A) = \text{scl } A$
5. $A \subset B \Rightarrow \text{scl } A \subset \text{scl } B$
6. $\text{scl}(A \cup B) = \text{scl } A \cup \text{scl } B$
7. $\text{scl}(A \cap B) \subset \text{scl } A \cap \text{scl } B$.

Из леммы 1 следует, что оператор, который каждому подмножеству X сопоставляет его секвенциальное замыкание, является оператором Куратовского, следовательно, на X существует единственная топология, операция замыкания в которой совпадает с операцией секвенциального замыкания в исходной топологии τ (см. [3, с.68]). Эту топологию будем называть *секвенциальной топологией, ассоциированной с τ* , и обозначим $s\tau$. Замкнутые множества в топологии $s\tau$ — это множества, секвенциально замкнутые в τ , и для каждого $A \subset X$ $\text{scl}_\tau A = \text{cl}_{s\tau} A$.

Предложение 1. *Множество $A \subset X$ открыто в топологии $s\tau$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall x \in A, \forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X (x_n \rightarrow x \text{ в } \tau \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 x_n \in A).$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть A открыто в $s\tau$, тогда $A = X \setminus B$, где B секвенциально замкнуто в τ . Допустим, что существуют $x \in A$ и последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, для которых утверждение предложения не выполнено, то есть

$$x_n \rightarrow x \text{ в } \tau \text{ и } \forall k \in \mathbb{N} \exists n_k \geq k : x_{n_k} \in B.$$

Очевидно, что каждое из чисел n_k ($k \in \mathbb{N}$) можно выбирать так, что $n_{k+1} \geq n_k$, то есть найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ последовательности $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, лежащая в B . Так как $x_n \rightarrow x$ в топологии τ , то $x_{n_k} \rightarrow x$ в τ и $x \in B$, поскольку B секвенциально замкнуто в τ . Получили противоречие с тем, что $x \in A$.

Достаточность.

Если предположить, что $B = X \setminus A$ не является секвенциально замкнутым в топологии τ , то существует последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$, сходящаяся в τ к некоторому элементу $x \in A$. Тогда найдется номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $x_n \in A$. Получили противоречие. ■

Предложение 2.

1. Топология $s\tau$ мажорирует топологию τ .
2. Сходящиеся последовательности в топологиях τ и $s\tau$ одни и те же.
3. Если на множестве X заданы две топологии τ и σ , сходящиеся последовательности в которых одни и те же, то $s\tau = s\sigma$. В частности, секвенциальная топология, ассоциированная с топологией $s\tau$, совпадает с ней.

Доказательство.

1. Утверждение непосредственно следует из того, что замкнутое множество является секвенциально замкнутым.

2. Так как $s\tau \succeq \tau$, то последовательность, сходящаяся в $s\tau$, сходится и в τ . Покажем обратное. Пусть $x_n \rightarrow x$ в τ и $V \in \text{Op}(X, s\tau)$ — окрестность точки x в $s\tau$. Тогда по предложению 1 существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для каждого $n \geq n_0$ $x_n \in V$, следовательно, $x_n \rightarrow x$ в $s\tau$.

3. Следствие утверждения 2 и предложения 1. ■

Определение 2. Топологическое пространство (X, τ) будем называть секвенциальным, если топологии τ и $s\tau$ совпадают (см. также [4, с.94]).

Класс секвенциальных пространств достаточно широк. Например, любое топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности (тем более полуметризуемое пространство), является секвенциальным (см. [3, с.105]). Однако наличие первой аксиомы счетности не является необходимым условием для секвенциальности пространства (см. [4, с.95]). Используя [5, с.204], получаем следующий простой пример несеквенциального пространства.

Пример 1. Рассмотрим несчетное множество X (например множество вещественных чисел $\mathbb{R}$) и две топологии τ и σ на нем. Топологию τ возьмем дискретной, открытыми множествами в топологии σ назовем X , $\emptyset$ и дополнения до конечных или счетных подмножеств множества X . Легко видеть, что последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к элементу $x \in X$ в топологии σ тогда и только тогда, когда найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для каждого $n \geq n_0$ $x_n = x$, то есть сходящиеся последовательности в топологиях τ и σ одни и те же. Тогда $s\tau = s\sigma$ (см. утверждение 3 предложения 2), причем $s\tau = \tau$ (так как $s\tau \succeq \tau$ и τ является дискретной топологией). То есть $s\sigma$ — дискретная топология и, следовательно, $s\sigma \neq \sigma$.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех подмножеств множества X . Определим оператор $S : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ по следующему правилу

$$S(A) = \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A : x_n \rightarrow x \text{ в } \tau\}, \text{ где } A \subset X.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ положим $S^{n+1}(A) = S(S^n(A))$.

Предложение 3.

1. Для каждого подмножества $A \subset X$ верно $A \subset S(A)$.
2. Если $A \subset B$ и B секвенциально замкнуто, то для любого $n \in \mathbb{N}$ $S^n(A) \subset B$.
3. Пусть $\{(X_j, \tau_j) \mid j \in J\}$ — семейство топологических пространств и на $\prod_{j \in J} X_j$ задана топология произведения, тогда $S(\prod_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} S(A_j)$, где $A_j \subset X_j$.

Доказательство.

1. Если $x \in A$, то последовательность $x_n = x$ ($n \in \mathbb{N}$) сходится к x и, следовательно, $x \in S(A)$.

2. Доказательство проведем индукцией по $n \in \mathbb{N}$. Пусть $n = 1$ и $x \in S(A)$, тогда найдется последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A \subset B$, которая сходится к x в топологии τ , откуда получаем, что $x \in B$, так как B секвенциально замкнуто, то есть $S(A) \subset B$. Пусть далее $S^n(A) \subset B$, проводя аналогичные рассуждения, как и для $n = 1$, получаем, что $S^{n+1}(A) \subset B$.

3. Через P_i ($i \in J$) обозначим операторы проектирования $\prod_{j \in J} X_j$ на X_i . Тогда последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \prod_{j \in J} X_j$ сходится в топологии произведения к элементу $x \in \prod_{j \in J} X_j$ тогда и только тогда, когда для любого $i \in J$ $P_i(x_n) \rightarrow P_i(x)$ в топологии τ_i (см., например, [3, с.129]), откуда и получаем требуемое равенство. ■

Из утверждения 2 следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ $S^n(A) \subset \text{scl } A$. В следующем примере показано, что для любого $n \in \mathbb{N}$ можно указать топологическое пространство X и его подмножество A , для которого $S^n(A) = \text{scl } A$, так же построено пространство X и множество $B \subset X$ такое, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n(B) \neq \text{scl } B$.

Пример 2. Рассмотрим множество $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с ком-

пактным носителем. Множества вида

$$V_\mu = \{x \in C_0(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \ |x(t)| \leq \mu(t)\}, \text{ где } \mu \in C(\mathbb{R}), \mu > 0$$

образуют базу окрестностей нуля (функции, тождественно равной нулю) некоторой линейной топологии τ на $C_0(\mathbb{R})$. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0(\mathbb{R})$ сходится в топологии τ к функции $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. Существует компакт K в $\mathbb{R}$ такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно включение $\text{supp } \varphi_n \subset K$.

2. На компакте K последовательность φ_n сходится к φ равномерно.

Действительно, пусть последовательность $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю в смысле условий 1, 2. Возьмем базисную окрестность нуля в топологии τ V_μ и положим $\alpha = \min_{t \in K} \mu(t)$, где K — компакт из условия 1, тогда $\alpha > 0$ в силу теоремы Вейерштрасса. Из условия 2 следует, что найдется номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n \geq n_0$, для любого $t \in \mathbb{R}$ $|\varphi_n(t)| < \alpha$, то есть $\varphi_n \in V_\mu$, и, следовательно, $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю в топологии τ .

Пусть теперь последовательность $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю в топологии τ . Тогда φ_n сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}$ (для доказательства этого достаточно в качестве функций μ из определения базисных окрестностей нуля брать сколь угодно малые постоянные). То есть нужно показать только выполнение условия 1. Предположим, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp } \varphi_n$ не ограничено сверху (случай неограниченности снизу рассматривается аналогично), тогда можно найти такие возрастающие последовательности $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ и $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, что $\varphi_{n_k}(t_k) \neq 0$. Положим $\mu(t_k) = \frac{|\varphi_{n_k}(t_k)|}{2}$ ($k \in \mathbb{N}$), $\mu(t) = \mu(t_1)$ при $t \leq t_1$, и на каждом из промежутков $[t_k, t_{k+1}]$ определим функцию μ как отрезок прямой, соединяющей точки $(t_k, \mu(t_k))$ и $(t_{k+1}, \mu(t_{k+1}))$ на плоскости. Таким образом, $\mu \in C(\mathbb{R})$ и $\mu > 0$, то есть V_μ — окрестность нуля в топологии τ . Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что для любого $n \geq n_0$ $\varphi_n \in V_\mu$. Однако

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists k \in \mathbb{N} : n_k \geq n \text{ и } |\varphi_{n_k}(t_k)| > \mu(t_k).$$

Полученное противоречие показывает, что $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp } \varphi_n$ ограничено сверху.

Таким образом, сходимость последовательности $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ к нулю в топологии τ равносильна сходимости ее к нулю в смысле условий 1, 2. Осталось лишь заметить, что φ_n сходится к φ (как в τ , так и в смысле условий 1, 2) тогда и только тогда, когда $\varphi_n - \varphi$ сходится к нулю.

Далее зафиксируем функцию $\varphi_0 \in C_0(\mathbb{R})$ такую, что $\varphi_0 \geq 0$ и $\varphi_0 \neq 0$ тождественно. Определим функции $\varphi_m(t) = \varphi_0(\frac{t}{m})$ ($m \in \mathbb{N}$) и, используя идею О.Г. Смолянова [6, с.15], рассмотрим множество

$$A_1 = \left\{ \frac{\varphi_0}{m} + \frac{\varphi_m}{k} \mid m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Покажем, что $S(A_1) \subsetneq S^2(A_1) = \text{scl } A_1$.

Рассмотрим последовательность функций $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A_1$, она определяется двумя последовательностями натуральных чисел $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ таких, что $\psi_n = \frac{\varphi_0}{m_n} + \frac{\varphi_{m_n}}{k_n}$. Если последовательность $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ не ограничена, то носители ψ_n не могут лежать в одном компакте (если $\varphi_0 \neq 0$ в точке $a \in \mathbb{R}$, то $\varphi_m \neq 0$ в точке ma и $\psi_n(m_na) \neq 0$). То есть, если ψ_n сходится в τ , то m_n ограничена. Далее, если k_n ограничена, то возможна сходимость лишь к элементу из A , если же k_n не ограничена, то ψ_n может сходиться только к функции вида $\frac{\varphi_0}{p}$ ($p \in \mathbb{N}$). Таким образом,

$$S(A_1) = A_1 \cup \left\{ \frac{\varphi_0}{p} \mid p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Причем функция $\phi \equiv 0$ не принадлежит $S(A_1)$, однако $\phi \in S^2(A_1)$, так как последовательность $\frac{\varphi_0}{p}$ сходится в топологии τ к ϕ при $p \rightarrow \infty$. Легко видеть, что $S^2(A_1) = S(A_1) \cup \{\phi\}$ и $S^2(A_1) = \text{scl } A_1$, потому что $S^2(A_1)$ содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей.

Далее определим функции $\varphi_{mn}(t) = \varphi_0 \left(\frac{t}{m+n} \right)$ ($m, n \in \mathbb{N}$) и зададим множество

$$A_2 = \left\{ \frac{\varphi_0}{m} + \frac{\varphi_m}{n} + \frac{\varphi_{mn}}{k} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Рассуждая аналогично, получаем, что

$$S(A_2) = A_2 \cup \left\{ \frac{\varphi_0}{m} + \frac{\varphi_m}{n} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

И далее

$$S^2(A_2) = S(A_2) \cup \left\{ \frac{\varphi_0}{p} \mid p \in \mathbb{N} \right\}.$$

То есть $\phi \in S^3(A_2) \setminus S^2(A_2)$ и $S^3(A_2) = S^2(A_2) \cup \{\phi\} = \text{scl } A_2$. Определяя $\varphi_{k_1 \dots k_n}(t) = \varphi_0 \left(\frac{t}{k_1 + \dots + k_n} \right)$, продолжаем строить множества A_n , причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\phi \in S^{n+1}(A_n) \setminus S^n(A_n)$ и $S^{n+1}(A_n) = S^n(A_n) \cup \{\phi\} = \text{scl } A_n$.

Теперь определим пространство $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, где $X_n = C_0(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}$), причем на X зададим топологию произведения. Рассмотрим подмножество $B = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ пространства X . Для $k \in \mathbb{N}$ имеем $S^k(B) = \prod_{n \in \mathbb{N}} S^k(A_n)$ (см. предложение 3). Так как $\phi \in S^{k+1}(A_k) \setminus S^k(A_k)$, то $S^k(B) \subsetneq S^{k+1}(B)$, следовательно, ни одно из множеств $S^k(B)$ ($k \in \mathbb{N}$) не является секвенциально замкнутым, то есть не может совпадать с секвенциальным замыканием B . Более того, множество $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n(B)$ также не совпадает с $\text{scl } B$. Действительно, рассмотрим последовательность $\{\Psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$, где $\Psi_n = (\phi, \dots, \phi, \rho_{n+1}, \rho_{n+2}, \dots)$, причем функция ϕ стоит на первых n местах, а на остальных стоят произвольные функции ρ_m из соответствующих множеств A_m . Тогда Ψ_n сходится к $\Psi = (\phi, \phi, \dots)$ в топологии произведения, однако Ψ не принадлежит C .

Далее наряду с X в тексте будет фигурировать еще одно топологическое пространство Y . Топологии, заданные на X и Y , будем обозначать τ_1 и τ_2 , а через $s\tau_1$, $s\tau_2$ обозначим секвенциальные топологии, ассоциированные с τ_1 и τ_2 , соответственно.

Предложение 4.

1. Секвенциально непрерывное отображение (X, τ_1) в (Y, τ_2) является непрерывным отображением $(X, s\tau_1)$ в $(Y, s\tau_2)$, верно и обратное.
2. Топологии τ_1 и $s\tau_1$ совпадают тогда и только тогда, когда каждое секвенциально непрерывное отображение (X, τ_1) в любое пространство (Y, τ_2) непрерывно.

Доказательство.

1. Секвенциально непрерывное отображение (X, τ_1) в (Y, τ_2) обозначим через f . Для доказательства непрерывности f покажем, что прообраз открытого множества открыт. Рассмотрим $V \in \text{Op}(Y, s\tau_2)$, покажем, что $f^{-1}(V) \in \text{Op}(X, s\tau_1)$. Воспользуемся критерием открытости в топологии $s\tau_1$ (см. предложение 1). Пусть $x \in f^{-1}(V)$ и последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к x в топологии τ_1 , тогда $f(x_n) \rightarrow f(x)$ в τ_2 (так как f — секвенциально непрерывно). Так как $f(x) \in V$ и V открыто в топологии $s\tau_2$, то по предложению 1 существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такой что для каждого $n \geq n_0$ $f(x_n) \in V$, следовательно, $x_n \in f^{-1}(V)$, откуда имеем $f^{-1}(V) \in \text{Op}(X, s\tau_1)$.

Покажем обратное. Пусть f является непрерывным отображением $(X, s\tau_1)$ в $(Y, s\tau_2)$ и последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится в топологии τ_1 к элементу $x \in X$. По утверждению 2 предложения 2 $x_n \rightarrow x$ в $s\tau_1$. Тогда $f(x_n) \rightarrow f(x)$ в топологии $s\tau_2$, откуда по тому же утверждению получаем, что $f(x_n) \rightarrow f(x)$ в τ_2 . Следовательно, отображение $f : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ секвенциально непрерывно.

2. Необходимость. Если f — секвенциально непрерывное отображение (X, τ_1) в (Y, τ_2) , то по утверждению 1 f непрерывно отображает (X, τ_1) в $(Y, s\tau_2)$. Пусть $V \subset Y$ — открытое множество в топологии τ_2 , так как $s\tau_2 \supseteq \tau_2$, то V открыто и в $s\tau_2$, следовательно, $f^{-1}(V)$ открыто в τ_1 . Таким образом, f является непрерывным отображением (X, τ_1) в (Y, τ_2) .

Достаточность. Нужно лишь показать, что $\tau_1 \supseteq s\tau_1$, так как топология $s\tau_1$ всегда мажорирует топологию τ_1 . Тожественное отображение I из (X, τ_1) в $(X, s\tau_1)$ секвенциально непрерывно (см. утверждение 2 предложения 2), следовательно, непрерывно. Пусть множество V открыто в $s\tau_1$, прообраз $I^{-1}(V)$ открыт в τ_1 , причем $I^{-1}(V) = V$, откуда получаем $\tau_1 \supseteq s\tau_1$. ■

Теорема 1. *Отображение f топологического пространства (X, τ_1) в топологическое пространство (Y, τ_2) секвенциально непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого подмножества A в X $f(\text{scl}_{\tau_1} A) \subset \text{scl}_{\tau_2} f(A)$.*

Доказательство. Так как $\text{scl}_{\tau_1} A = \text{cl}_{s\tau_1} A$ и $\text{scl}_{\tau_2} f(A) = \text{cl}_{s\tau_2} f(A)$, то приведенное выше включение равносильно следующему: $f(\text{cl}_{s\tau_1} A) \subset \text{cl}_{s\tau_2} f(A)$, которое в свою очередь выполнено в том и только в том случае, когда f непрерывно как отображение $(X, s\tau_1)$ в $(Y, s\tau_2)$ (см. [3, с.122]), после этого замечания теорема становится непосредственным следствием утверждения 1 предложения 4. ■

Уже в процессе подготовки статьи к печати выяснилось, что справедливость того, что прообраз секвенциально замкнутого множества при секвенциально непрерывном отображении секвенциально замкнут, а также необходимость утверждения теоремы 1 была установлена Е.В. Мельниковым в 1992 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельников Е.В. *Векторнозначные распределения и обобщенная корректность абстрактной задачи Коши.* / Омский гос. ун-т. Омск, 1988. Деп. ВИНТИ 15.03.1988. №1994 – В88. 79 с.
2. Мельников Е.В. *Топологические векторные пространства.* Методические указания. Омск: ОмГУ, 1990. 43 с.
3. Келли Дж.Л. *Общая топология.* М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1968. 384 с.
4. Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.: Мир, 1986. 752 с.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* М.: Мир, 1967. 250 с.
6. Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс.* М.: Наука, 1965. 328 с.

ОПИСАНИЕ ГЛАДКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СПИСКОВ ХАРАКТЕРИСТИК ОСОБЫХ ТОЧЕК

В.А. Стадников, С.Н. Чуканов

The method of the global description of dynamic systems on the base of the performances lists of DS singular points, invariant to maps of DS state vector is considered in the paper

Формальное описание гладких нелинейных динамических систем в форме Σ :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (1)$$

где $x \in M \in R^n$; $f \in R^n$, имеет недостаток, заключающийся в том, что при отображении вектора состояния

$$y = U(x); x = U^{-1}(y) \quad (2)$$

изменяется описание динамической системы. Найдем характеристики системы Σ , не зависящие от отображения $y = U(x)$, если это отображение является гладким и монотонным.

Отметим, что описание динамической системы (1) задает векторное поле:

$$\xi = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Напомним основные определения топологии особых точек векторных полей. Точка x_0 называется особой точкой векторного поля, если $f(x_0) = 0$; изолированной особой точкой, если $f(x) \neq 0$ в малой окрестности точки x_0 ; невырожденной (гиперболической) особой точкой, если $\det(f_x) \neq 0$ в точке x_0 . Степенью $\deg U$ гладкого отображения по отношению к правильному значению точки y называется сумма $\deg U = \sum_i \text{sgn}[\det(U(x_i))]$ по точкам отображения, удовлетворяющим условию $U(x_i) = y$. Заданием единичного векторного поля $n = f/|f|$ на многообразии $M \in R^n$ (при условии $f \neq 0$) определено отображение Гаусса

© 2003 В.А. Стадников, С.Н. Чуканов

E-mail: chukanov@iitam.omsk.net.ru

Омский филиал Института математики СО РАН

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 01-07-90003)

$n : M \rightarrow S^{n-1}$. Индексом изолированной особой точки x_0 векторного поля является степень отображения Гаусса: $\text{ind}_{x_0}(f) = \text{deg}(f|_{x=x_0})$ [2, 4].

Для системы, заданной соотношением (1) с вектором состояния x , соотношение с вектором состояния $y = U(x)$ можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \frac{dy}{dt} = f(U^{-1}(y)) \quad (4)$$

или в виде:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial(U^{-1}(y))}{\partial y}\right)^{-1} f(U^{-1}(y)), \quad (5)$$

то есть векторное поле $f(x)$ отображается в векторное поле:

$$F(y) = \left(\frac{\partial(U^{-1}(y))}{\partial y}\right)^{-1} f(U^{-1}(y)). \quad (6)$$

В окрестности особой точки x_0 векторного поля f можно записать выражение для роста первой степени:

$$f(x) \approx f_x (x - x_0), \quad (7)$$

то есть поведение системы описывается приближенным соотношением:

$$\frac{dx}{dt} \approx f_x (x - x_0). \quad (8)$$

Для отображения $y = U(x)$ в окрестности особой точки x_0 справедливо соотношение:

$$y(x) - y(x_0) \approx U_x (x - x_0), \quad (9)$$

и с учетом (6):

$$\frac{dy}{dt} \approx U_x f_x U_x^{-1} (y - U(x_0)). \quad (10)$$

Если $f_x \neq 0$ (выполняется для невырожденных особых точек) и $U_x \neq 0$ (выполняется при строгой монотонности U) в окрестности x_0 , то особой точкой системы (10) является $y_0 = U(x_0)$. Если эта особая точка является изолированной и невырожденной, то y_0 является особой точкой и для системы (5).

В частном случае, если система (1) является линейной Σ :

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (11)$$

и преобразовании (2) также является линейным:

$$y = Tx, \quad (12)$$

то соотношение (10) примет вид:

$$\frac{dy}{dt} = (TAT^{-1})y. \quad (13)$$

Инвариантами по отношению к отображению U являются собственные значения λ_i матрицы $U_x f_x U_x^{-1}$; в случае линейной системы – собственные значения матрицы $T A T^{-1}$. Для якобиана f_x можно сформировать симметрические функции от собственных значений $\sigma_i(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= 1; \\ \sigma_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n; \\ \sigma_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n; \\ &\dots \\ \sigma_n &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.\end{aligned}\tag{14}$$

а также их усредненные оценки:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= \sigma_1 n^{-1}; \\ \bar{\lambda}_2 &= (\sigma_2 (n!)^{-1} (n-2)! 2!)^{1/2}; \\ &\dots \\ \bar{\lambda}_i &= (\sigma_i (n!)^{-1} (n-i)! i!)^{1/i}; \\ &\dots \\ \bar{\lambda}_n &= (\sigma_n)^{1/n}.\end{aligned}\tag{15}$$

Таким образом, список собственных значений якобианов векторных полей в особых точках, а также симметрические функции от собственных значений и усредненные оценки симметрических функций являются характеристиками, инвариантными по отношению к преобразованию вектора состояния системы.

Другими характеристиками – инвариантными по отношению к преобразованию вектора состояния системы – является список индексов особых точек векторных полей. Число собственных значений якобиана f_x в особых точках векторных полей с отрицательными вещественными частями называется индексом Морса (Morse index) в этих точках. Якобианы f_x^1 и f_x^2 сопряжены, если они имеют одинаковый индекс; для сопряженных якобианов существует такая матрица h , что:

$$f_x^2 = h f_x^1 h^{-1}.$$

Выбором матрицы h можно добиться того, что f_x будет сопряжена с одной из матриц $L_i (0 \leq i \leq n)$, которые являются матрицами с диагональными единичными элементами и первыми i элементов которых – отрицательные [3]. Следовательно, в особых точках системам Σ с индексом i можно сопоставить линейные системы

$$\Sigma_L : \frac{dx}{dt} = L_i x,$$

формальное решение которых можно представить в виде: $x = A x_0$; где матрица A размерности $(n \times n)$ соответствует отображению $x|_{t=0} \rightarrow x|_{t>0}$.

Матрица A топологически сопряжена с одной из матриц вида:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \pm e^{-1} & & & & & & & \\ 0 & \pm e^{-1} & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pm e^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pm e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \pm e & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \pm e \end{array} \right\|$$

В этих матрицах i – диагональных компонент имеют абсолютное значение $e^{-1} < 1$; $n - i$ – диагональных компонент имеют абсолютное значение $e > 1$; при четном количестве отрицательных компонент на диагонали матрицы ориентация отображения сохраняется (детерминант положителен); при нечетном – ориентация отображения обращается (детерминант отрицателен).

Пусть на многообразии $M \in R^n$ определено векторное поле f и единичное векторное поле $n = f/|f|$ ($f \neq 0$), то есть определено отображение Гаусса $n : M \rightarrow S^{n-1}$. Если ∂M – граница M , то определена степень векторного поля n на ∂M : $\deg n|_{\partial M} [1]$:

$$\deg n|_{\partial M} = (V^n)^{-1} \int_{\partial M} \varepsilon_{ijk\dots} \varepsilon^{abc\dots} n^a (\partial n^b / \partial x^j) (\partial n^c / \partial x^k) \dots d^{n-1} \partial M_i,$$

где: $V_n = \int_{\partial M} \varepsilon_i^a \nu^a d^{n-1} \partial M_i$; ν – единичный вектор, нормальный к $d^{n-1} \partial M$; $d^{n-1} \partial M_i$ – проекция нормали к ∂M на i -е направление.

Если векторное поле f на многообразии $M \in R^n$ имеет m изолированных особых точек $x_1, \dots, x_m$, не принадлежащих границе ∂M , и векторное поле на ∂M направлено наружу, то $\deg n|_{\partial M} = \sum_i \text{ind}_{x_i}(f)$ (лемма Хопфа). Степень векторного поля $n = f/|f|$ на ∂M ($\deg n|_{\partial M}$) инвариантна по отношению к отображению: $y = U(x)$.

Рассмотрим пример динамической системы, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 (x_2^2 - 1); \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 (x_1^2 - 1). \end{aligned}$$

Якобиан векторного поля этой динамической системы равен:

$$f_x = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 3x_2^2 - 1 \\ -3x_1^2 + 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Список собственных значений якобиана и список индексов векторных полей в особых точках:

i	$(x_1; x_2)$	λ_1	λ_2	σ_1	σ_2	λ_1	λ_2	$ind(f_i)$
1	(0; 0)	1	-1	0	1	0, 5	1	-1
2	(1; 1)	-2	2	0	4	2	2	-1
3	(1; -1)	-2	2	0	4	2	2	-1
4	(-1; 1)	-2	2	0	4	2	2	-1
5	(-1; -1)	-2	2	0	4	2	2	-1

Если выбрать сферу с радиусом $R = 2$ (все особые точки находятся внутри сферы), то степень векторного поля на сфере, равная сумме индексов векторного поля внутри сферы, равна -5.

Отображение: $y_1 = 2x_1 + x_2$; $y_2 = x_1 - 2x_2$ с якобианом:

$$U_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$U_x^{-1} = \begin{vmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 \end{vmatrix},$$

откуда:

$$U_x f_x U_x^{-1}(y) =$$

$$= \begin{vmatrix} -1, 2(0,4y_1 + 0,2y_2)^2 + 1, 2x_2^2 & -0,6(0,4y_1 + 0,2y_2)^2 - 2,4(0,2y_1 - 0,4y_2)^2 + 1 \\ 2,4(0,4y_1 + 0,2y_2)^2 + 0,6(0,2y_1 - 0,4y_2)^2 - 1 & 1,2(0,4y_1 + 0,2y_2)^2 - 1,2(0,2y_1 - 0,4y_2)^2 \end{vmatrix}.$$

Система после отображения может быть описана соотношениями:

$$\frac{dy_1}{dt} = 2(0,2y_1 - 0,4y_2)((0,2y_1 - 0,4y_2)^2 - 1) - (0,4y_1 + 0,2y_2)((0,4y_1 + 0,2y_2)^2 - 1);$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (0,2y_1 - 0,4y_2)((0,2y_1 - 0,4y_2)^2 - 1) + 2(0,4y_1 + 0,2y_2)((0,4y_1 + 0,2y_2)^2 - 1).$$

Список собственных значений якобиана и список индексов векторных полей в особых точках:

i	$(y_1; y_2)$	λ_1	λ_2	σ_1	σ_2	λ_1	λ_2	$ind(F_i)$
1	(0; 0)	1	-1	0	1	0, 5	1	-1
2	(0, 6; -0, 2)	-2	2	0	4	2	2	-1
3	(0, 6; 0, 2)	-2	2	0	4	2	2	-1
4	(-0, 6; -0, 2)	-2	2	0	4	2	2	-1
5	(-0, 6; 0, 2)	-2	2	0	4	2	2	-1

Если выбрать сферу с радиусом $R = 1$ (все особые точки находятся внутри сферы), то степень векторного поля на сфере, равная сумме индексов векторного поля внутри сферы, равна -5. Таким образом, список собственных значений якобианов векторных полей в особых точках, список индексов

векторных полей в особых точках, а также сумма индексов векторного поля на сфере, содержащей все особые точки, не изменяются при отображении $y_1 = 2x_1 + x_2; y_2 = x_1 - 2x_2$; и являются инвариантными характеристиками, не зависящими от выбора описания вектора состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раджамаран Р. *Солитоны и инстантоны в КТП*. М.: Мир, 1985.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: методы и приложения*. М.: Наука, 1986.
3. Палис Ж., Ди Мелу В. *Геометрическая теория динамических систем*. М.: Мир, 1986.
4. Хирш М. *Дифференциальная топология*. М., 1979.

ТРАЕКТОРНЫЕ КРИВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Н.Чуканов

The method of the local description of the dynamic system trajectory on the base of the connection and the method of the connection forming from Frenet-Serret equations are considered in the paper.

Кривые в расслоениях. Пусть кривая c имеет вид $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Будем искать горизонтальную кривую c в пространстве расслоения, накрывающую c в базе и начинающуюся в заданной точке g_0 слоя $G = p^{-1}(x)$. В локальных координатах прямого произведения (g, x) в пространстве расслоения кривая c должна иметь вид $(g(t), x(t))$. Из условия горизонтальности касательного вектора $(dg(t)/dt, dx(t)/dt)$ будем иметь для формы связности [1]:

$$\omega = \omega^0 + g(A_\mu dx^\mu)g^{-1}; \quad (1)$$

$$\omega \left(\frac{dg(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt} \right) = -\frac{dg(t)}{dt} g^{-1}(t) + \frac{dx^\mu(t)}{dt} g(t) A_\mu(x(t)) g^{-1}(t) = 0. \quad (2)$$

Обозначая через $B(t) = dx^\mu/dt A_\mu(x)$. Тогда для функции $g(t)$ получим уравнение: $dg/dt - gB = 0$.

Если слой F расслоения – векторное пространство R^m и группа G действует линейно, то элементы ξ алгебры Ли g можно считать матрицами $A_\xi : R^m \rightarrow R^m$. Пусть $\eta^1, \dots, \eta^m$ – координаты в слое R^m . Если $A_\xi = (a_i^j)$, то поле $A_\mu(x)$ имеет матричный вид: $A_\mu(x) = (A_\mu(x))_i^j = a_{i\mu}^j(x)$ – матрица в $R^m : \xi^j = a_i^j \eta^i$.

Таким образом, в векторном расслоении со слоем R^m связность задается (локально) матрицей, зависящей от x и $\mu : a_{j\mu}^i(x); i, j = 1, \dots, m; \mu = 1, \dots, n = \dim M$, или матричнозначной формой $a_{j\mu}^i dx^\mu = A_\mu dx^\mu$.

Если само расслоение – касательное расслоение многообразия M (со слоем R^n), то имеет смысл говорить о кручении: $a_{j\mu}^i - a_{\mu j}^i = T_{\mu j}^i = -T_{j\mu}^i$ (тензор в M) и о симметричности связности, если $T_{\mu j}^i = 0$.

Параллельный перенос слоя F вдоль пути $c(t)$ в базе является линейным преобразованием. В локальных координатах $x_a^1, \dots, x_a^n$ области $U_a \subset M$ определяется оператор ковариантного дифференцирования сечений векторного расслоения:

$$\nabla_\mu \psi^i(x) = \frac{\partial \psi^i(x)}{\partial x^\mu} + a_{jm}^i(x) \psi^j(x). \quad (3)$$

Для гладкой кривой $c : x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), 0 \leq t \leq 1$, линейный оператор параллельного переноса слоя вдоль пути из точки $c(0)$ в точку $c(1)$ формируется хронологической экспонентой [2]: $T \exp \int_0^1 (d/dt - \nabla_{dc/dt}) dt$. Выражение $T \exp \int_0^t (A(\tau) d\tau) = B(t)$ удовлетворяет уравнению: $dB/dt = [A(t), B(t)]$, а вектор $\eta(t) = B(t)\eta_0$ удовлетворяет уравнению $d\eta(t)/dt = A(t)\eta(t)$. Полагая $A(t) = d/dt - \nabla_{dc/dt}$ для гладкой кривой $c(t)$, получим оператор параллельного переноса вдоль кривой. Параллельный перенос определяется из уравнения:

$$\nabla_{\frac{dc}{dt}} \eta(t) = \frac{dx^\mu}{dt} \nabla_\mu \eta(t) = 0 \quad (4)$$

или:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^i(t)}{dt} + a_{j\mu}^i(t) \frac{dx^\mu}{dt} \eta^j(t) &= 0; \\ d\eta^i(t) &= -a_{j\mu}^i(t) dx^\mu \eta^j(t). \end{aligned} \quad (5)$$

В этом случае имеем:

$$A(t) = \frac{d}{dt} - \nabla_{\frac{dc}{dt}} = -a_{j\mu}^i(t) \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (6)$$

Для динамической системы $\frac{dx}{dt} = f(x); x = (x^1, \dots, x^n); f = (f^1, \dots, f^n)$ с вектором начальных условий $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ уравнения (5) могут быть записаны в виде:

$$\frac{df^i}{dx_0^\mu} = -a_{j\mu}^i f^j. \quad (7)$$

Рассмотрим пример динамической системы – линейный гармонический осциллятор:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \omega * x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega * x_1, \end{aligned}$$

для которого построим сопровождающий репер в каждой точке многообразия – базы:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= (-x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5}; x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5}); \\ \nu_1 &= (x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5}; x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5}). \end{aligned}$$

Далее, предположим, при $t = 0 : x_2 = 0; x_1 > 0; \nu_0 = (0; 1)$ – касательный вектор; $\nu_1 = (1; 0)$ – нормальный вектор. Для любой точки базы введем параметр θ :

$$\begin{aligned}\theta &= \arctg(x_2 x_1^{-1}); \text{ if } x_2 \geq 0; \\ \theta &= \pi + \arctg(x_2 x_1^{-1}); \text{ if } x_2 < 0.\end{aligned}$$

Тогда любым x_1, x_2 можно сопоставить элемент однопараметрической группы $g \in SO(1)$:

$$\begin{aligned}g(t) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{vmatrix} \\ g^{-1}(t) &= \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{vmatrix} \\ (dg/dt)g^{-1} &= \begin{vmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Компоненты матрицы A_0 (индекс μ соответствует индексам векторов ν_0, ν_1):

$$a_{00}^0 = a_{10}^1 = 0; a_{10}^0 = -a_{00}^1 = -(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5};$$

матрицы $A_1: a_{01}^0 = a_{11}^1 = 1; a_{11}^0 = a_{01}^1 = 0$. Компоненты тензора кручения $T_{mj}^i = a_{jm}^i - a_{mj}^i$:

$$T_{01}^0 = -T_{10}^0 = a_{01}^0 - a_{10}^0 = 1 + (x_1^2 + x_2^2)^{-0,5};$$

$$T_{01}^1 = -T_{10}^1 = a_{01}^1 - a_{10}^1 = 0; T_{00}^0 = T_{11}^0 = T_{00}^1 = T_{11}^1 = 0.$$

Форма связности определяется из соотношений (1), (2).

Построение сопровождающего репера, связанного с кривой. Рассмотрим кривую, задаваемую вектором $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, где x^i предполагаются гладкими функциями от t с не обращающимися в нуль одновременно производными. В каждой точке кривой составляем касательный вектор ξ с компонентами $\xi^i(t) = dx^i(t)/dt$. Выпишем последовательность векторов: $\xi(t), d\xi(t)/dt, \dots, d^{n-1}\xi(t)/dt^{n-1}$ в точке кривой. Рассмотрим случай, когда эти n векторов будут в каждой точке линейно независимы. Построим p -ю соприкасающуюся плоскость в касательном пространстве R^n , проходящую через точку и построенную на первых p векторах $R^p : R^1 \subset \dots \subset R^p \subset R^{p+1} \dots R^{n-1}$. Далее построим ортонормированный сопровождающий репер, связанный с каждой точкой кривой, с ортами $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$:

$$\nu_0 = \xi/|\xi|; (\nu_1 \in R^2) \wedge (\nu_1 \perp R^1), \dots, (\nu_p \in R^{p+1}) \wedge (\nu_p \perp R^p), \dots, (\nu_{n-1} \perp R^{n-1}).$$

Орт ν_0 – касательный к кривой; ν_j ($j = 1, \dots, n-1$) – нормаль к кривой. Для определения ортов $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ по производным $dx(t)/dt, \dots, d^{n-1}x(t)/dt^{n-1}$ можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 [l] \frac{d\xi(t)}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} \nu_0 + \xi \frac{d\nu_0}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \nu_0 + \xi \kappa_1 \nu_1; \\
 \nu_1 &= (\xi \kappa_1)^{-1} \left(\frac{d\xi(t)}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \nu_0 \right); \\
 &\dots \\
 \frac{d^p \xi(t)}{dt^p} &= \frac{d(\xi^{[p-1]} \nu_{\xi^{[p-1]}})}{dt} = \\
 &= \frac{d\xi^{[p-1]}}{dt} \nu_{\xi^{[p-1]}} + \xi^{[p-1]} \frac{d\nu_{\xi^{[p-1]}}}{dt} = \frac{d\xi^{[p-1]}}{dt} \nu_{\xi^{[p-1]}} + \xi^{[p-1]} k_p \nu_p; \\
 \nu_p &= (\xi^{[p-1]} k_p)^{-1} \left(\frac{d^p \xi(t)}{dt^p} - \frac{d\xi^{[p-1]}}{dt} \nu_{\xi^{[p-1]}} \right); \dots \\
 \frac{d^{n-1} \xi(t)}{dt^{n-1}} &= \frac{d(\xi^{[n-2]} \nu_{\xi^{[n-2]}})}{dt} = \\
 &= \frac{d\xi^{[n-2]}}{dt} \nu_{\xi^{[n-2]}} + \xi^{[n-2]} \frac{d\nu_{\xi^{[n-2]}}}{dt} = \frac{d\xi^{[n-2]}}{dt} \nu_{\xi^{[n-2]}} + \xi^{[n-2]} k_{n-1} \nu_{n-1}; \\
 \nu_{n-1} &= (\xi^{[n-2]} k_{n-1})^{-1} \left(\frac{d^{n-1} \xi(t)}{dt^{n-1}} - \frac{d\xi^{[n-2]}}{dt} \nu_{\xi^{[n-2]}} \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Коэффициенты k_p определяются из условия нормирования ортов:

$$k_p = (\xi^{[p-1]})^{-1} \left| \frac{d^p}{\xi(t) dt^p} - \frac{d\xi^{[p-1]}}{dt} \nu_{\xi^{[p-1]}} \right|. \tag{9}$$

Для производных $d\nu_0/dt, \dots, d\nu_{n-1}/dt$ ортов сопровождающего репера кривой в евклидовом пространстве R^n запишем соотношения Френе-Серре [3]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\nu_0}{dt} &= \kappa_1 \nu_1; \\
 \frac{d\nu_1}{dt} &= -\kappa_1 \nu_0 + \kappa_2 \nu_2; \\
 &\dots \\
 \frac{d\nu_p}{dt} &= -\kappa_p \nu_{p-1} + \kappa_{p+1} \nu_{p+1}; \\
 &\dots \\
 \frac{d\nu_{n-1}}{dt} &= -\kappa_{n-1} \nu_{n-2},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $p = 0 \dots n-1$; если: $(p < 1) \vee (p > n-1)$; то $\kappa_p = 0$ или в матричной форме:

$$\frac{dN}{dt} = KN, \tag{11}$$

где матрицы N и K задаются соотношениями:

$$N = (\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1});$$

$$K = \begin{vmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Коэффициент κ_j называется j – кривизной кривой в данной точке. Исходя из соотношений Френе-Серре получим способ определения $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ и $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ по индукции:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \left| \frac{d\nu_0}{dt} \right|; \nu_1 = \kappa_1^{-1} \frac{d\nu_0}{dt}; \\ \kappa_2 &= \left| \frac{d\nu_1}{dt} + \kappa_1 \nu_0 \right|; \nu_2 = \kappa_2^{-1} \left(\frac{d\nu_1}{dt} + \kappa_1 \nu_0 \right); \\ \dots & \\ \kappa_p &= \left| \frac{d\nu_{p-1}}{dt} + \kappa_{p-1} \nu_{p-2} \right|; \nu_p = \kappa_p^{-1} \left(\frac{d\nu_{p-1}}{dt} + \kappa_{p-1} \nu_{p-2} \right); \\ \dots & \\ \kappa_{n-1} &= \left| \frac{d\nu_{n-2}}{dt} + \kappa_{n-2} \nu_{n-3} \right|; \nu_{n-1} = \kappa_{n-1}^{-1} \left(\frac{d\nu_{n-2}}{dt} + \kappa_{n-2} \nu_{n-3} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Формирование аффинной связности по сопровождающему реперу.

Гладкому векторному полю $f(x)$ и вектору $x(0)$ сопоставим кривую s , задаваемую вектором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ с $x(0) = x(t)|_{t=0}$ и $dx(t)/dt = f(x)$. Перепишем соотношения Френе-Серре в форме разложения до первой степени по dx/dt :

$$\frac{d\nu^i}{dt} = K_j^i \nu^j \approx \sum_{jk} \Gamma_{jk}^i \nu^j \frac{dx^k}{dt}, \quad (13)$$

где $\Gamma_{jk}^i = (\partial K_j^i / \partial(dx_k/dt))$. Соотношения Френе-Серре в такой форме позволяют определить аффинную связность локально – с помощью символов Кристоффеля Γ_{jk}^i .

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: методы и приложения*. М.: Наука, 1986.
2. Шварц А.С. *Квантовая теория поля и топология*. М.: Наука, 1989.
3. Arreaga G., Capovilla R., Guven J. *Frenet-Serret dynamics*. Los Alamos E-paper: hep-th/0105040 (2001).

РЕАЛИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НА ОСНОВЕ КВАНТОВОГО НЕЙРОНА

С.В. Белим, С.Ю. Белим

The two possible realizations of the quantum neuron are considered. It is shown that the most simplest realization of the quantum neuron complies with classical neuron. Will built quantum neuron allowing realize all logical operations.

Как известно, обучение формального нейрона с целью реализации логических операций сталкивается с рядом трудностей [1]. Эти проблемы связаны прежде всего с задачей отделения. Некоторые алгоритмы не удастся реализовать на отдельно взятом нейроне, например логическую схему «исключающее или».

Ряд проблем снимается, если реализовать нейрон как квантовую систему. Как всякий квантовый объект, нейрон находится в неопределенном состоянии до процесса измерения. В качестве такого процесса возбуждения, переводящего нейрон в определенное состояние, можно рассматривать наличие входного сигнала на синапсах нейрона. Переход в конкретное состояние приводит к появлению определенного сигнала на выходе нейрона. До подачи входного сигнала может быть определена лишь вероятность нахождения нейрона в некотором состоянии.

Рассмотрим две возможные реализации квантового нейрона. Пусть состояние невозбужденного нейрона описывается функцией состояния:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N c_i \Psi_i, \quad (1)$$

где N – количество синапсов, c_i – весовые коэффициенты, Ψ_i – набор ортонормированных функций:

$$\int \Psi_i^* \Psi_j dV = \delta_{ij}, \quad (2)$$

δ_{ij} – символ Кронекера, Ψ_i^* – функция комплексно сопряженная Ψ_i .

Пусть x_i – сигнал, подаваемый на i -й синапс. Входной сигнал мы можем рассматривать как состояние с функцией состояния:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N x_i \Psi_i^*. \quad (3)$$

Тогда возбуждение нейрона будет определяться проекцией функции состояния нейрона на состояние входного сигнала:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{i,k=1}^N c_i x_k \int \Psi_i^* \Psi_k dV. \quad (4)$$

В силу ортонормированности функций получаем

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{i,k=1}^N c_i x_i. \quad (5)$$

Пусть y – выходной сигнал, принимающий значение нуль, если нейрон в невозбужденном состоянии, и единица, если в возбужденном. В качестве синаптической функции отклика выберем ступенчатую Θ -функцию:

$$\Theta(\nu) = \begin{cases} 1, & \nu > 0; \\ 0, & \nu \leq 0, \end{cases} \quad (6)$$

то есть

$$y = \Theta(\langle \Phi | \Psi \rangle - u_0), \quad (7)$$

где u_0 – пороговое возбуждение. Нейрон не реагирует на сигналы меньше u_0 и реагирует на сигналы больше u_0 .

Подстановка (5) в (7) дает:

$$y = \Theta \left(\sum_{i=1}^N c_i x_i - u_0 \right). \quad (8)$$

Данная модель совпадает с классическим нейроном, в котором происходит линейное суммирование входных сигналов с весами. Задача обучения такого нейрона сводится к нахождению весовых коэффициентов c_i и порогового значения u_0 . Однако существует ряд задач, неразрешимых в рамках такого нейрона и требующих построения персептронов.

Другой возможной реализацией квантового нейрона является рассмотрение значений входного сигнала как квантовых чисел входного состояния, на которое проектируется нейрон. Это приводит к ограничению возможных значений входного сигнала рациональным множеством чисел.

Нейрон описывается волновой функцией:

$$\Psi = \sum_{n1, \dots, nk} c_{n1, \dots, nk} \Psi(n1, \dots, nk). \quad (9)$$

Входному сигналу будем сопоставлять функцию состояния:

$$\Phi = \Psi(n1, \dots, nk). \quad (10)$$

Соответственно выходной сигнал формируется с помощью функции отклика:

$$y = \Theta(\langle \Phi | \Psi \rangle - u_0). \quad (11)$$

Обучение такого нейрона также сводится к выбору значений коэффициентов $c_{n1, \dots, nk}$ и порога возбуждения u_0 .

Рассмотрим реализацию логической операции «исключающее ИЛИ», невозможную в рамках классического нейрона. Пусть нейрон имеет два синаптических входа, то есть входной вектор $X = (x_1, x_2)$, $x_i = 0, 1$. Потребуем, чтобы выходной сигнал был нулевым ($y = 0$), если $X = (0, 0)$ или $X = (1, 1)$, и единичным ($y = 1$), если $X = (1, 0)$ или $X = (0, 1)$.

В качестве ортонормированного базиса выберем собственные функции системы двух частиц со спином $1/2$ каждая. Проекция спина каждой частицы может принимать значения $+1/2$ и $-1/2$. Функция состояния нейрона с учетом принципа неразличимости частиц может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \Psi = & 0 \cdot \Psi_1(1/2)\Psi_2(1/2) + 0 \cdot \Psi_1(-1/2)\Psi_2(-1/2) + \\ & + 1 \cdot \Psi_1(1/2)\Psi_2(-1/2) + 1 \cdot \Psi_1(-1/2)\Psi_2(1/2). \end{aligned} \quad (12)$$

Входной сигнал будем формировать следующим образом:

$$\Phi = \Psi_1(x_1 - 1/2)\Psi_2(x_2 - 1/2). \quad (13)$$

Выходной сигнал будем формировать с помощью все той же ступенчатой функции:

$$y = \Theta(\langle \Phi | \Psi \rangle - 1/2). \quad (14)$$

Используя условие нормировки

$$\int \Psi_{i1}^*(s_{i2})\Psi_{j1}(s_{j2})dV = \delta_{i1j1}\delta_{i2j2}, \quad (15)$$

получаем нейрон с искомыми свойствами.

Таким образом, квантовый нейрон первого типа эквивалентен классическому нейрону. Квантовый же нейрон второго типа позволяет реализовать все элементарные логические функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбань А.Н., Дунин-Барковский В.Л., Кирдин А.Н. и др. *Нейроинформатика*. Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН. 1998. 296с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НУКЛЕАЦИИ ОКСАЛАТА КАЛЬЦИЯ

О.А. Голованова, В.А. Когут, Е.В. Желяев

The mathematical model of oxalates crystallization based on Fokker-Plank equation is builded and its properties are studied. Numerical robust method solving nonlinear boundary problem is developed. Crystallization process with periodical circles of kidney filling and depletion is explored and relation between average crystal radius and circles count is determined.

Введение

Кристаллизация – один из важнейших процессов, протекающих в природе. Дисперсная фаза может образовываться путем фазового перехода из любого неупорядоченного состояния: из паров, растворов, расплавов и т.д. Процесс кристаллизации всегда осуществляется в два этапа, независимо от того, идет ли кристаллизация в газовой, жидкой или твердой фазе. Первый этап – это возникновение субмикроскопического зародыша кристаллической фазы, способного к дальнейшему росту. Второй этап – дальнейший рост этого зародыша. Вероятность образования зародышей зависит от степени пересыщения (или переохлаждения): если эта степень незначительна, то вероятность зарождения новой фазы может быть крайне малой, т.е. практически зарождение не начнется.

Было установлено, что при кристаллизации оксалата кальция из сильно пересыщенных растворов выделяются микроскопические монокристаллы различной формы, нормально распределенные по размеру. Распределение кристаллов по размеру согласуется с представлением об одновременном появлении центров кристаллизации и их флуктуативном росте в соответствии с уравнением Фоккера-Планка.

В данном исследовании ограничимся рассмотрением пространственно-одномерной нелинейной задачи кристаллизации в закрытой системе. Изучаются нелинейные свойства уравнения Фоккера-Планка при заданных соотношениях баланса массы. Это приводит к рассмотрению задачи, в которой нелинейность определяется зависимостью граничных условий и коэффициентов уравнения от предыстории развития процесса кристаллизации. Рассмотренные в данной ра-

боте нелинейные явления могут являться основой самоорганизации дисперсной твердой фазы на завершающей стадии ее формирования.

В натуральных экспериментах наблюдаются сложные механизмы эволюции дисперсной фазы, такие как образование метастабильных промежуточных твердых фаз и медленная эволюция (созревание) частиц твердой фазы в конце процесса. Проведенные исследования нелинейных моделей позволяют объяснить механизм этих превращений и определить кинетику процессов. Ранее исследовались линеаризованные модели и был развит термодинамический подход для исследования созревания дисперсной фазы при образовании капель. В данном исследовании уделено большее внимание влиянию нелинейности процессов кристаллизации при наличии флуктуации скорости роста частиц фазы для закрытой системы.

В работе сформулирована математическая модель кристаллизации с использованием уравнения Фоккера-Планка. Модель включает спонтанную нуклеацию, кинетический режим роста частиц и балансные соотношения для закрытой системы.

1. Физико-химическая модель

Предполагается, что кристаллизация возникает в дистальных отделах нефрона, имеющих ограниченный объем V , в момент времени $t = 0$ содержится однородно пересыщенный раствор оксалата кальция. Если концентрация Q превышает растворимость частиц оксалата кальция, то происходит зарождение и рост частиц твердой дисперсной. При протекании кристаллизации часто наблюдается образование нескольких кристаллических и аморфной модификаций частиц дисперсной твердой фазы.

Пренебрегая теплом химической реакции, примем, что в нефроне поддерживается постоянная температура раствора. Считаем, что перемешивание не приводит к раскалыванию и агрегированию.

Массовая кристаллизация включает несколько этапов процесса: зарождение центров кристаллизации частиц дисперсной фазы (нуклеация), рост и растворение частиц.

Спонтанная нуклеация протекает следующим образом - происходит образование и рост кластеров из молекул реагентов вплоть до размера, при котором возможно выделить грань кристалла как структурный элемент, ответственный за рост.

Интенсивность спонтанной нуклеации и скорости роста или растворения частиц дисперсной фазы связана с пересыщением раствора и размером грани кристалла известными зависимостями. Эти зависимости определяют существенное влияние предшествующей кинетики кристаллизации на процесс, что является примером нелинейных явлений при кристаллизации в закрытых системах.

2. Математическая модель

Для описания процесса кристаллизации использовалась математическая модель, основанная на функции φ распределения кристаллов по размеру (L) во времени (t). Все макропараметры, такие как температура и концентрация, считаются постоянными во всем объеме раствора. Эволюция функции распределения описывается уравнением Фоккера-Планка [1]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial(\varphi G)}{\partial L} + \frac{\partial}{\partial L} \left(p \frac{\partial(\varphi G)}{\partial L} \right). \quad (1)$$

Причем $L \geq L_0$, где L_0 является минимально возможным размером кристалла. Функция G является линейной скоростью роста грани кристалла параллельно самой себе, p – коэффициент флуктуации скорости роста. Определим пресыщение раствора ξ следующим образом: $\xi(t) = c(t)/C_\infty$, где $c(t)$ – это концентрация, а C_∞ – это концентрация насыщенного раствора. Тогда

$$G = \beta(\xi^n - 1), \quad (2)$$

где β – кинетический коэффициент скорости роста, n – порядок реакции. Уравнение (1) должно быть дополнено краевыми условиями

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \varphi(L, t) = 0, \quad (3)$$

которое означает отсутствие бесконечно больших кристаллов. Его можно заменить условием $\varphi(L_1) = 0$. На левом крае задается условие смешанного типа:

$$\varphi(L_0)G - p \frac{\partial(\varphi(L_0)G)}{\partial L} = \gamma(\xi^m - 1), \quad (4)$$

где γ – кинетический коэффициент, m – порядок реакции нуклеации.

Систему уравнений необходимо дополнить начальным условием и уравнением баланса. Рассматривался процесс спонтанной нуклеации (то есть в начальный момент времени в растворе отсутствуют кристаллы), что выражается формулой $\varphi(L, 0) = 0$. Уравнение баланса массы описывает сохранение вещества:

$$M_0 = c(t)V + \int_{L_0}^{L_1} \varphi(L, t)L^3 dL. \quad (5)$$

Таким образом, мы имеем нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений. Уравнение (1) является квазипараболическим.

3. Разностная схема

Для численного решения системы уравнений использовалась равномерная сетка с шагом h по размеру и t по времени. Перенос решения с j -го слоя



Рис. 1. Изображены три кривые для трех моментов времени (две очень близки).

на $(j + 1)$ -й осуществляется чистонеявной разностной схемой, после чего происходит пересчет функции G .

Разностное уравнение для уравнения (1) имеет вид:

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} = -\frac{G^j}{2h}(\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1}) + \frac{pG^j}{h^2}(\varphi_{i+1}^{j+1} - 2\varphi_i^{j+1} + \varphi_{i-1}^{j+1}). \quad (6)$$

Уравнение имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Разностное уравнение для левого краевого условия (4) имеет вид

$$\varphi_*^{j+1} 0G^j - pG^j \frac{\varphi_1^{j+1} - \varphi_0^{j+1}}{h} + pG^j \frac{\varphi_0^j - 2\varphi_1^j + \varphi_2^j}{h^2} = \eta^j. \quad (7)$$

Уравнение имеет порядок аппроксимации $O(\tau + \tau h + h^2)$. Для решения разностных уравнений применялся метод прогонки, который применим в силу диагонального преобладания. Разностная схема (6), (7) является устойчивой по правой части. После переноса решения на $(j + 1)$ -й слой вычислялось новое значение концентрации (а также G и η). Вычисление интеграла производилось методом трапеций – его точность имеет порядок $O(h^2)$, что соответствует аппроксимации разностной схемы. Полученное значение концентрации повторно использовалось для нахождения решения на $(j + 1)$ -м слое. Данная процедура повторялась фиксированное число раз.

4. Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительного эксперимента была написана программа в среде Borland C++ Builder. Плотность распределения кристаллов в различные моменты времени приведена на рис. 1.

При рассмотрении процесса кристаллизации CaC_2O_4 в соответствии с данной моделью авторами были получены следующие зависимости, представленные на рис. 2. Из рис. 2 видно, что основная масса кристаллов образуется в

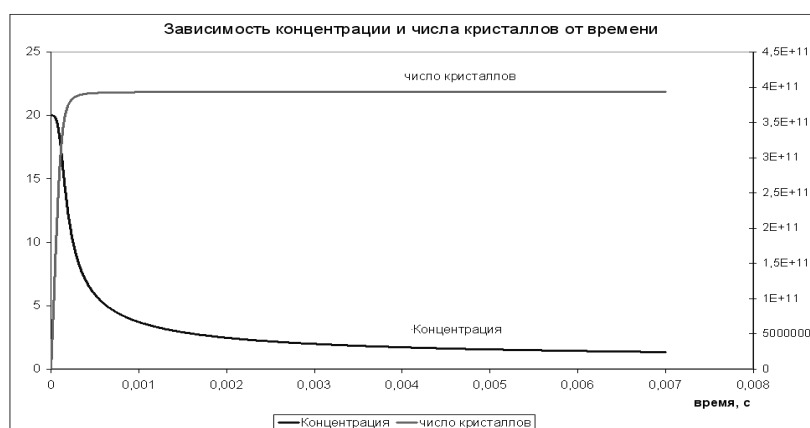


Рис. 2. Зависимость концентрации и числа кристаллов от времени.

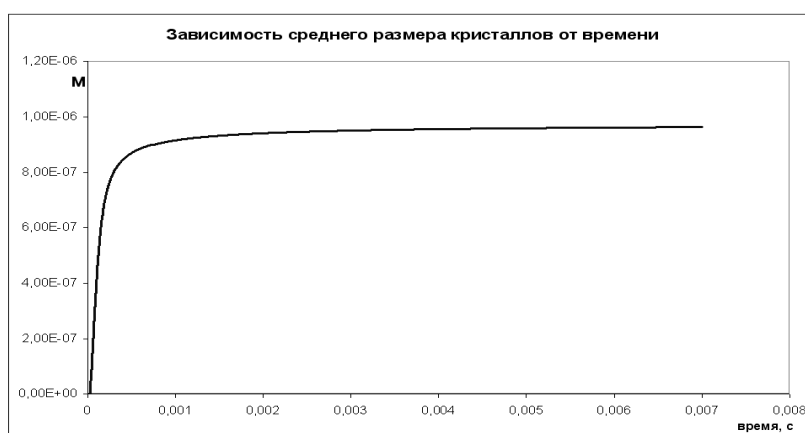


Рис. 3. Зависимость среднего размера кристаллов от времени.

течение очень малого промежутка времени $5 \cdot 10^{-4}$ с, при этом происходит значительное уменьшение пересыщения от $\xi = 20$ до $\xi = 6$. При дальнейшем протекании кристаллизации наблюдается плавное снятие пересыщения при постоянном числе зародышей, это объясняется нульмерным ростом уже существующих кристаллов.

Соответственно при этом наблюдается увеличение среднего размера образовавшихся кристаллов, рис. 3.

Кроме того, вычисления проводились следующим образом: после проведения расчета в объеме восстанавливалась исходная концентрация, кристаллы, размер которых был меньше порогового значения, изымались и вычислительный эксперимент повторялся, но теперь уже с полученным на предыдущей итерации начальным условием. Данный прием соответствует опорожнению и наполнению почки.

Было установлено, что увеличение среднего размера кристалла пропорционально квадратному корню от числа итераций эксперимента. Зависимость приведена на рис. 4.

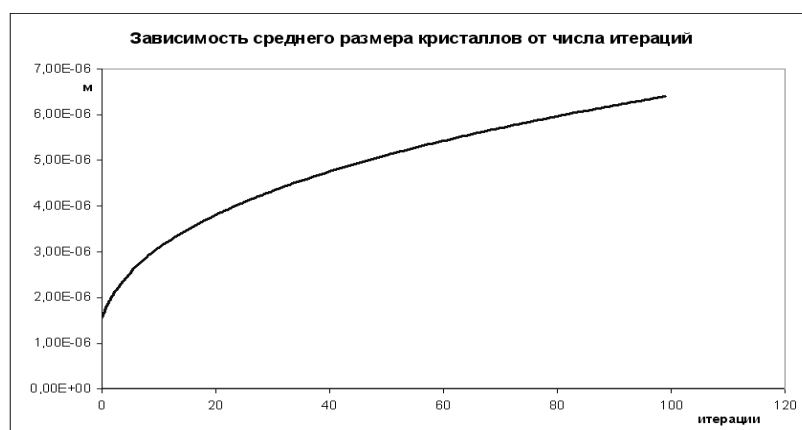


Рис. 4. Зависимость среднего размера кристаллов от числа итераций.

5. Заключение

Авторами была рассмотрена модель кристаллизации, основанная на уравнении Фоккера-Планка для плотности распределения кристаллов. Вопрос о существовании и единственности решения системы уравнений (1)-(5) остается открытым. Численное решение данной системы позволяет сделать вывод о том, что данная модель описывает процесс нуклеации, изучение же процесса роста кристаллов с помощью данной модели затруднительно, поскольку основная часть растворенного вещества поглощается при нуклеации и рост кристаллов практически не наблюдается. В дальнейшем планируется рассмотрение моделей, описывающих процесс роста кристаллов с учетом результатов о процессе нуклеации, представленных в этой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачевский А.Я. Численное исследование нелинейных моделей кристаллизации // Математическое моделирование. 1999. Т.11, № 8. С.23-31.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ВЕЩЕСТВО

О.Т. Данилова, Ф.В. Коржов

In given work are presented main positions to make models of the influence elektromagnetic field on structured change material. Model allows to get information on nature thermodynamic and elektromagnetic parameter in system, value the direct energy influence on material of the complex composition for the reason speedups of the reactions reconstruction useful components.

Введение

Проблема использования непосредственного энергетического воздействия на вещество сложного состава с целью интенсификации реакций и достижения высокой степени восстановления полезной компоненты находится на стыке нескольких наук: математики, физики, химии. Электромагнитные поля влияют на кинетику химических реакций и термодинамику фазовых превращений, в сильных электрических полях меняется скорость, выход и даже направление химических реакций. В данной работе представлена структура модели влияния электромагнитного поля на вещество [3].

Структура модели

На основании обзора теории и методов высокочастотного воздействия, термодинамики и химических свойств оксидов разработана модель расчета, позволяющая получить информацию о характере электромагнитных и термодинамических и иных параметров в системе. Модель состоит из трех основных блоков: информационно-логического (I), теплового (II) и электрического (III). В информационно-логическом блоке осуществляется ввод/вывод информации; задаются максимально и минимально допустимые частоты; токи; напряженность поля E – не приводящая к пробое; осуществляется взаимодействие модулей программы, определяемой конкретной структурой вещества, а также изменением его свойств в электромагнитном поле и режима работы технологической

© 2003 О.Т. Данилова, Ф.В. Коржов

E-mail: kfv@netti.ru, danilova@univer.omsk.su

Омский государственный университет

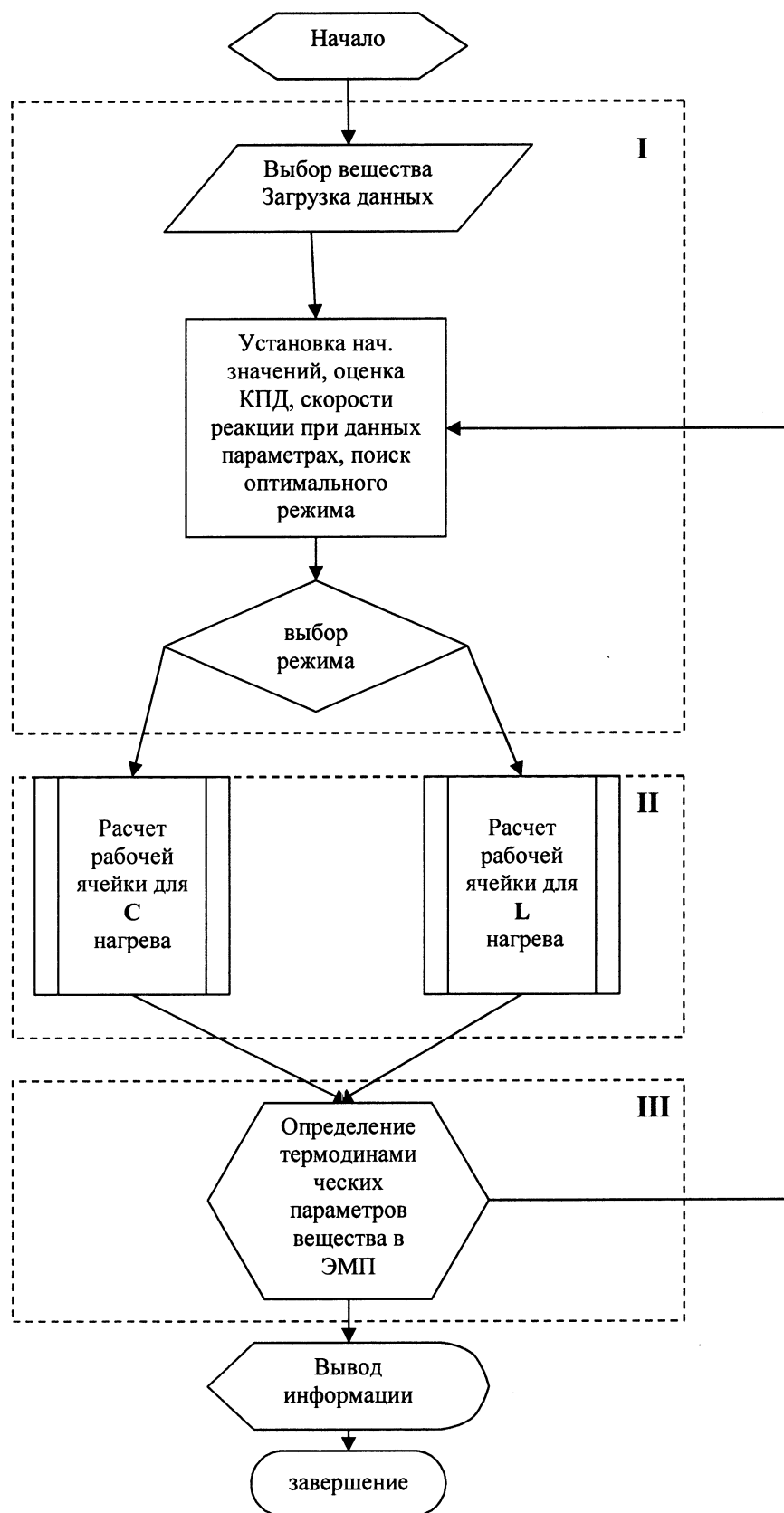


Рис. 1. Блок-схема модели.

установки; здесь же производится выбор наиболее оптимального решения поставленной задачи; позволяет определить необходимую частоту, мощность для достижения максимального КПД установки. Принято во внимание следующее: в отличие от индукционного нагрева металлов при диэлектрическом нагреве диэлектриков поверхностный эффект является вредным, так как приводит к неравномерному распределению температуры, которая не может выровняться из-за низкой теплопроводности диэлектриков; во избежание заметных проявлений поверхностного эффекта подбирается такая частота поля, чтобы глубина проникновения в 3-4 раза превосходила размеры нагреваемого тела.

Так как нагреваемое тело имеет конечные размеры, то из-за отражения электромагнитных волн от границ тела внутри него устанавливаются стоячие волны подобно тому, что происходит в электрических цепях с распределенными параметрами. Это явление в сочетании с поверхностным эффектом может приводить к весьма сложной картине распределения поля по объему тела. У большинства диэлектриков относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$. При этих ограничениях условие выбора частоты имеет вид [1]:

$$f_0 = \frac{1,5 \cdot 10^7}{a\sqrt{\varepsilon}}.$$

В состав теплового блока (II) входят модули расчета рабочей ячейки для индукционного и диэлектрического нагрева, причем, какой именно метод будет задействован, выбирает информационно-логический блок на основании прогноза поведения свойств вещества при нагреве. При диэлектрическом нагреве для обеспечения равномерного распределения тепла с различием плотности, равным 2 %, необходимо, чтобы E изменялось не более чем на 1 %, должно выполняться условие:

$$\frac{\pi r}{\lambda} < 0,1.$$

Если длина волны в материале больше двадцатикратного его наибольшего размера, то волновые процессы можно не учитывать и расчет параметров можно вести так же как и при малых частотах. Глубина проникновения при индукционном нагреве, на которой поглощается 84% энергии [6]:

$$\Delta = 503 \sqrt{\frac{\rho}{\mu f}}.$$

В электрическом блоке производится анализ изменений вещества в электромагнитном поле при заданных параметрах. В электромагнитном поле с напряженностью E происходит деформация равновесной геометрической структуры молекулы: изменяются её межатомные расстояния, углы между связями, симметрия молекулы и в конечном счете – силовое поле молекулы. В молекуле возникает индуцированный дипольный момент. Поляризуемость складывается из электронной и атомной:

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_a.$$

Внутренняя составляющая энтропии [1]:

$$S = S_B + S_K + S_E,$$

где индексы B, K, E относятся к вращательной, колебательной и электрической [1].

Энтропия вещества в интервале температур от 0 до T определяется известным соотношением:

$$S = \int \frac{c_p}{T} dT.$$

Если в этом интервале температур имеются переходы от одной кристаллической модификации в другую, то необходимо учитывать возрастание энтропии при этом переходе

$$\Delta S = \frac{\lambda_{\alpha \rightarrow \beta}}{T_{\alpha \rightarrow \beta}}$$

или

$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T},$$

где $\lambda_{\alpha \rightarrow \beta}$ – тепловой эффект процесса.

Следовательно,

$$S = \int \frac{c_p}{T} dT + \frac{\lambda_{\alpha \rightarrow \beta}}{T_{\alpha \rightarrow \beta}} + \int \frac{c_p}{T} dT.$$

Энтропия вещества, помещенного в ЭМП:

$$S = - \left(\frac{\partial(F)}{\partial(T)} \right) = S_0 - \frac{1}{8\pi} \left(E^2 \frac{\partial(\varepsilon)}{\partial(T)} + H^2 \frac{\partial(\mu)}{\partial(T)} \right),$$

внутренняя энергия

$$U = F + TS = F_0 + TS_0 + \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon - T \frac{\partial(\varepsilon)}{\partial(T)} \right) + \frac{H^2}{8\pi} \left(\mu - T \frac{\partial(\mu)}{\partial(T)} \right),$$

расчет энтропии, энтальпии и внутренней энергии ведется через теплоемкость вещества, которую для большинства твердых веществ и газов можно найти из соотношения [4]

$$C_p = a + bT + cT^{-2}.$$

Удельная скорость химической реакции в общем случае записывается известным уравнением

$$k = AT^n \exp \left(-\frac{\varepsilon_a}{R_0 T} \right).$$

Величины A и ε_a зависят от конфигурации активированного комплекса – промежуточного состояния между исходным и конечным веществом. Даже в том случае, когда химически реагирующая система не подвергается действию внешнего поля, расположение атомов и длина связей в молекулах при переходе их в активированный комплекс сильно меняются. При этом происходит более или менее сильное изменение вращательного и колебательного состояний

исходных молекул. Значения предэкспоненциального множителя меняются в сравнительно узком интервале – пределах одного-двух порядков. Изменение энергии активации оказывается значительно большим, поэтому скорость реакции во внешнем силовом поле может значительно измениться. Из элементарного анализа взаимодействия в электрическом поле двух плоских дипольных молекул выведенное соотношение для изменения энергии активации химического взаимодействия имеет вид [1]:

$$\Delta\varepsilon_a = 0,009\alpha E^2,$$

где $\Delta\varepsilon_a$ – изменение энергии активации под действием поля, которое действует подобно катализатору.

В ионной решетке, свойственной большинству солей и типичной для большинства неорганических соединений, силы взаимодействия между ее элементами являются в основном электростатическими. Строение решетки определяется в первую очередь типом соединения: числом зарядов и расстоянием их друг от друга, а также соотношением между радиусами ионов, составляющих решетку. Химическая природа ионов менее сказывается на строении решетки, нежели геометрические факторы.

При формировании решетки ионы стремятся образовать наиболее устойчивую ее конфигурацию, соответствующую минимуму ее свободной энергии. Теоретическая прочность кристаллических твердых тел и их прочность зависит от величины сил взаимодействия между ионами, атомами или молекулами, образующими решетку кристалла. Энергия решетки зависит от количества структурных единиц кристалла, их размера и валентности и для ионной решетки может быть приближенно вычислена по Капустинскому [2]:

$$U = 287,2 \frac{Z_1 Z_2 \sum n}{r_1 + r_2} \left(1 - \frac{\rho}{r_1 + r_2} \right),$$

где $\sum n$ – число ионов, составляющих молекулу; r_1 – радиусы при координатном числе; $Z_1 Z_2$ – валентности ионов; $\rho=0,345$ – репульсивный коэффициент.

Энергия решетки в значительной мере и определяет твердость тела. Чем больше силы связи между структурными элементами, тем труднее тело разрушить.

В связи с тем что реакции в твердых смесях осуществляются обычно под атмосферным давлением (или близким к нему), изменением температуры плавления компонентов смеси от давления в подавляющих случаях можно пренебречь.

Химический состав фаз, возникающий в процессе превращения кристаллических веществ, может отличаться от состава исходных фаз или совпадать с ним. Различают два типа превращения твердых веществ:

- 1) протекающий без изменения химического состава фаз;
- 2) сопровождающийся появлением фаз с измененным химическим составом.

К процессам первого типа относятся полиморфные превращения и явления упорядочивания и разупорядочивания твердых растворов. Среди процессов, протекающих без изменения химического состава исходных фаз, по Эренфейсту [4] следует различать два рода фазовых переходов. При переходах первого

рода изменение кристаллической структуры тела и первых производных его термодинамического потенциала по температуре и давлению, то есть энтропии и объема, а следовательно, и внутренней энергии, происходит при определенной температуре резким скачком и сопровождается заметным тепловым эффектом. При этом изменение термодинамического потенциала остается непрерывным. При неизменном давлении каждая модификация вещества устойчива в определенном интервале температур на границе (называемой обычно точкой превращения) происходит переход вещества в другую модификацию. При фазовых превращениях второго рода термодинамический потенциал и его первые производные – энтропия и объем – меняются непрерывно, а вторые производные по температуре и давлению – скачкообразно. В силу непрерывности изменения энтропии в процессе перехода тепло не выделяется. В результате скачкообразного изменения вторых производных термодинамического потенциала по давлению и температуре скачком же меняются выражаемые этими производными термодинамические величины, такие как теплоемкость, коэффициенты теплового расширения и коэффициент сжимаемости (они могут меняться скачкообразно и при переходах первого рода). При превращениях второго рода решетка во время нагревания переходит из одной модификации в другую путем ряда незначительных скачкообразных изменений, протекающих на протяжении некоторого интервала температур. Таким образом, хотя прерывность процесса в этом случае в принципе сохраняется, тело переходит в новое состояние постепенно, так что при температурах, близких к точке перехода, новая модификация ничтожно мало отличается от старой. В точке перехода состояния обеих фаз совпадают, или, иначе, все вещество находится в одном состоянии. В этом отношении фазовые переходы второго рода являются практически непрерывными.

Учитывая вышеприведенное, можно сделать вывод об использовании представленной модели для организации расчетного алгоритма, позволяющего получить информацию о термодинамических и электрических параметрах системы при энергетическом воздействии на вещество сложного состава.

ЛИТЕРАТУРА

1. Туманов Ю.Н. *Низкотемпературная плазма и высокочастотные электромагнитные поля в процессах получения материалов для ядерной энергетики*. М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Ормонт Б.Ф. *Введение в физическую химию и кристаллохимию полупроводников*. М.: Высшая школа, 1982.
3. Нетушил А.В. *Высокочастотный нагрев диэлектриков и полупроводников*. М.: Госэнергоиздат, 1959.
4. Куликов И.С. *Термодинамика оксидов*. М.: Металлургия, 1983.
5. Троицкий В.Н., Рахматуллина А.З., Берестенко В.И., Гуров С.В. *Температура начала спекания ультрадисперсных порошков* // Порошковая металлургия. 1983. №1. С 13-15.
6. Глуханов Н.П. *Физические основы высокочастотного нагрева*. Л.: Машиностроение, 1989.

АНТЕННЫЙ КОМПЛЕКС КАК СЛОЖНАЯ СИСТЕМА

В.А.Маренко

In this article a main principle of buliding of consultation systems, i.e. modelling of actions of a specialist at a stage of preliminary design, is described.

Обеспечение электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств — одна из актуальных задач современной техники. Как область знаний «Электромагнитная совместимость» слишком обширна, поэтому в разработанном прототипе консультационной системы для примера выбрана одна из характерных и практически важных задач — обеспечение электромагнитной совместимости антенного комплекса [1]. Исследования проводятся с целью изучения формирования экспертного решения при установлении факта обеспечения электромагнитной совместимости в конкретной группе средств [2]. Анализ электромагнитной совместимости проводится на основе использования модели взаимодействия, применяемой на этапе предварительного проектирования [3].

Системность деятельности эксперта. Важнейшим вопросом, возникающим при проектировании специалистом антенного комплекса как сложной системы, является вопрос структурного построения, определяющий отношения между подсистемами антенного комплекса и характеристиками его функционирования. Структура антенного комплекса отражает его внутреннюю организацию, устойчивые взаимосвязи между подсистемами, распределение функций управления по элементам организационной иерархии. Проектируемый антенный комплекс должен включать, по мнению специалиста, следующие составные части (рис. 1,а):

- передающую антенну, помещаемую в центр площадки крышевого типа;
- четыре приемные коротковолновые (КВ) антенны, расположенные на максимальном удалении от передающей антенны.

Антенный комплекс как единое целое обладает таким свойством, которого нет у составляющих его частей. Это свойство не сводится к простому суммированию свойств объектов, его составляющих. Комплекс проектируется как носитель качественно нового свойства. Его функция интерпретируется как цель, а структура выступает как один из вариантов реализации цели и отражает его внутреннюю организацию, устойчивые взаимосвязи между компонентами [4].

© 2003 В.А.Маренко

E-mail: marenko@iitam.omsk.net.ru

Омский филиал Института математики СО РАН

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00303)

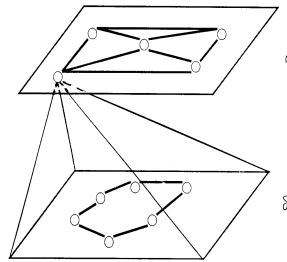


Рис. 1. Нормированное отношение в виде орграфа. Совокупность элементов проектируемого антенного комплекса: а) система взаимосвязанных между собой передающей и приемных КВ-антенн; б) совокупность характеристик одной из приемных КВ-антенн.

Важнейшей функцией проектируемого антенного комплекса является прием сигнала со всех направлений в КВ-диапазоне.

Агрегативно-декомпозиционный подход к формализации задач анализа и синтеза структуры антенного комплекса включает два взаимосвязанных этапа:

- последовательную декомпозицию системы на элементы;
- агрегирование элементов на соответствующих уровнях детализации для генерирования вариантов построения системы в целом.

Анализ экспертной информации показал, что в рамках данного подхода структура проектируемой системы описывается на различных уровнях детализации совокупностью графов (рис. 1.а,б). На полученной таким образом двухуровневой модели антенного комплекса в виде взаимосвязанных графов различной степени детализации элементов структуры и их взаимосвязей ставится задача синтеза структуры системы в целом, включающая:

- определение оптимального числа и расположения его составных частей ($x \in X$);
- распределение функций управления по составным частям проектируемой системы ($f \in F$);
- определение оптимального отображения элементов множества f на элементы множества x , обеспечивающего требуемые характеристики функционирования системы.

Задача синтеза структуры тесно связана с задачей оптимизации функционирования составных частей проектируемой системы, характер взаимодействия между которыми и распределение функций между ними определяются сформированными алгоритмами.

Формализация задачи синтеза структуры системы. Широкий класс задач синтеза структуры систем с использованием формализации в виде графов формулируется следующим образом: задан альтернативный граф возможных вариантов реализации системы G_0 , необходимо подобрать подграф $G^* \subset G_0$, оптимизирующий заданные характеристики $F_0(G^*) \rightarrow opt$ и удовлетворяющий ограничениям (α, β, μ) , задаваемым на отдельных частях графа и в подграфе в целом:

$$F_\alpha(G^*)RP_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, \alpha_0};$$

на отдельных частях графа $G_\mu^* \subset G_\mu$, $G_\mu \subset G_0$

$$F_\beta(G_\mu^*)RP_\beta, \quad \beta = \overline{1, \beta_0}, \quad \mu = \overline{1, \mu_0}; \quad G^* \subset G_0,$$

где R — условие вида $\geq, =, \leq$; P — множество элементов системы.

Основные характеристики структуры системы в этом случае выражаются в аддитивной форме, если они зависят лишь от состава выбираемых элементов графа, либо в рекуррентно-вычислимой форме, если они зависят как от соответствующих характеристик элементов выбираемых вариантов, так и от структуры их взаимосвязей [5].

В разработанном прототипе консультационной системы по вопросам обеспечения электромагнитной совместимости задача синтеза структуры антенного комплекса решается экспертным методом. Основная идея экспертных методов состоит в том, чтобы использовать интеллект квалифицированных специалистов, их способность искать и находить решение слабо формализованных узкопрофессиональных задач. При решении используется комбинация как теоретического знания о предметной области, так и личностное знание эксперта, представляющего его уникальный опыт, позволяющий решать такие задачи достаточно быстро и на хорошем уровне.

Моделирование действий эксперта. Деятельность специалиста отличается системностью: осуществляется по определенному плану или алгоритму, который является образом деятельности, ее моделью. Несущественные, на первый взгляд, моменты могут оказаться для него важными, так как он интуитивно осознает, что их невыполнение способно сделать основную цель недостижимой. Мыслительная деятельность человека осуществляется, как минимум, на двух уровнях: сознательном и бессознательном. В научной литературе встречается упрощенное сравнение умственной деятельности человека с работой логической машины, программное обеспечение которой доступно изучению. Это аналог так называемой открытой части его знаний. Скрытая часть знаний не поддается исследованию прямыми средствами, одним из которых является объяснение процесса решения узкопрофессиональной задачи. Специалист часто затрудняется описать его в точной и понятной форме. При объяснении путей получения решения эксперт заостряет внимание на более общих моментах, пропускает частности, которые кажутся ему очевидными. Возникающие при этом пробелы заполняет правдоподобной линией рассуждения, которая, возможно, и не отражает действительного процесса. Эти трудности связаны с подсознательным характером многих его знаний и сложностью описания мыслительных процессов. Процесс выбора необходимых связей между частями проектируемого антенного комплекса, осуществляемый специалистом, также недоступен для прямого исследования. Зато всегда конкретен основанный на скрытых знаниях опыт, определяющий его действия. Изучение опыта — это один из способов исследования скрытой умственной деятельности специалиста, позволяющий некоторым образом формализовать процесс формирования решения путем построения модели [6]. Последовательность действий специалиста на этапе предварительного проектирования приемных антенн представлена в виде орграфа (рис. 1.6). Качество анализа совокупности характеристик приемных антенн прямо связано с

полнотой их модели, которая должна быть максимально подробной, но в то же время простой и компактной. Компромисс между полнотой и простотой модели в понимании специалиста достигается с помощью понятия существенности: в модель включаются компоненты, существенные по отношению к цели анализа. Это один из эффективных приемов его деятельности — сопровождать главную цель заданием всего комплекса дополнительных целей, так как несущественное, на первый взгляд, на самом деле может оказаться важным и должно быть учтено. При изучении экспертной информации установлено, что подбор приемных антенн на этапе предварительного проектирования ведется по следующей схеме (рис. 1.б):

- 1) учет конструктивных особенностей;
- 2) осуществление пространственного разнеса;
- 3) исследование возможности поляризационного разнеса;
- 4) использование свойств диаграммы направленности;
- 5) осуществление частотного разнеса.

Чтобы облегчить работу эксперта, в алгоритме предусмотрена возможность внесения поправок и дополнений в модель с помощью элемента «всё остальное», показанного на рис. 1.б шестой дугой графа. Это позволяет дополнить алгоритм необходимым звеном на любом этапе формирования решения и устранить сомнения эксперта по полноте модели. Результаты анализа и синтеза антенного комплекса с помощью модели действий эксперта позволяют оценивать реальную возможность обеспечения электромагнитной совместимости синтезируемых объектов на этапе предварительного проектирования.

Правдоподобные рассуждения. Разработка интеллектуальных систем предполагает создание моделей, отражающих особенности рассуждений специалистов при решении узкопрофессиональных задач. Знания, которыми обладает специалист, можно условно разделить на формализованные и неформализованные. Формализованные знания представляются в виде общих и строгих суждений: законов, формул, моделей, алгоритмов и т.д. Неформализованные знания, как правило, не попадают в книги в связи с их субъективностью и приближенностью. Знания такого рода являются результатом обобщения многолетнего опыта работы и интуиции специалиста. Они обычно представляют собой многообразие эвристических приемов и правил. В связи с этим создается механизм формального рассуждения. При решении рассмотренной выше задачи специалист использовал индукционное умозаключение, состоящее из правдоподобных рассуждений. Под рассуждениями в общем смысле понимают процедуру последовательного, пошагового перехода от одних высказываний, принятых в качестве исходных, к другим высказываниям. Исходные утверждения в рассуждениях представляют собой некоторые допущения, называемые посылками. Переход к последнему высказыванию-заключению происходит согласно правилам, называемым правилами вывода. Такими рассуждениями пользуются в ситуациях, не поддающихся количественному описанию.

При создании модели действий эксперта в моделируемом объекте выделены понятия и установлены отношения между ними типа «причина-следствие». Посылками в рассмотренной задаче являются характеристики коротковолновых

приемных антенн — $A_1, \dots, A_5$, а следствием B — обеспечение электромагнитной совместимости. Имеющиеся сведения о характеристиках коротковолновых приемных антенн используются не для осуществления достоверного вывода B из посылок $A_1, \dots, A_5$, а как некая подсказка, наводящая на мысль о возможности принятия высказывания B . Рассуждение в этом случае строится по следующей схеме: если информация, содержащаяся в посылках $A_1, \dots, A_5$, верна, то правдоподобно было бы считать, что имеет место и B . Переход от посылок к заключению носит здесь правдоподобный характер, делает истинность B более достоверной.

Специалист при решении узкопрофессиональных задач использует различные приемы, одним из которых является аналогия, то есть отношение частичного сходства в свойствах между объектами исследования. Умозаключение по аналогии, в котором на основании сходства объектов в одних признаках делается заключение о сходстве между ними в других признаках, дает не достоверное заключение, а заключение, имеющее характер предположения. Проведя рассуждение для одной ситуации, можно формальным образом преобразовать его для ситуации, сходной с первоначальной. Таким образом, с использованием граф (рис. 1.6) формируется база данных по приемным КВ-антеннам различного типа: магнитная резонансная антенна, горизонтальная дипольная антенна, вертикальная резонансная антенна и другие, которые могут быть использованы при синтезе различных вариантов антенного комплекса в целом. Каждое заключение в разработанном прототипе консультационной системы снабжено субъективной экспертной оценкой.

Критерием достоверности рекомендуемых решений является правдоподобность выдаваемого результата и согласованность его с интуитивным ожиданием пользователя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маренко В.А., Маренко В.Ф. *Основы разработки консультационной экспертной системы* // Техника радиосвязи (Омский НИИ приборостроения). 2002. Вып.7. С. 74-77.
2. Маренко В.Ф., Богданов А.В., Лузан Ю.С. *Обеспечение электромагнитной совместимости при выборе и размещении КВ-антенн приемопередающего центра на ограниченной площади* // Техника радиосвязи (Омский НИИ приборостроения). 2002. Вып.7. С. 58-66.
3. Петровский В.И., Седельников Ю.Е. *Электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств*. М.: Радио и связь, 1986. 216 с.
4. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. *Основы системного анализа*. Томск: Изд-во НТЛ, 1997. 396 с.
5. Цвиркун А.Д., Акинфиев В.К., Филиппов В.А. *Имитационное моделирование в задачах синтеза структуры сложных систем*. М.: Наука, 1985. 175 с.
6. Поспелов Д.А. *Моделирование рассуждений*. М.: Радио и связь, 1989. 184 с.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ ИЗОМОРФИЗМА ПОДГРАФОВ

А.В. Пролубников

We consider the subgraph isomorphism problem with the following restriction. We suppose that both checked graphs have the same number of vertices. Proposed metric represents the distance between checked graphs. This metric allows to come to the problem of finding an optimal embedding of one of the graphs into another. The supposed algorithm is an algorithm for finding an approximate solution for the problem. Conditions needed for the algorithm effectiveness are considered.

Задача проверки изоморфизма подграфов представляет собой обобщение для широкого класса задач, находящих практическое применение, в частности в таких областях, как распознавание образов и обработка изображений. Однако, помимо практической важности, задача имеет и теоретическую важность, поскольку задача является NP -полной [1] и к ней могут быть сведены такие задачи теории графов, как задача поиска гамильтонова цикла в графе, поиска максимальной клики в графе и некоторые другие.

При этом, если вопрос о принадлежности задачи проверки изоморфизма графов к классу P или NP до сих пор остается открытым [1], но некоторые дополнительные ограничения на структуру графов позволяют перевести задачу в класс P [2, 3], [4], то, например, ограничение задач проверки изоморфизма подграфов на планарные графы оставляет задачу в классе NP -полных задач [5] в отличие от подобных задач проверки изоморфизма графов. Поэтому возникает необходимость в построении алгоритмов, находящих приемлемое приближенное решение задачи за полиномиальное время.

Граф $G_A(V_A, E_A)$ является *подграфом* графа $G_B(V_B, E_B)$, если $V_A \subseteq V_B$ и $E_A \subseteq E_B$. Граф G_A называется *остовным подграфом* или *частичным графом* графа G_B , если $|V_B| = |V_A|$.

Постановка задачи проверки изоморфизма подграфов следующая:

Граф $G_A(V_A, E_A)$ изоморфен некоторому подграфу графа $G_B(V_B, E_B)$, если существует такая инъекция $\varphi : V_A \rightarrow V_B$, что $\forall (i, j) \in V_A \Rightarrow (\varphi(i), \varphi(j)) \in V_B$.

Вложением графа $G_A \langle V_A, E_A \rangle$ в граф $G_B \langle V_B, E_B \rangle$ ($|V_A| = |V_B|$, $|E_A| \leq |E_B|$) будем называть произвольное биективное отображение $\varphi : V_A \rightarrow V_B$. Граф, получаемый из графа G_A перенумерацией его вершин, соответствующей биекции φ , обозначать G_A^φ и также называть вложением.

Любому вложению φ может быть однозначно поставлена в соответствие некоторая матрица перестановки P и наоборот. То есть P и φ могут быть отождествлены друг с другом. Для произвольной матрицы A под матрицей $A(\varphi)$ будем понимать матрицу PAP^{-1} , то есть матрицу, полученную из A перестановкой ее строк с такой же перестановкой ее столбцов (перестановкой рядов), задаваемой P .

Изоморфным вложением невзвешенного неориентированного графа $G_A \langle V_A, E_A \rangle$ в граф $G_B \langle V_B, E_B \rangle$ ($|V_A| = |V_B|$, $|E_A| \leq |E_B|$) будем называть такое биективное отображение $\varphi : V_A \rightarrow V_B$, что $(i, j) \in E_A$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(i), \varphi(j)) \in E_B$. Если $|E_B| = |E_A|$, то существование изоморфного вложения графа G_A в граф G_B эквивалентно изоморфности этих графов.

Формулировка задачи поиска приближенного решения задачи проверки изоморфизма подграфов включает в себя целевую функцию, требующую минимизации, представляющую собой некоторую количественную характеристику близости графов. Примерами такой функции могут служить функции, представленные в [6, 7].

Пусть A_0, B_0 – матрицы смежности графов G_A и G_B . Матрица $C_0 = A_0 - B_0$ – матрица смежности некоторого взвешенного графа с весами ребер, равными 1 и -1. Ее элементы следующие:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in E_A \text{ и } (i, j) \notin E_B, \\ -1, & \text{если } (i, j) \notin E_A \text{ и } (i, j) \in E_B, \\ 0, & \text{если } ((i, j) \in E_A \text{ и } (i, j) \in E_B), \text{ или } ((i, j) \notin E_A \text{ и } (i, j) \notin E_B). \end{cases}$$

Матрица C_0 – симметрическая, поскольку матрицы A_0 и B_0 симметрические. Задаваемый ей взвешенный граф является дополнением графа G_A до графа G_B только в том случае, когда в C_0 отсутствуют элементы, равные -1, то есть когда G_A – подграф G_B . Матрица C_0 задает таким образом взвешенный граф G_C , наличие ребра в котором соответствует наличию такого же ребра только в одном из графов G_B или G_A , отсутствие – наличию такого ребра в обоих графах либо отсутствию такого ребра в обоих графах.

Чем меньше ребер в графе G_C и соответственно меньше ненулевых элементов в матрице C_0 , тем граф G_B можно считать более близким к графу G_A . Будем в дальнейшем граф G_C , соответствующий матрице C_0 , называть *разностью* графов G_A и G_B^φ и введем метрику, конкретизирующую понятие близости графов.

Рассмотрим фробениусову (евклидову) норму матрицы F для матрицы $A = (a_{ij})$, определяемую как

$$F(A) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

При перенумерации вершин графа G_A , соответствующей биекции φ , получаем граф G_A^φ с матрицей смежности PA_0P^{-1} , обозначаемой далее $A_0(\varphi)$. Матрица разности графов G_B и G_A^φ – матрица $C_0(\varphi) = B_0 - A_0(\varphi)$. Значение $F(C_0(\varphi))$ равно квадратному корню от числа несовпадающих ребер в графах G_A^φ и G_B .

Функция

$$\delta(G_A, G_B) \stackrel{\text{df}}{=} \min_{\varphi \in \Gamma(G_A)} F(C_0(\varphi)),$$

рассматриваемая как функция расстояния между графами, является метрикой, поскольку:

1. δ неотрицательна:

$$\delta(G_A, G_B) \geq 0,$$

$$\delta(G_A, G_B) = 0 \Leftrightarrow G_A \cong G_B.$$

2. δ симметрична: $\delta(G_A, G_B) = \delta(G_B, G_A)$.

3. δ удовлетворяет правилу треугольника: $\delta(G_A, G_B) \leq \delta(G_B, G_C) + \delta(G_C, G_A)$.

После введения метрики δ задача поиска оптимального вложения графа G_A в граф G_B может быть сформулирована так. Необходимо найти вложение φ графа G_B в граф G_A , при котором $F(C_0(\varphi)) = \delta(G_A, G_B)$.

Мы рассматриваем задачу поиска оптимального вложения графа G_A в граф G_B с дополнительным условием: $|V_A| = |V_B|$, $|E_A| \leq |E_B|$.

Предлагаемый нами алгоритм решения задачи поиска оптимального вложения графа является модификацией алгоритма спектрального расщепления проверки изоморфизма графов и работает с матрицами смежности графов, аналогично модифицированными до положительно определенных. Матрицы видоизменяются следующим образом. Пусть A_0 – матрица смежности графа $G_A \langle V_A, E_A \rangle$. В соответствии с матрицей A_0 строим диагональную матрицу D_{A_0} :

$$\begin{pmatrix} d_{11}^A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}^A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn}^A \end{pmatrix}$$

со следующими элементами на диагонали:

$$d_{ii}^A = \sum_{j=1}^n a_{ij}^0 + d = d_i + d,$$

где d – максимальная степень вершин в графе G_A , а d_i – степень вершины i . Аналогично по матрице B_0 строится матрица D_{B_0} . Матрицы, с которыми работает алгоритм, имеют следующий вид:

$$A = A_0 + D_{A_0}, \quad B = B_0 + D_{B_0}. \quad (1)$$

Эти матрицы могут рассматриваться как матрицы некоторых мультиграфов, у которых допустимы кратные ребра (петли).

Вместо матрицы C_0 как матрицу, представляющую разность графов G_B и G_A , будем рассматривать матрицу C : $C = A - B$. Если

$$F(B_0 - A_0(\varphi)) = F(C_0(\varphi)) = \delta(G_A, G_B),$$

то и

$$F(B - A(\varphi)) = F(C(\varphi)) = \min_{\varphi \in \Gamma(G_A)} (F(B - A(\varphi))).$$

В самом деле:

$$B - A(\varphi) = (B_0 - A_0(\varphi)) + (D_B - D_A(\varphi)).$$

Последовательность степеней вершин графа является инвариантом для изоморфных графов. Если φ – оптимальное вложение, то значит, что количество несовпадающих ребер у графа вложения $G_A(\varphi)$ и графа G_B минимально, что также соответствует минимуму разности степеней у соответствующих вершин графов. Следовательно, минимизация функционала $F(B_0 - A_0(\varphi))$ равносильна минимизации функционала $F(B - A(\varphi))$.

Алгоритм спектрального расщепления проверки изоморфизма графов основан на последовательном расщеплении собственных значений видоизмененных до положительно определенных матриц смежности и решении систем линейных уравнений, определяющих обратные матрицы. Предложена модификация алгоритма [8], работающая со столбцами обратной матрицы к матрице A , получаемыми при решении систем уравнений:

$$Ax = e_j, \quad By = e_k, \quad j, k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где вектор $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ – j -й орт в пространстве R^n . Сравнение норм столбцов обратных матриц позволяет получить решающую перестановку, задающую изоморфизм. То есть эвристикой, на основе которой строится изоморфизм, является обратная матрица к видоизмененной матрице смежности графа. Отслеживание возмущений обратной матрицы по возмущениям самой матрицы позволяет определить биекцию, задающую изоморфизм.

Если на вход алгоритма поданы изоморфные графы, то невозможность установления однозначного соответствия возникает при наличии среди этих векторов-решений группы векторов, которые могут быть получены друг из друга с помощью перестановки их компонент и, следовательно, имеют одинаковые нормы. При этом компоненты этих векторов, образующие диагональ обратной матрицы, совпадают. При нахождении в матрице B строки и столбца, соответствующих строке и столбцу с номером j матрицы A , на каждой j -й итерации алгоритма последовательно производятся возмущения ее диагональных элементов. При возмущении матрицы, влекущем расщепление ее собственных значений, происходит возмущение векторов-столбцов обратной к A матрицы. В результате группы векторов с одинаковыми нормами расщепляются.

**Алгоритм спектрального расщепления
проверки изоморфизма графов.
Принципиальная схема**

Шаг 0. $A^0 := A$, $B^0 := B$; $j := 1$.

Шаг 1.1. Если $j \leq n$, то перейти на шаг 1.1, иначе перейти на шаг 6.

Шаг 1.2. Выбор ε_j .

Шаг 1.3. $A^j := A^{j-1} + \varepsilon_j E^j$.

Шаг 2. Решение системы линейных уравнений $A^j x = e_j$. x_j – полученное решение. $k := 1$.

Шаг 3.1. Если $k \leq n$, то перейти на шаг 3.2, иначе – графы неизоморфны. Работу алгоритма завершить.

Шаг 3.2. $B_k := B^{j-1} + \varepsilon_j E^k$.

Шаг 3.3. Решение системы линейных уравнений $B^k y = e_k$. y_k – полученное решение.

Шаг 3.4. $k := k + 1$. Перейти на шаг 3.1.

Шаг 4. Сравнение норм векторов x_j и y_k , где k такие, что $\forall i < j \quad \nexists i : i \leftrightarrow k$.

Если $\forall k \quad \|x_j\| \neq \|y_k\|$, то графы G_A и G_B неизоморфны. Работу алгоритма завершить.

Если $\exists k \quad \|x_j\| = \|y_k\|$, и $\forall i \exists l : x_{ji} = y_{kl}$, и $x_{jj} = y_{kk}$, то $k_j := k$. (Установление соответствия $j \leftrightarrow k_j$.)

Шаг 5. $B^j := B^{j-1} + \varepsilon_j E^{k_j}$. $j := j + 1$. Перейти на шаг 1.1.

Шаг 6. Работу алгоритма завершить. Полученное соответствие $j \leftrightarrow k_j$, $j = \overline{1, n}$ – найденный изоморфизм графов G_A и G_B .

Модификация алгоритма спектрального расщепления проверки изоморфизма графов, дающая эвристический алгоритм поиска оптимального вложения одного из графов в другой, осуществляется следующим образом. Так, на каждой j -ой итерации алгоритма спектрального расщепления проверки изоморфизма графов, если графы G_A и G_B изоморфны и φ_0 – изоморфизм, а P^0 – соответствующая ему матрица перестановки, то выполняется следующее ключевое соотношение:

Если $A^j = A^{j-1} + \varepsilon_j E^j$, то

$$B^j = B^{j-1} + \varepsilon_j E^{\varphi_0(j)} \Leftrightarrow B^j = P_0 A^j P_0^{-1} \text{ (то есть } F(B^j - P_0 A^j P_0^{-1}) = 0). \quad (3)$$

В данном случае, если графы G_A и G_B близки в соответствии с введенной метрикой δ и φ_0 – искомое оптимальное вложение, а P^0 – соответствующая ему матрица перестановки, то на каждой j -ой итерации должно выполняться следующее ключевое соотношение:

Если $A^j = A^{j-1} + \varepsilon_j E^j$, то

$$B^j = B^{j-1} + \varepsilon_j E^{\varphi_0(j)} \Leftrightarrow F(B^j - P_0 A^j P_0^{-1}) = \min_{P \in \Gamma(G_B)} \{F(B - P A P^{-1})\}. \quad (4)$$

Принципиальная схема алгоритма поиска оптимального вложения графа следующая.

**Алгоритм спектрального расщепления
поиска оптимального вложения графа.**

Принципиальная схема

Шаг 0. $A^0 := A$, $B^0 := B$; $j := 1$.

Шаг 1. Если $j \leq n$, то перейти на шаг 1.1, иначе перейти на шаг 6.

Шаг 1.1. Выбор ε_j .

Шаг 1.2. $A^j := A^{j-1} + \varepsilon_j E^j$.

Шаг 2. Решение системы линейных уравнений $A^j x = e_j$. x_j – полученное решение.

Шаг 3. $k := 1$. Если $k \leq n$, то перейти на шаг 3.1, иначе перейти на шаг 4.

Шаг 3.1. $B_k := B^j + \varepsilon_j E^k$.

Шаг 3.2. Решение системы линейных уравнений $B^k y = e_k$. y_k – полученное решение.

Шаг 3.3. $k := k + 1$. Перейти на шаг 3.

Шаг 4. Сравнение норм векторов x_j и y_k , где k такие, что $\forall i < j \quad \nexists i : i \leftrightarrow k$.

Если $k : \left| \sum_{i=1}^n \|x_{ji}\| - \sum_{i=1}^n \|y_{ki}\| \right| = \min_l \left| \sum_{i=1}^n \|x_{ji}\| - \sum_{i=1}^n \|y_{li}\| \right|$, то $k_j := k$. (Установление соответствия $j \leftrightarrow k_j$).

Шаг 4.1. $B^j := B^{j-1} + \varepsilon_j E^{k_j}$.

Шаг 5. $j := j + 1$. Перейти на шаг 1.

Шаг 6. Работу алгоритма завершить. Полученное соответствие $j \leftrightarrow k_j$, $j = \overline{1, n}$ – найденное вложение графа G_A в граф G_B .

Пусть $B = A(\varphi_0) = C(\varphi_0)$. Рассмотрим системы линейных уравнений

$$A(\varphi_0)x = e_j, \quad Bx' = e_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где вектор $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ – j -й орт в пространстве R^n .

Если

$$\frac{\|C(\varphi_0)\|}{\|A(\varphi_0)\|} \leq \theta, \quad (6)$$

$\mu(A(\varphi_0))$ – число обусловленности матрицы $A(\varphi_0)$ и $\theta\mu(A(\varphi_0)) < 1$, то для решений x и x' систем уравнений (4) справедливо [9] неравенство

$$\frac{\|x - x'\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu(A(\varphi_0))\theta}{1 - \mu(A(\varphi_0))\theta}. \quad (7)$$

Для матрицы $A(\varphi_0)$ число обусловленности $\mu(A(\varphi_0)) \leq 3$ [8]. Поэтому, если выполняется (6) и $\theta < 1/3$, то для решений x и x' систем уравнений (5) неравенство (7) принимает следующий вид:

$$\|x - x'\| \leq \frac{3\theta}{1 - 3\theta} \|x\|.$$

То есть решения систем уравнений (5), задающие обратные матрицы для матриц $A(\varphi_0)$ и B , изменяются непрерывно при малых возмущениях, задаваемых

матрицей $C(\varphi_0)$. А значит, и дополнительные возмущения диагональных элементов матриц ε_j , производимые на каждой j -ой итерации, с некоторой погрешностью будут сохранять ключевое соотношение (3), выполнению которого будет соответствовать выполнение соотношения (4).

Возмущая матрицы A и B с помощью матриц $\varepsilon_j E^j$ и $\varepsilon_j E^{\varphi_0(j)}$, полагая при этом, что на каждой итерации $\varphi_0(j) = k$, где k такое, что

$$\left| \sum_{i=1}^n \|x_{ji}\| - \sum_{i=1}^n \|y_{ki}\| \right| = \min_l \left| \sum_{i=1}^n \|x_{ji}\| - \sum_{i=1}^n \|y_{li}\| \right|,$$

мы будем минимизировать n из n^2 слагаемых, входящих в функционал $F((B^j)^{-1} - P(A^j)^{-1}P^{-1})$.

Стремясь уменьшить на каждой итерации алгоритма значение функционала $F((B^j)^{-1} - P(A^j)^{-1}P^{-1})$, при неизвестной нам матрице перестановки P мы исходим из того, что два функционала – функционал $F(B^j - PA^jP^{-1})$ и функционал $F((B^j)^{-1} - P(A^j)^{-1}P^{-1})$ – достигают минимума на одной и той же матрице перестановки, что справедливо, когда $G_A \cong G_B$, так, в этом случае

$$B - PAP^{-1} = 0 \Leftrightarrow B^{-1} - PA^{-1}P^{-1} = 0.$$

Если же $\delta(G_A, G_B)$ мало, то поскольку $\|C(\varphi_0)\| \leq F(C)$ [9], будет мало и отношение $\|C(\varphi_0)\|/\|A(\varphi_0)\|$, а значит, возможно эффективное применение алгоритма спектрального расщепления поиска изоморфного вложения графа, что подтверждается вычислительным экспериментом.

Приведенные ниже результаты представляют собой усреднение по серии вычислительных экспериментов. Искалось изоморфное вложение графа G_A в граф G_B , заведомо существующее. Генерировался граф G_B , по нему строился остоновый подграф G'_A , после чего случайным образом перенумеровывались его вершины и получался граф G_A .

В приведенной таблице S_B обозначает вероятность, с которой при генерировании случайного графа между двумя вершинами графа проводится ребро («плотность» графа G_B). $S_A(B)$ обозначает вероятность, с которой при построении остонового подграфа G_A между вершинами остается ребро графа G_B («плотность» графа G_A относительно графа G_B). N_e^B – число ребер в графе G_B . N_e^A – число ребер в графе G_A . $N_e^{C(\varphi)}$ – число несовпавших ребер в найденном вложении графа G_A в граф G_B – графе G_A^φ . Число вершин в графах равнялось 50.

Отметим, что главная трудность при решении поставленной задачи заключается в том, что, не зная оптимального вложения φ_0 графа G_A в граф G_B , мы не можем определить $\delta(G_A, G_B)$ и соответственно $\|C(\varphi_0)\|$. Однако, несмотря на это, при помощи алгоритма спектрального расщепления поиска оптимального вложения графа может, в частности, эффективно решаться задача со следующей содержательной постановкой.

Имеется некоторый набор изображений-шаблонов, в соответствие каждому из которых, например, по одному из методов, предложенных в [10], поставлен некоторый граф. Проверяемое (тестовое) изображение является одним из

Таблица 1. Результаты вычислительного эксперимента

S_B	$S_A(B)$	N_e^B	N_e^A	$N_e^{C(\varphi)}$
0,80	0,70	1206	941	12
0,85	0,70	1221	938	7
0,90	0,70	1233	926	3
0,80	0,85	1210	967	13
0,85	0,85	1218	953	6
0,90	0,85	1227	970	3
0,80	0,90	1217	973	14
0,85	0,90	1210	981	11
0,90	0,90	1223	983	5

шаблонных изображений, содержащим повреждения. Необходимо определить, каким шаблонным изображением изначально являлось тестовое изображение.

Повреждения шаблонного изображения, дающие тестовое изображение, могут привести к тому, что построенный по нему граф будет отличаться от графа любого шаблонного изображения. И тогда задача идентификации тестового изображения, то есть выбора шаблонного изображения, соответствующего тестовому, будет состоять в поиске графа шаблонного изображения, наиболее близкого к графу тестового изображения в соответствии с введенной метрикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. М.: Мир. 1982
2. Hopcroft J., Wong J., *A linear time algorithm for isomorphism of planar graphs* // Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 1974. P.172-184.
3. Luks E.M., *Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time* // Proc. 21st IEEE FOCS Symp. 1980. P.42-49.
4. Hoffmann C.M. *Group-Theoretic Algorithms and Graph Isomorphism* // Lecture Notes in Computer Science (Chapter V). 1982. P.127-138.
5. Baker B.S. *Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs* // J. Assoc. Comput. Mach. 1994. V.41. P.153-180.
6. Bunke H. *On a relation between graph edit distance and maximum common subgraph* // Pattern Recogn. Lett. 1997. V.18, N.8. P.689-694.
7. Bunke H., Schearer K. *A Graph distance metric based on the maximal common subgraph* // Pattern Recogn. Lett. 1998. V.19, N.3-4. P.255-259.
8. Пролубников А.В., Файзуллин Р.Т. *Эвристический алгоритм дешифрования шифра двойной перестановки* // Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр. Под ред. А.К.Гуца. Омск: Омск. гос. ун-т, 2002. Вып.9. С.62-69.
9. Годунов С.К. и др. *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах* // Новосибирск: Наука, 1988.
10. Шикин Е.В., Боресков А.В. *Компьютерная графика*. М.: Мир, 1995.

ОБТЕКАНИЕ РЕШЕТОК ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЛОПАСТЕЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А.С. Толстуха

Various aspects of the numerical solution using finite element method for the 3-d potential flow of the ideal fluid through the rotor blades of the turbomachine are discussed. Paper covered the problem stage, wakes influence and secondary flow questions. Also considered discreet solution techniques and its convergence.

1. Введение

Развитие турбостроительной техники выдвигает повышенные требования к знаниям гидродинамических характеристик рабочих колес и направляющих аппаратов, что в свою очередь стимулирует развитие их гидродинамической теории. Современная вычислительная техника позволяет описать сложные гидродинамические процессы в проточной части турбомашин в пространственной постановке соответствующих задач. Однако реализация наиболее полной модели течения, описываемой уравнениями Навье-Стокса, требует слишком больших затрат машинного времени, поэтому в инженерных расчетах они неприемлемы. Результаты многочисленных исследований показывают, что ряд проблем, возникающих при проектировании решеток, с достаточной степенью точности могут быть решены и с помощью более простых моделей. Остается лишь вопрос о пределах их применимости. К числу таких проблем относятся аэроупругие явления в решетках, нестационарные аэродинамические характеристики которых при безотрывном обтекании с достаточной степенью точности определяются в рамках модели идеальной жидкости. Как известно [1], нестационарные аэродинамические характеристики решеток зависят от стационарного поля скоростей, расчету которого и посвящена настоящая работа.

Работы по методам определения стационарного пространственного течения в турбомашинах принято вести от работы [2] – квазитрёхмерная технология, расчёты проводятся последовательно для течений в «тонких» слоях. Осесимметричное в меридианальном слое, приближённо являющемся средней поверх-

© 2003 А.С. Толстуха

E-mail: ast@univer.omsk.su

Омский государственный университет

Работа выполнена в рамках программы ФЦП «Интеграция»

ностью тока. Затем в построенном по осесимметричному течению цилиндрическом «тонком» слое, расчёт в котором позволяет учесть форму профилей и, наконец, расчёт в поперечном канале слое, позволяющий определить вторичные течения. Решение в каждом из трёх слоев уточняет решение в двух других. Применяется в самых различных вариантах и содержательных контекстах, например [3] – для нескольких ступеней со стыковкой условий (склежкой) на границах ступеней; [4] – осесимметричный в меридиональной плоскости МКЭ; [5] – слой переменной толщины на осесимметрической поверхности.

Много работ посвящено определению течения в поперечных канале плоскостях – так называемые вторичные течения. Этому вопросу неизменно уделяется внимание в экспериментальных и теоретических исследованиях пространственной структуры потока, [6] – монография, [7] – расчёт в направляющем аппарате, [8] – эксперимент.

Возникновение вторичных течений принято рассматривать в первую очередь как результат вязкого взаимодействия жидкости или газа с твёрдыми поверхностями межлопаточного канала – поверхностями лопастей и цилиндрических обводов. Действительно, к примеру, задача о натекании пограничного слоя с внутреннего обвода на угол в месте сопряжения с поверхностью лопасти в окрестности задней кромки [9] может быть рассмотрена только в рамках модели вязкой среды. Но вклад поверхности лопастей в образование вторичных течений можно учесть в рамках модели идеальной жидкости или газа. Действительно, наблюдаемая картина обтекания лопатных систем со сходом потока с задних кромок, возможная лишь в силу вязких процессов на поверхности лопасти, в отсутствие вязкости реализуется применением условия Жуковского-Кутта на задней кромке; при этом вокруг лопасти возникает в общем случае переменная по высоте лопасти циркуляция скорости, а с кромки сходят свободные вихри, образующие вихревую пелену. Возникающая картина течения включает и перетекание в поперечных потоку плоскостях.

Таким образом, без учёта влияния свободных вихрей и положения пелены нельзя получить правильную картину пространственного обтекания. В предположении идеальности жидкости вихревая пелена стационарного течения есть поверхность контактного разрыва вектора скорости. Если предположить, что вне поверхности пелены вихри отсутствуют и энтропия постоянна, то есть течение потенциально, тогда в силу ненулевой циркуляции скорости вокруг лопасти потенциал терпит разрыв на пелене. В [10] предложена процедура учёта течения за решёткой лопастей: линейная комбинация решений с единичным разрывом потенциала скоростей на уровнях дискретизации по высоте. Очевидно, что применение его возможно для области с предписанным положением пелены или же требуется итерационная процедура уточнения, на каждом шаге которого требуется решить $l + 1$ задачу (l – число уровней дискретизации по высоте), что нерационально. Дело осложняется тем, что вихревая пелена неустойчива [11].

В данной работе предложен итерационный процесс, на каждом шаге которого в ограниченной трёхмерной области решается задача относительно потенциала скоростей, коэффициенты и правая часть которой определены предыдущим приближением решения, разрыва потенциала, положения вихревой пелены. Но-

вое приближение позволяет скорректировать положение поверхности пелены, исходя из условия контактного разрыва скорости, и скорректировать величины разрыва потенциала вдоль задней кромки, исходя из условия Жуковского-Кутта. Частная задача решается приближённо методом конечных элементов. В свою очередь, использование итерационного метода для решения возникающей при этом системы линейных алгебраических уравнений позволяет эффективно использовать уже полученное приближение.

2. Область и основные уравнения

Рассмотрим нестационарное движение идеальной однородной несжимаемой жидкости. Уравнения сохранения массы и импульса имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P = 0,$$

$\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ – вектор скорости, $P(t, \mathbf{x})$ – гидростатическое давление, ρ – плотность, постоянная во всей области течения, $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ – декартова координата, $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ – полная производная.

Пусть система вращается с угловой скоростью ζ вокруг оси x , $\vec{\zeta} = (\zeta, 0, 0)^T$ – вектор вращения. Обозначим через $\mathbf{w}$ относительную скорость. Абсолютная скорость $\mathbf{u}$ есть $\mathbf{w} + \vec{\zeta} \times \mathbf{x}$. Абсолютное ускорение есть сумма относительного, переносного (в данном случае центробежного) и поворотного кориолисова ускорения.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{w} + \vec{\zeta} \times (\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) + 2(\vec{\zeta} \times \mathbf{w}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P.$$

Уравнение сохранения импульса в форме Громеки-Лэмба

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} \right) - \mathbf{w} \times \operatorname{rot} \mathbf{w} + \vec{\zeta} \times (\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) + 2(\vec{\zeta} \times \mathbf{w}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P.$$

Заметим, что

$$\vec{\zeta} \times (\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) = (0, -\zeta^2 y, -\zeta^2 z)^T = -\nabla \left(\frac{1}{2} (\zeta r)^2 \right) = -\nabla \left(\frac{1}{2} u_\theta^2 \right),$$

где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, $u_\theta = \zeta r$ – окружная скорость вращения системы. Так как

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} - \vec{\zeta} \times \mathbf{x}) = \vec{\omega} - 2\vec{\zeta},$$

получим

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{w}|^2 - u_\theta^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla P = \mathbf{w} \times \vec{\omega},$$

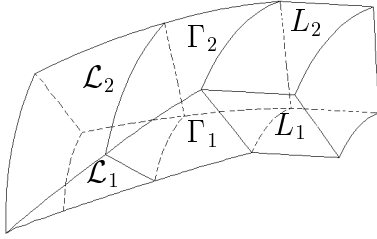


Рис. 1. Область межлопаточного канала.

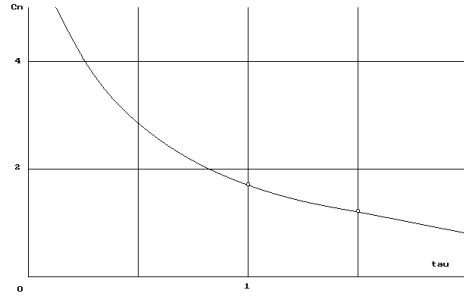


Рис. 2. Решётка винтовых лопастей. Сплошной линией показаны результаты работы [12].

$\vec{\omega}$ – завихренность в неподвижной системе координат.

Предположим, что завихренность в абсолютном движении отсутствует, а в относительном движении постоянна и обусловлена переходом в неинерциальную систему координат. Положим

$$\mathbf{w}(t, \mathbf{x}) = \nabla\Phi(t, \mathbf{x}) - \vec{\zeta} \times \mathbf{x}.$$

Подставим это выражение в предыдущее тождество и получим аналог интеграла Лагранжа

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\Phi - \vec{\zeta} \times \mathbf{x}|^2}{2} - \frac{P}{\rho} = b(t).$$

Уравнение неразрывности примет вид

$$\Delta\Phi = 0,$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Рассмотрим установившееся течение однородной несжимаемой жидкости через вращающийся осевой венец турбомшины. Перейдём в связанную с венцом декартову систему координат (x, y, z) . Осью венца положим ось x . В этой системе рассмотрим область Ω (1), ограниченную спинкой Γ_1 и корытцем Γ_2 двух соседних лопастей венца турбомшины, сходящими с задних кромок соседних лопастей поверхностями вихревой пелены за венцом $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, периодическими границами перед венцом L_1 , L_2 , примыкающими к передним кромкам соседних лопастей, а также поверхностями внутреннего (*tip*) и внешнего (*hub*) обводов.

Предположим, что течение в неподвижной системе координат является безвихревым. После перехода во вращающуюся с угловой скоростью ζ вокруг оси x систему – течение вихревое. Предположим малым вклад составляющей скорости, индуцированный возмущением поля завихренности лопастями, т.е. считаем

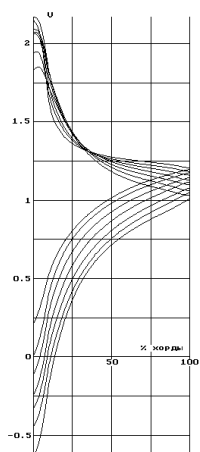


Рис. 3. Распределение скоростей стационарного течения на поверхности лопасти.

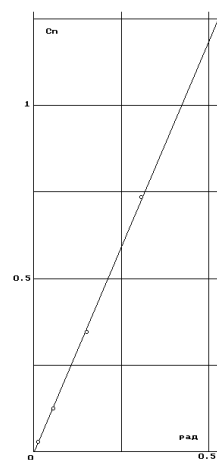


Рис. 4. Зависимость коэффициента C_n от угла атаки.

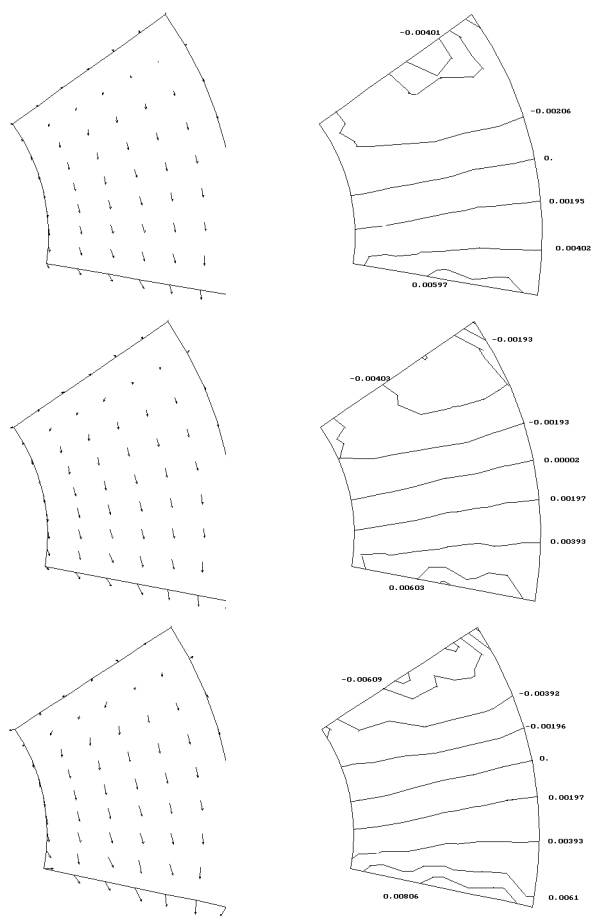


Рис. 5. Вторичное течение

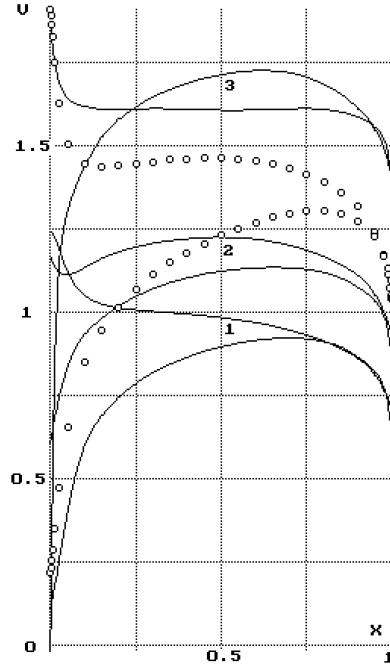


Рис. 6. Распределение скоростей на поверхности лопасти кольцевой ($N = 8$) решётки телесных ($T = 10\%$) профилей (линии). Точками – скорости на поверхности профиля плоской решётки.

во всей области вихрь постоянным и равным $-2\vec{\zeta}$. В условиях этих предположений потенциал не зависит от времени $\Phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(\mathbf{x})$ и удовлетворяет одному уравнению

$$\Delta\phi_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1)$$

Давление $p(\mathbf{x})$ определяется интегралом Бернулли

$$\frac{\mathbf{w}_0^2 - u_\theta^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\mathbf{V}_\infty^2 - u_{\theta,\infty}^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho},$$

где $\mathbf{w}_0 = \nabla\phi_0 - \vec{\zeta} \times \mathbf{x}$, $\mathbf{V}_\infty$ – вектор скорости, p_∞ – давление далеко перед венцом в точке, лежащей на той же линии тока. Заметим, что для осевых венцов можно считать отклонения линий тока по радиусу малыми, тогда интеграл Бернулли примет привычный вид

$$\frac{\mathbf{w}_0^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{\mathbf{V}_\infty^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}. \quad (2)$$

Итак, предполагаем, что далеко перед венцом имеется невозмущенный поток скорости $\mathbf{U}_\infty = (u_{\infty 1}, u_{\infty 2}, u_{\infty 3})^T$ такой, что $|\mathbf{U}_\infty| = 1$ на среднем радиусе, $u_{\infty 1} = \text{const}$ (ось x направим по оси венца), $u_{\infty 2}$ и $u_{\infty 3}$ постоянны на каждом радиусе и удовлетворяют условию потенциального вихря. На бесконечности за венцом ставится условие, обеспечивающее сохранение расхода. Например, если радиусы цилиндрических обводов постоянны по x , можно положить $u_{+\infty 1} = u_{\infty 1}$.

Условия на других границах следующие:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) - \left(\vec{\zeta} \times \mathbf{x} \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup tip \cup hub, \quad (3)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль, $\vec{\zeta}$ – вектор вращения венца вокруг своей оси.

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0(Q\mathbf{x}) + C_\infty, \quad \mathbf{x} \in L_1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}}(Q\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L_1, \quad Q\mathbf{x} \in L_2. \quad (5)$$

Константа C_∞ представляет тангенциальную составляющую скорости перед венцом вида $v_\theta = C_\infty / (\alpha R)$, где α – угол между соседними лопастями, R – расстояние до оси венца.

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \phi_0(Q\mathbf{x}) + C_0(\eta(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}_1, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) - \left(\vec{\zeta} \times \mathbf{x} \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, \quad (7)$$

η – естественная координата вдоль задней кромки, $C_0(\eta)$ – скачок потенциала скорости при переходе через вихревую пелену, являющуюся поверхностью контактного разрыва, при этом величина $C_0(\eta) - C_\infty$ равна циркуляции скорости вокруг лопасти по замкнутому контуру, имеющему точку на задней кромке с координатой η . В свою очередь, $\eta(\mathbf{x})$ обозначает координату частицы жидкости на задней кромке, затем перенесенную потоком в точку $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1$. Когда $\mathbf{x}$ лежит на задней кромке, условия (6), (7) являются одной из форм условия Жуковского-Кутта. Изменение $C_0(\eta)$ вдоль задней кромки даёт интенсивность свободных вихрей на пелене. Заметим, что в общем случае функция $C_0(\eta)$ и расположение поверхностей $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ неизвестны и подлежат определению.

Решение сформулированной краевой задачи осуществляется итерационным методом. В качестве первого приближения используется решение для течения несжимаемой жидкости с (произвольно) заданной функцией $C_0(\eta)$ и (произвольно) выбранным положением поверхности $\mathcal{L}_1$. Поверхность $\mathcal{L}_2$ при этом задаётся поворотом $\mathcal{L}_1$ на угол α вокруг оси венца. На очередном шаге итерационного процесса текущее приближение $\phi_0(\mathbf{x})$ используется для коррекции $C_0(\eta)$, выполнения условия Жуковского-Кутта на задней кромке и изменения границ области $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, таким образом, чтобы они являлись поверхностями контактного разрыва, т.е. на них выполнялось условие (7).

Частные задачи решаются приближённо методом конечных элементов в ограниченной области $\Omega' \subset \Omega$, содержащей межлопаточный канал и части Ω вверх и вниз по потоку, ограниченными плоскостями $G_{-\infty}, G_{+\infty}$, перпендикулярными оси венца. Условия на этих границах поставим следующие

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = -u_{\infty 1}, \quad \mathbf{x} \in G_{-\infty}$$

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = u_{+\infty 1}, \quad \mathbf{x} \in G_{+\infty}.$$

Затем Ω' разбивается на элементы – тетраэдры, вершины тетраэдров называются узлами разбиения.

Следуя методу конечных элементов, свяжем с каждым узлом разбиения $\mathbf{x}_l$ базисную кусочно-линейную функцию $V_l(\mathbf{x})$. На каждом тетраэдре $V_l(\mathbf{x})$ определяется как линейная функция, причём

$$V_l(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \neq l. \end{cases}$$

Эта функция финитна, носителем её является объединение тетраэдров с вершиной $\mathbf{x}_l$.

Приближение потенциала ищем в виде

$$\phi_0(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^N \phi_{0l} V_l(\mathbf{x}), \quad (8)$$

где ϕ_{0l} – узловые значения приближения на разбиении Ω' .

В слабой интегральной форме уравнение (1) можно записать в виде

$$\int_{\Omega'} (\nabla \phi_0(\mathbf{x}) \cdot \nabla V_l(\mathbf{x})) d\Omega = \int_{\partial\Omega'} (\nabla \phi_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) V_l(\mathbf{x}) dS. \quad (9)$$

Подставим (8) в (9), получим

$$\sum_{j=1}^N \phi_{0j} \int_{\Omega'} (\nabla V_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla V_l(\mathbf{x})) d\Omega = \int_{\partial\Omega'} (\nabla \phi_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) V_l(\mathbf{x}) dS$$

или

$$\sum_{j=1}^N a_{lj} \phi_{0j} = b_l,$$

$$a_{ij} = \int_{\Omega'} (\nabla V_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla V_l(\mathbf{x})) d\Omega, \quad b_l = \int_{\partial\Omega'} (\nabla \phi_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) V_l(\mathbf{x}) dS.$$

С учётом сказанного можно записать:

$$\sum_{T \ni l} \sum_{j \in T} \phi_{0j} g_{ljT} = b_l, \quad (10)$$

где

$$g_{ljT} = \int_T (\nabla V_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla V_l(\mathbf{x})) dT = (\nabla V_j|_T \cdot \nabla V_l|_T) Vol_T$$

– вклад в элемент матрицы a_{lj} тетраэдра разбиения T . Вклад тетраэдра в симметричный относительно диагонали элемент матрицы a_{jl} по величине совпадает с g_{ljT} , что обеспечивает симметричность матрицы. Vol_T – объём T .

Для удовлетворения условию периодичности полученная система редуцируется отождествлением соответствующих узлов на периодических границах. При этом в некоторых уравнениях редуцированной системы появляется правая часть, зависящая от C_∞ и дискретного представления $C_0(\eta)$.

Пусть l_1, l_2 – номера соответственных узлов на периодической границе. Для определенности $\mathbf{x}_{l_1} \in \mathcal{L}_1, \mathbf{x}_{l_2} \in \mathcal{L}_2$. Имеем два уравнения вида (10) (индекс T в коэффициентах g опущен).

$$\sum_{T \ni l_1} \left(\sum_{\substack{j \in T \\ j \in \mathcal{L}_1}} \phi_{0j} g_{l_1 j} + \sum_{\substack{k \in T \\ k \notin \mathcal{L}_1}} \phi_{0k} g_{l_1 k} \right) = \int_{\partial \Omega'} ((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) V_{l_1}(\mathbf{x}) dS, \quad (11)$$

$$\sum_{T \ni l_2} \left(\sum_{\substack{j \in T \\ j \in \mathcal{L}_2}} \phi_{0j} g_{l_2 j} + \sum_{\substack{k \in T \\ k \notin \mathcal{L}_2}} \phi_{0k} g_{l_2 k} \right) = \int_{\partial \Omega'} ((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) V_{l_2}(\mathbf{x}) dS, \quad (12)$$

Здесь правые части уравнений определены условием (7). Покажем, что они равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Во-первых, $\mathbf{n}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2} = -Q\mathbf{n}|_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1}$ и $\vec{\zeta} = Q\vec{\zeta}$ (вектор вращения направлен вдоль оси венца); учитывая, что Q – матрица вращения ($Q^{-1} = Q^T$), получим

$$\begin{aligned} ((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1} &= ((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) \cdot Q^{-1}Q\mathbf{n})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1} = \\ &= ((\vec{\zeta} \times Q\mathbf{x}) \cdot Q\mathbf{n})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1} = -((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2}. \end{aligned}$$

Предположение о том, что лопасти имеют заостренные задние кромки, обеспечивает выполнение этих тождеств и для узлов на задних кромках.

Во-вторых, разбиения поверхностей производятся таким образом, что одно переходит в другое при повороте вокруг оси венца, а значения функций $V_{l_1}(\mathbf{x})$, $V_{l_2}(\mathbf{x})$ в любом тетраэдре из носителя определяется только взаимным расположением вершин тетраэдра и не зависит от его расположения относительно оси координат. В частности, значение в точке на грани зависит только от взаимного расположения вершин грани. Из сказанного следует

$$V_{l_1}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \mathcal{L}_1} = V_{l_2}(Q\mathbf{x})|_{Q\mathbf{x} \in \mathcal{L}_2}.$$

Рассмотренные тождества обеспечивают равенство с точностью до знака интегралов в правых частях (11), (12).

Пусть узлы разбиения занумерованы так, что, если $\mathbf{x}_j \in \mathcal{L}_1$, то $\mathbf{x}_{j+N_p} \in \mathcal{L}_2$, $\mathbf{x}_{j+N_p} = Q\mathbf{x}_j$, N_p – количество узлов на периодической границе. Тогда, заменяя в уравнении (11) значения потенциала в узлах разбиения $\mathcal{L}_1$ по условию (6) на значения в узлах разбиения $\mathcal{L}_2$ плюс разрыв

$$\phi_{0j} = \phi_{0,j+N_p} + C_{0j} \quad \mathbf{x}_j \in \mathcal{L}_1$$

и складывая его с уравнением (12), получим уравнение, не содержащее узловых значений потенциала на $\mathcal{L}_1$

$$\begin{aligned} \sum_{T \ni l_1} \left(\sum_{\substack{j \in T \\ j \in \mathcal{L}_1}} \phi_{0,j+N_p} g_{l_1 j} + \sum_{\substack{k \in T \\ k \notin \mathcal{L}_1}} \phi_{0k} g_{l_1 k} \right) + \sum_{T \ni l_2} \left(\sum_{\substack{j \in T \\ j \in \mathcal{L}_2}} \phi_{0j} g_{l_2 j} + \sum_{\substack{k \in T \\ k \notin \mathcal{L}_2}} \phi_{0k} g_{l_2 k} \right) = \\ = - \sum_{T \ni l_1} \sum_{\substack{j \in T \\ j \in \mathcal{L}_1}} C_{0j} g_{l_1 j}. \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, два уравнения (11) и (12) можно заменить на одно (13). Уравнения с $l \notin \mathcal{L}_1$ дают:

$$\begin{aligned} \sum_{T \ni l} \left(\sum_{\substack{j \in T \\ j \in \mathcal{L}_1}} \phi_{0,j+N_p} g_{lj} + \sum_{\substack{k \in T \\ k \notin \mathcal{L}_1}} \phi_{0k} g_{lk} \right) = \int_{\partial \Omega'} ((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) V_l(\mathbf{x}) dS - \\ - \sum_{T \ni l} \sum_{\substack{j \in T \\ j \in \mathcal{L}_1}} C_{0j} g_{lj}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подобным образом удаляем уравнения с номерами l : $\mathbf{x}_l \in L_1$, используя условия (4), (5). Легко видеть, что редуцированная система остаётся симметричной.

Следующий вопрос – о разрешимости полученной системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим элементы матрицы в строке с номером l . Вклад в диагональный элемент матрицы тетраэдра $T \ni l$

$$g_{llT} = (\nabla V_l|_T \cdot \nabla V_l|_T) > 0.$$

С другой стороны, учитывая тождества

$$\sum_{j \in T} V_j(\mathbf{x})|_T = 1, \quad \sum_{j \in T} \nabla V_j|_T = 0.$$

которые следуют из определения функций $V_j(\mathbf{x})$, для суммы вкладов в другие элементы строки матрицы тетраэдра T получим цепочку

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \in T \\ j \neq l}} g_{jlT} &= \sum_{\substack{j \in T \\ j \neq l}} (\nabla V_j|_T \cdot \nabla V_l|_T) = \left(\sum_{\substack{j \in T \\ j \neq l}} \nabla V_j|_T \right) \cdot \nabla V_l|_T = \\ &= -(\nabla V_l|_T \cdot \nabla V_l|_T) = -g_{llT}. \end{aligned}$$

Из чего следует, что сумма элементов матрицы в строке равна нулю. Матрица вырождена, так как вектор, состоящий из единиц, является собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению.

Вырожденность матрицы системы без условий закрепления – проявление того, что потенциал скоростей для краевой задачи Неймана определен с точностью до константы. Способ получить решение – найти его в подпространстве, ортогональном собственному вектору системы, который отвечает нулевому собственному числу. Нетривиальное решение существует в силу того, что необходимое условие разрешимости системы с вырожденной матрицей – ортогональность правой части исходной системы решениям однородной системы с сопряженной матрицей – в рассматриваемой задаче эквивалентно дискретному аналогу условия сохранения массы газа при протекании через область

$$0 = \int_{\Omega'} \operatorname{div} \nabla \phi_0 d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega'} (\nabla \phi_0 \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Для решения линейной системы алгебраических уравнений $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ с симметричной матрицей A , которая имеет собственный вектор $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$, отвечающий нулевому собственному числу, а правая часть $\mathbf{b}$ ортогональна $\mathbf{e}$, воспользуемся итерационным методом, например, вида

$$\frac{1}{\tau}(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{y}^{(k-1)}) + A\mathbf{y}^{(k-1)} = \mathbf{b}.$$

Тогда легко увидеть, что, выбрав вектор начального приближения $\mathbf{y}^{(0)}$ ортогональным вектору $\mathbf{e}$, на следующем шаге получим вектор $\mathbf{y}^{(1)}$ с таким же свойством. Если процесс сходящийся, то предел последовательности ортогонален $\mathbf{e}$ и является решением системы.

Коррекция C_{0l} производится по уравнению (11) для узлов на задней кромке $\mathbf{x}_l \in \mathcal{L}_1 \cap \Gamma_1$. Как видим, правая часть уравнения пропорциональна перетеканию через границу, именно

$$\int_{\partial\Omega'} ((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) V_l(\mathbf{x}) dS \sim ((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}_l) \cdot \mathbf{n}).$$

Используем (11) как формулу для расчёта правой части по текущему приближению $\phi_0(\mathbf{x})$. Полученная величина характеризует величину перетекания через $\mathcal{L}_1$ в точках задней кромки. Условие на задней кромке считаем выполненным, если дефект

$$d_l = \sum_{T \ni l} \sum_{j \in T} \phi_{0j} g_{ljT} - ((\vec{\zeta} \times \mathbf{x}_l) \cdot \mathbf{n}) S_l / 3$$

удовлетворяет условию

$$|d_l| < \epsilon \quad (15)$$

для всех узлов на задней кромке, где ϵ – заданная точность. S_l – площадь треугольников, образующих разбиение границы и содержащих вершину $\mathbf{x}_l$. Внешнюю нормаль $\mathbf{n}$ в рассматриваемой точке следует понимать как *среднюю нормаль* всех примыкающих треугольников

$$\mathbf{n} = \frac{1}{S_l} \sum_{K \ni l} \mathbf{n}_K S_K, \quad S_l = \sum_{K \ni l} S_K.$$

Если (15) не выполняется – подправим значение C_{0l} . Дефект скорости по нормали к пелене в узле на задней кромке равен

$$u_n = 3 \frac{d_l}{S_l}. \quad (16)$$

Средняя скорость в окружном направлении $u_\theta = C_{0l}/(\alpha R_l)$, R_l – расстояние от $\mathbf{x}_l$ до оси венца. Проекция скорости на нормаль есть $u_\theta(\mathbf{t}_l \cdot \mathbf{n})$, где $\mathbf{t}_l$ – единичный вектор, который, будучи помещен в точку $\mathbf{x}_l$, касается окружности с центром на оси венца, окружность лежит в нормальной оси венца плоскости. Учитывая вышесказанное, можно положить

$$C_{0l}^{(k)} = C_{0l}^{(k-1)} + h\delta_l$$

$$\delta_l = u_n \frac{\alpha R_l}{(\mathbf{t}_l \cdot \mathbf{n})},$$

$h > 0$ – релаксационный параметр.

Возможность определения величин перетекания в узлах на пелене за кромкой позволяет скорректировать положение пелены. Рассмотрим узел $\mathbf{x}_l \in \mathcal{L}_1$. Выше по потоку на пелене имеется узел $\mathbf{x}_k$. В $\mathbf{x}_l$ скорость вдоль поверхности пелены обозначим $\mathbf{u}_\xi$ – она вычисляется по значениям потенциала в точках $\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_k$ в предположении, что указанные точки лежат вдоль линии тока на пелене. Нормальная к пелене скорость u_n вычисляется по формуле (16). Идея заключается в том, чтобы сместить $\mathbf{x}_l$ в $\mathbf{x}'_l$ так, чтобы тангенс угла между векторами $\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k$ и $\mathbf{x}'_l - \mathbf{x}_k$ равнялся $u_n/|\mathbf{u}_\xi|$, то есть совместить направление вектора на пелене $\mathbf{x}'_l - \mathbf{x}_k$ с направлением вектора скорости $\mathbf{u}_\xi + u_n \mathbf{n}$.

Построим $\mathbf{x}'_l$ поворотом точки $\mathbf{x}_l$ вокруг оси венца. Тогда геометрические рассуждения приводят к выражению для дуги окружности между этими двумя точками.

$$a = \frac{u_n |\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k|}{|\mathbf{u}_\xi| \sin \beta + u_n \cos \beta},$$

где $\cos \beta = (\mathbf{t}_l \cdot \mathbf{n})$.

Таким образом, при коррекции пелены точку $\mathbf{x}_l$ нужно повернуть на угол a/R_l вокруг оси венца.

3. Расчётные аспекты

Итак, для получения численного решения о стационарном течении через венец лопастей в ограниченной по размаху области требуется итерационная процедура. От шага к шагу изменяется расчётная область, что отражается в величинах элементов матрицы и правой части линейной системы в силу изменения носителей базисных функций $V_l(\mathbf{x})$. Изменяются величины разрыва потенциала на пелене (правая часть).

Первое замечание касается выбора метода решения линейной системы. Её саму следует решать итерационным методом. Основной аргумент – итераций для решения системы линейных алгебраических уравнений требуется тем меньше,

чем точнее задано первое приближение: таковым естественно взять полученный последним результат «внешних» итераций. Если итерационный процесс решения задачи сходится, то количество «внутренних» итераций для частной задачи должно падать до одной итерации на решение линейной системы, что является критерием останова «внешнего» процесса. Стационарные методы решения линейных систем не используют такого рода «априорную» информацию: время их работы фиксировано и зависит от порядка системы и ширины (полу)ленты. Другим аргументом служат меньшие затраты машинной памяти. Итерационный метод требует хранения только ненулевых элементов матрицы; стационарный – (порядок системы $\times$ ширина (полу)ленты) элементов. Второй сомножитель зависит от нумерации узлов разбиения области. Применяются различные процедуры перенумерации, предваряющие формирование матрицы, уменьшающие ширину (полу)ленты. Пространственность и наличие периодических границ в расчётной области, когда разнесенные в пространстве узлы взаимодействуют, ведут к большим потерям памяти.

Второе замечание относится к расчёту разрыва и положения пелены. Расчёты показали, что величины разрыва потенциала, определяемые через условие Жуковского-Кутта на задней кромке, сходятся быстро, характер сходимости монотонный. Вычисленное так распределение циркуляции по размаху лопасти определяет основной вклад в интегральные характеристики лопасти. Следующим по значимости вклад вносится учётом распределения углов схода потока путём подстройки положения пелены. Конечно, в процессе подстройки меняются и величины разрывов потенциала. Влияние на венец дальнейшей эволюции пелены вниз по потоку очень быстро (на порядки) падает.

Как уже отмечалось, пелена неустойчива относительно малых возмущений, следовательно, задача определения её положения и формы является некорректной. Требуется какого-либо рода регуляризация процесса подстройки положения пелены. Нами использован принцип монотонности изменения положения узлов по высоте на каждом шаге. Потеря точности при этом составляет порядок по сравнению с точностью на твёрдых стенках: если на стенках (и внутри области) уравнение вида (11) выполняется с точностью 10^{-5} , то на пелене она на порядок ниже. Характер сходимости процесса с подстройкой немонотонный и требует в несколько раз большего количества итераций, чем процесс подбора величин разрыва потенциала. Удобна следующая стратегия организации итерационного процесса: вдоль направления потока выбирать ряд узлов по размаху на пелене с максимальным перетеканием и для этого ряда проводить необходимые изменения. Как правило, в начале процесса максимальное перетекание наблюдается на кромке (выстраивается распределение циркуляции), затем в первом ряду за кромкой (выстраивается распределение углов схода потока) и так далее.

Рассмотрим в качестве примера несжимаемое течение через пространственный осевой венец, лопасти которого представляют части винтовых поверхностей таких, что течение со скоростью $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \vec{\omega} \times \mathbf{x}$ через венец является однородным, $\mathbf{u}_0$ направлен вдоль оси венца. Лопасть представляет собой прямоугольник $\{r_0 \leq r \leq r_1, -\psi + \alpha n \leq \theta \leq \psi + \alpha n\}$ в координатах (r, θ) , где θ –

угол в тангенциальном направлении, α – угол между соседними лопастями, n – порядковый номер лопасти. Вдоль оси венца лопасть ограничена координатами $x = \frac{\theta}{2}(r_1 - r_0) \operatorname{ctg} \beta$. Мы брали $\psi = 0,19635$, $\beta = \pi/6$, $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, число лопастей – $N = 8, 12, 16$. При этом густота на среднем радиусе составляла $\tau = 1, 0; 1, 5; 2, 0$. На рис.2 приведены результаты расчётов по методу конечных элементов в сравнении с результатами работы [12], в которой применён метод дискретных вихрей. Здесь для расчётов угол атаки задавался равным $\pi/6$ на среднем радиусе.

На рис.3 представлены распределения скоростей вдоль хорды для разных радиусов по высоте (скорости на задней кромке убывают с ростом радиуса).

На рис.4 представлен график изменения коэффициента нормальной силы в зависимости от угла атаки на среднем радиусе. Угол атаки менялся вследствие изменения угловой скорости вращения. Как видно из графика, все точки лежат на прямой $C_n = C_n^\alpha \alpha$.

Анализируя этот же рисунок, можно заключить, что в данном случае влияние формы вихревой пелены на интегральные характеристики лопасти невелико – коэффициент нагрузки линейно зависит от угла атаки. Тем не менее и здесь можно проследить влияние вихревой пелены (вторичное течение). Рассчитаем положение вихревой пелены и заменим периодические граничные условия за венцом на условие непротекания (стенка). Решив задачу, получим некое течение в системе каналов заданной формы. Затем рассмотрим разность двух решений. Она будет представлять течение, обусловленное стационарной вихревой системой. На рис.5 иллюстрировано вторичное течение в трёх последовательных перпендикулярных оси венца сечениях. Первое содержит задние кромки, последующие расположены ниже по течению на расстоянии 5% и 10% хорды. Слева показаны поля направления скоростей в плоскости сечений, справа – изолинии осевой компоненты скорости. Порядок скорости у задней кромки есть единица (рис.3), поэтому можно заключить, что разница в скоростях двух течений составляет в данном случае $\approx 0,5\%$.

Рассмотрим течение в решётке телесных профилей. На рис.6 приведены распределения скоростей на лопасти при стационарном обтекании неподвижного осевого венца. Количество лопастей $N = 8$. Относительная толщина профиля $T = 0,1$ от величины хорды. Густота решётки на среднем радиусе $\tau = 1$. Высота лопастей равна величине хорды. Угол установки $\beta = 60^\circ$. (1) – скорости на втулке, (2) – на среднем радиусе, (3) – на внешнем обводе. Для сравнения точками показано распределение скоростей в плоской решётке. Как видно из рисунка, имеет место неравномерность распределения поля стационарного течения по высоте лопасти.

4. Сходимость

Здесь рассмотрен вопрос о сходимости приближённого решения трёхмерной задачи Неймана для оператора Лапласа.

Известно (См., например, [13] гл. IV), что (обобщённое) решение данной за-

дачи существует и единственно в энергетическом пространстве определённого линейного оператора. Это пространство вкладывается в пространство (локально) интегрируемых функций, поэтому его можно аппроксимировать последовательностью конечномерных подпространств, базисными функциями которых могут быть, в частности, кусочно-линейные. Приближения к решению в каждом из конечномерных подпространств образуют последовательность Ритца, сходящуюся в энергетической норме к решению. Метод Бубнова-Галёркина оказывается методом построения элемента последовательности Ритца.

Представляет интерес вопрос о сходимости в терминах пространств функций, определённых на сетках дискретизации расчётной области. Действовать будем в духе теоремы сходимости [14]. Плюсы: во-первых, требуется изучать свойства разностного оператора, действующих на *конечномерных* пространствах сеточных функций, во-вторых, имеем в виду относительно простое обобщение на нелинейные задачи (например, течение газа), так как при наличии у разностного оператора аппроксимационных свойств условие устойчивости рассматривается для линеаризованного уравнения.

Рассмотрим разностный оператор относительно $\phi_1, \dots, \phi_N$ с заданными значениями нормальной производной на границе $\phi_{ni} = u_{ni}$

$$\sum_{T \ni i} \sum_{j \in T} \phi_j (\nabla V_i \cdot \nabla V_j) Vol_T - \frac{1}{3} \phi_{ni} \sum_{\Delta \ni i} S_\Delta = 0, \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

Подставим в разностный оператор значения точного решения в $\{u_i\}_{i=1}^N$, взятые в узлах разбиения $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ области Ω , $u_i = u(\mathbf{x}_i)$, (если точка неособая и u_i конечно)

$$\psi_i = \sum_{T \ni i} \sum_{j \in T} u_j (\nabla V_i \cdot \nabla V_j) Vol_T - \frac{1}{3} u_{ni} \sum_{\Delta \ni i} S_\Delta, \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

Второе слагаемое есть

$$- \int_{\partial \Omega'} (\nabla u(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}) V_i dS.$$

По узловым значениям u_i строим кусочно-линейный интерполянт $u_I(\mathbf{x})$. Тогда первое слагаемое есть

$$\int_{\Omega'} (\nabla u_I \cdot \nabla V_i) d\Omega = - \int_{\Omega'} \Delta u_I V_i d\Omega + \sum_T \int_{\partial T} (\nabla u_I \cdot \mathbf{n}) V_i dS.$$

Интегралы по границам тетраэдров возникают в силу разрывности градиента кусочно-линейной u_I . ∇u_I кусочно-постоянен, $\Delta u_I = 0$.

$$\psi_i = \sum_T \int_{\partial T} (\nabla u_I \cdot \mathbf{n}) V_i dS - \int_{\partial \Omega'} (\nabla u(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}) V_i dS.$$

Разложив функцию $u(\mathbf{x})$ в ряд в точке $\mathbf{x}'$ до второго порядка, учитывая, что $\sum_{j \in T} \nabla V_j = 0$, получим

$$\begin{aligned} \nabla u_I(\mathbf{x}') &= \nabla \left(\sum_{j \in T} u(\mathbf{x}_j) V_j(\mathbf{x}') \right) = \sum_{j \in T} u(\mathbf{x}_j) \nabla V_j = \\ &= \sum_{j \in T} \left(u(\mathbf{x}') + (\nabla u(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}')) + \frac{1}{2} (D_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}')) \right) \nabla V_j = \\ &= \sum_{j \in T} (\nabla u(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}_j) \nabla V_j + \frac{1}{2} \sum_{j \in T} (D_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}')) \nabla V_j, \end{aligned}$$

где D_j – матрица с компонентами $\{d_{lk}\}_{l,k=1,2,3}$,

$$d_{lk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k}(\mathbf{x}' + \theta_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}')), \quad \theta_j \in [0, 1].$$

В точке $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_i \in T$

$$\nabla u_I(\mathbf{x}_i) = \sum_{j \in T} (\nabla u(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{x}_j) \nabla V_j + \frac{1}{2} \sum_{j \in T} (D_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)) \nabla V_j.$$

Заметим, что для любого постоянного вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ имеет место тождество

$$\mathbf{a} = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = \nabla \left(\mathbf{a} \cdot \sum_{j \in T} \mathbf{x}_j V_j(\mathbf{x}) \right) = \sum_{j \in T} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_j) \nabla V_j.$$

Таким образом,

$$\nabla u_I(\mathbf{x}_i) = \nabla u(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in T} (D_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)) \nabla V_j.$$

Вычислим вклад разрывов производных при переходе через грани тетраэдров, при этом учтём, что, во-первых, $u(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема (при переходе через грань скачок градиента равен нулю), и, во-вторых, для любого постоянного вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^3$ поток через границу тетраэдра равен нулю ($\sum_{\Delta \in T} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_\Delta) S_\Delta = 0$).

$$\begin{aligned} \sum_T \int_{\partial T} (\nabla u_I \cdot \mathbf{n}) V_i dS &= \sum_{T \ni i} \sum_{\Delta \ni i} (\nabla u_I \cdot \mathbf{n}_\Delta) \frac{S_\Delta}{3} = \\ &= \sum_{T \ni i} \sum_{\Delta \ni i} \left(\left(\nabla u(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \in T} (D_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)) \nabla V_j \right) \cdot \mathbf{n}_\Delta \right) \frac{S_\Delta}{3} = \\ &= \int_{\partial \Omega'} (\nabla u(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}) V_i dS - \sum_{T \ni i} \left(\left(\frac{1}{2} \sum_{j \in T} (D_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)) \nabla V_j \right) \cdot \mathbf{n}_i \right) \frac{S_i}{3}, \end{aligned}$$

где S_i – площадь грани, лежащей напротив вершины с номером i , $\mathbf{n}_i$ – её внешняя нормаль.

Завершим равномерную оценку

$$\begin{aligned} |\psi_i| &\leq \sum_{T \ni i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j \in T} \|D_j\|_2 |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^2 |\nabla V_j| \right) \frac{S_i}{3} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \|D\|_2 a_{\max}^2 \frac{1}{h_{\min}} \sum_{T \ni i} S_i \leq \frac{1}{2} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \|D\|_2 \frac{a_{\max}^2}{h_{\min}} \sum_{T \ni i} \omega_{iT} a_{\max}^2. \end{aligned}$$

$a_{\max}$ – наибольшая длина ребра тетраэдра разбиения области, $h_{\min}$ – наименьшая высота тетраэдра разбиения области, ω_{iT} – телесный угол, под которым из вершины с номером i видна противоположная грань тетраэдра T . $\sum_{T \ni i} \omega_{iT} \leq 4\pi$.

Окончательно

$$\left\| \vec{\Psi} \right\|_{\infty} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} |\psi_i| \leq 2\pi \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \|D\|_2 \frac{a_{\max}^4}{h_{\min}}. \quad (17)$$

Для ошибки $z_i = \phi_i - u_i$ схема имеет вид

$$\sum_{T \ni i} \sum_{j \in T} z_j (\nabla V_i \cdot \nabla V_j) \text{Vol}_T = -\psi_i \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

В операторном виде

$$A^{(N)} \vec{Z} = -\vec{\Psi}.$$

Линейный оператор $A^{(N)}$, рассматриваемый в области определения $\mathbf{R}^N \setminus \{\mathbf{e}\}$, где $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^N$, является обратимым. Покажем сначала, что матрица $A^{(N)}$ неотрицательно определена, то есть для любого $\vec{\xi} \in \mathbf{R}^3$, $\vec{\xi} \neq 0$ выполнено $(A^{(N)} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}) \geq 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} (A^{(N)} \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}) &= \sum_{i=1}^N \xi_i \sum_{T \ni i} \sum_{j \in T} \xi_j (\nabla V_i \cdot \nabla V_j) \text{Vol}_T = \sum_{i=1}^N \xi_i \sum_{T \ni i} (\nabla V_i \cdot \vec{\xi}_T) \text{Vol}_T = \\ &= \sum_T \sum_{i \in T} \xi_i (\nabla V_i \cdot \vec{\xi}_T) \text{Vol}_T = \sum_T (\vec{\xi}_T \cdot \vec{\xi}_T) \text{Vol}_T \geq 0, \end{aligned}$$

$\vec{\xi}_T = \sum_{j \in T} \xi_j \nabla V_{jT}$ – градиент кусочно-линейной функции, заданной узловыми значениями ξ_i , $i \in \{1, \dots, N\}$. Чтобы сделать вывод о невырожденности линейного оператора $A^{(N)}$, определённого на подпространстве $\mathbf{R}^N \setminus \{\mathbf{e}\}$, достаточно заметить, что если у вектора $\vec{\xi}$ не все компоненты одинаковы, то в разбиении области существуют тетраэдры, для которых $\vec{\xi}_T \neq 0$. Следовательно, нестрогое неравенство нужно заменить строгим на $\mathbf{R}^N \setminus \{\mathbf{e}\}$, оператор – положительно определён.

Рассмотрим поведение ошибки в равномерной норме.

$$\delta \left\| \vec{Z} \right\|_{\infty}^2 \leq (A^{(N)} \vec{Z} \cdot \vec{Z}) = -(\vec{\Psi} \cdot \vec{Z}) \leq \left\| \vec{\Psi} \right\|_2 \left\| \vec{Z} \right\|_2 \leq N \left\| \vec{\Psi} \right\|_{\infty} \left\| \vec{Z} \right\|_{\infty}.$$

Или

$$\|\vec{Z}\|_\infty \leq \frac{N}{\delta} \|\vec{\Psi}\|_\infty. \quad (18)$$

Оценим δ по следующей схеме

$$\begin{aligned} (A^{(N)}\vec{\xi} \cdot \vec{\xi}) &= \sum_T (\vec{\xi}_T \cdot \vec{\xi}_T) Vol_T = \\ &= \sum_T \left(\sum_{i \in T} \sum_{j \in T} (\nabla V_i|_T \cdot \nabla V_j|_T) \xi_j \xi_i \right) Vol_T = \sum_T (W_T M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi}) Vol_T \geq \\ &\geq \sum_T \mu_T \left(M_T \vec{\xi} - \frac{(M_T \vec{\xi} \cdot M_T \mathbf{e})}{4} M_T \mathbf{e} \right)^2 Vol_T = \\ &= \sum_T \mu_T \left((M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi}) - \frac{1}{4} (M_T \vec{\xi} \cdot M_T \mathbf{e})^2 \right) Vol_T \geq \\ &\geq \min_T \{ \mu_T Vol_T \} \sum_T \left((M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi}) - \frac{1}{4} (M_T \vec{\xi} \cdot M_T \mathbf{e})^2 \right). \end{aligned}$$

Матрица $M_T = \{m_{Tij}\}_{\substack{i \in \{1, \dots, 4\} \\ j \in \{1, \dots, N\}}}$ есть матрица перевода глобальной нумерации узлов в локальную нумерацию в элементе T , символически можно записать так: $m_{Tij} = 1$, если $\log_T(j) = i$, нуль в остальных случаях. W_T – матрица размером 4×4 с элементами $\{(\nabla V_i|_T \cdot \nabla V_j|_T)\}_{i, j \in T}$. W_T есть вырожденная в силу тождества $\sum_{i \in T} \nabla V_i = 0$ неотрицательно определённая матрица. μ_T – минимальное ненулевое собственное значение матрицы W_T . Так как $(W_T M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi}) = (\vec{\xi}_T \cdot \vec{\xi}_T)$,

$$\mu_T = \inf_{\substack{(M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi})=1 \\ (M_T \vec{\xi} \cdot M_T \mathbf{e})=0}} (\vec{\xi}_T \cdot \vec{\xi}_T) \geq \left(\frac{1}{a_{\max}} \right)^2. \quad (19)$$

Пусть L – матрица 4×4 с элементами, равными единице. Заметим, что

$$\frac{1}{4} (M_T \vec{\xi} \cdot M_T \mathbf{e})^2 = \left(\frac{1}{4} L M_T \vec{\xi} \cdot \frac{1}{4} L M_T \vec{\xi} \right) = \left(\frac{1}{4} L M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi} \right).$$

Обозначим $\mu_\Omega = \min_T \{ \mu_T Vol_T \}$ и продолжим описание схемы оценки δ :

$$\begin{aligned} (A^{(N)}\vec{\xi} \cdot \vec{\xi}) &\geq \mu_\Omega \sum_T \left((M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi}) - \left(\frac{1}{4} L M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi} \right) \right) = \\ &= \mu_\Omega \sum_T \left(\left(E - \frac{1}{4} L \right) M_T \vec{\xi} \cdot M_T \vec{\xi} \right) = \mu_\Omega \sum_T \sum_{i \in T} \left(\xi_i - \frac{1}{4} \sum_{j \in T} \xi_j \right) \xi_i = \\ &= \frac{\mu_\Omega}{8} \sum_T \sum_{i \in T} \sum_{j \in T} (\xi_i - \xi_j)^2. \end{aligned}$$

Далее пусть $i_1, \dots, i_k$ – путь, соединяющий узлы с номерами i_0, i_k при движении по рёбрам тетраэдров разбиения области, при этом

$$\xi_{i_0} = \xi_{\max} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \xi_i, \quad \xi_{i_k} = \xi_{\min} = \min_{i \in \{1, \dots, N\}} \xi_i.$$

Заметим, что $\xi_{\max}$ и $\xi_{\min}$ в силу условия $\sum_{i=1}^N \xi_i = 0$ имеют разные знаки. Тогда

$$\sum_T \sum_{i \in T} \sum_{j \in T} (\xi_i - \xi_j)^2 > 2 \sum_{j=1}^k (\xi_{i_j} - \xi_{i_{j-1}})^2 \geq \frac{2}{k} (\xi_{\max} - \xi_{\min})^2 > \frac{2}{N} \|\vec{\xi}\|_{\infty}^2. \quad (20)$$

Итак, следуя неравенствам (19), (20), в (18) можно принять

$$\delta = \frac{1}{4N \cdot a_{\max}^2} \min_T Vol_T. \quad (21)$$

Оценим снизу объём тетраэдра.

$$\begin{aligned} Vol_T &= \sum_{j \in T} \frac{1}{3} S_{jT} \frac{h_{jT}}{4} = \sum_{j \in T} \frac{1}{3} \omega_{jT} \left(\frac{h_{jT}}{4} \right)^3 \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \min_{j \in T} \left(\frac{h_{jT}}{4} \right)^3 \sum_{j \in T} \omega_{jT} = \frac{4\pi}{4^3 \cdot 3} \min_{j \in T} h_{jT}^3. \end{aligned}$$

здесь ω_{jT} – телесный угол, под которым грань тетраэдра, лежащая напротив узла с номером j , видна из средней точки $\mathbf{x}_T = \frac{1}{4} \sum_{j \in T} \mathbf{x}_j$, h_{jT} – высота тетраэдра, опущенная из вершины с номером j . В частности,

$$\min_T Vol_T \geq \frac{\pi}{48} h_{\min}^3. \quad (22)$$

Введём норму $\|\cdot\|_N = \frac{1}{N^2} \|\cdot\|_{\infty}$. Подстановкой в (18) оценок δ (21) и $\|\vec{\Psi}\|_{\infty}$ (17), используя (22), получим в этой норме

$$\|\vec{Z}\|_N < 2^7 \cdot 3 \cdot \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \|D\|_2 \frac{a_{\max}^6}{h_{\min}^4}. \quad (23)$$

что означает сходимость с порядком 2 по шагу сетки в данной норме (в предположении ограниченности $\|D\|_2$).

Введённая норма является нормой в пространстве сеточных функций. Её невырожденность (в терминах последовательности сеточных функций это означает, что условие $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\vec{Z}_N\|_N = 0$ влечёт $\lim_{N \rightarrow \infty} \vec{Z}_N = 0$) обеспечивает существование согласованной с ней нормы в пространстве решения исходной вариационной задачи.

Ситуация станет более ясной, когда мы нормируем базисные функции $\tilde{V}_i(\mathbf{x}) = NV_i(\mathbf{x})$, $i \in 1, \dots, N$. Система нормированных базисных функций оказывается *сильно минимальной* [15]. Приближённое решение ищем в виде $\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1} N \tilde{\phi}_i \tilde{V}_i(\mathbf{x})$. В этом случае точное значение $u_i \approx N \tilde{\phi}_i$, и, как легко убедиться, оценка для $\vec{\Psi}$ совпадает с (17). Для ошибки определения коэффициентов $\tilde{z}_i = \tilde{\phi}_i - \frac{u_i}{N}$ получим

$$N^2 A^{(N)} \vec{Z} = -\vec{\Psi},$$

где $A^{(N)}$ – матрица, рассмотренная ранее. Проведя в точности те же рассуждения, получим для ошибки определения нормированных коэффициентов $\vec{Z}$ оценку (23) уже в равномерной ($\|\cdot\|_\infty$) норме.

Заключительное замечание относится к актуальному случаю неограниченного решения. Поведение решения и его производных в окрестности особых точек, таких как острая передняя кромка в случае решёток лопастей, известно. Решение ведёт себя как $\sim \frac{1}{r}$, r – расстояние до особой точки, вторые производные – как $\sim \frac{1}{r^3}$. Принимая во внимание, что можно оценить количество узлов сетки

$$\frac{Vol_\Omega}{\pi a_{\max}^3} \leq N \leq 2^6 \cdot 3 \cdot \frac{Vol_\Omega}{\pi h_{\min}^3},$$

где Vol_Ω – объём всей области, можно усилить нормировку исходных базисных функций, домножив их на $N^{3/2}$, и получить сходимость коэффициентов приближённого решения в равномерной норме во всей области.

5. Заключение

Рассмотрена задача пространственного обтекания решётки стационарным потоком с учётом влияния вихревой пелены. Течение предполагалось потенциальным. Предложена постановка задачи, в которой вихревая пелена трактуется как поверхность контактного разрыва поля скоростей и реализована итерационная процедура определения распределения разрыва потенциала на задней кромке и положения вихревой пелены. Расчёты подтвердили, что распределение скоростей на поверхности лопастей и их аэродинамические характеристики в первую очередь определяется распределением циркуляции вдоль размаха лопасти, углом выхода потока – во вторую, и в меньшей степени дальнейшей эволюцией пелены.

Использован метод конечных элементов, базисом которых являются кусочно-линейные функции, определённые на тетраэдрах разбиения расчётной области.

Корректность постановки и программной реализации подтверждена сравнением с результатами, полученными ранее другими авторами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горелов Д.Н., Курзин В.Б., Сарен В.Э. *Аэродинамика решёток в нестационарном потоке*. – Новосибирск: Наука, 1971. 272 с.
2. Wo C.H. *A general theory of three-dimensional flow in a subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial and mixed flow types* // Trans. ASME. 1952. V.74. P.1363-1380.
3. Сироткин А.Я., Степанов Г.Ю. *Установившееся осесимметричное вихревое течение невязкой жидкости в многоступенчатых турбомашинах* // МЖГ. 1981. N.6. С.13-15.
4. Заболотный Ф.Г. *Расчёт установившегося осесимметричного вихревого течения несжимаемой невязкой жидкости в радиально-осевой турбомашине* // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979. N.3. С.147-155.
5. Ершова Л.Н. и др. *К расчёту пространственного сжимаемого идеального газа в рабочих колесах турбомашин* // Гидродинамика больших скоростей. Труды 3 Всесоюзной школы-семинара, 8-14 июня 1987г. Красноярск. 1987. С.92-95.
6. Гречаниченко Ю.В., Нестеренко В.А. *Вторичные течения в решётках турбомашин*. – Харьков: Вища школа, 1983. 119 с.
7. Гнесин В.И., Соколовский Г.А. *Расчёт вторичных течений невязкого газа в пространственных решётках турбомашин* // Проблемы машиностроения (Киев). 1983. N.19. С 91-95.
8. Kawai T., Adachi T., Akashita K. *Structure and Decay of Secondary Flow* / Bull. JSME. 1985. V.28. N.242.
9. Гуревич, Шубин. *О взаимодействии пограничных слоев в трёхмерных течениях* // МЖГ. 1988. N.3.
10. Worster D.M. *The calculation of fully three-dimensional flows in impellers using finite element method* / Rep. from Dept. of Mech. Eng. at Heriot Watt Univ. U.K. 1973.
11. Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости*. М.: Мир, 1973. 758 с.
12. Рябченко В.П. *Аэродинамические силы, действующие на лопасти пространственной кольцевой решётки при нестационарном обтекании* // ПМТФ. 1979. N.4.
13. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных*. М.: Наука, 1983. 424 с.
14. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М.: Наука, 1980. 534 с.
15. Марчук Г.И., Агошков В.И. *Введение в проекционные методы*. М.: Наука, 1981. 416 с.

ПЕРВИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ ОТНОШЕНИЙ КУЛАКОВА В МИКРОЭКОНОМИКЕ

М.А. Добренко, А.К. Гуц

In this article the Kulakov initial structures in microeconomics are considered.
Early the Kulakov initial structures were applied to physics and sociology.

Общество – это социально-экономические отношения. Правильное описание структуры социальных и экономических отношений является и правильным описанием структуры общества. Из каких простейших структурных элементов, или «первоструктур», складываются социально-экономические отношения? Задавая такой вопрос, мы во главу угла ставим не простейшие элементы, скажем, крестьяне, рабочие, управленцы и т.д., образующие общество, а простейшие структуры, составляющие в конечном итоге структуры и организацию всего общества и его экономики.

Поиск «первоструктур» не в традиции западной науки. Тем не менее в 1970 году нобелевский лауреат И.Е.Тамм писал: «...более перспективно искать не исходную «первоматерию», а исходные «первоструктуры» – такая переформулировка проблемы единства мира представляется нам несравненно более преимущественной и в логическом, и в естественно-научном отношении...». Он усматривал при этом необходимость отказа от наглядных представлений: «...Проблема отказа от «наглядности» вставала перед человеческим интеллектом и раньше. Так, уже пифагорейская традиция осознавала необходимость перехода от пластического Эйдоса к чистому Логосу, однако «телесно-чувственная» природа греческой цивилизации помешала реализации этой программы – европейская наука в каком-то смысле унаследовала это бремя «наглядности», в несении которого есть своя прелесть» [1].

И.Е.Тамм высказал эту мысль в предисловии к книге своего ученика Ю.И.Кулакова, в которой «первоструктуры» были найдены для описания физики и геометрии. Однако идеи Ю.И.Кулакова актуальны и для социологии, и для экономики.

1. Теория систем отношений

Ю.И. Кулакова

В теории Ю.И. Кулакова постулируется наличие одного или нескольких множеств $\mathcal{M}, \mathcal{F}, \dots$ элементов, между которыми определены отношения, обладающие двумя свойствами. Во-первых, некоторый набор этих отношений, выраженных в виде чисел, должен удовлетворять специальному уравнению, именуемому *законом*, и, во-вторых, в данном законе можно одни элементы заменять на другие по правилу, называемому *фундаментальной симметрией*.

В простейшем случае отношение – это вещественное число, сопоставляемое паре, тройке, четверке и т.д. элементов [1]. В качестве элементов могут выступать объекты любой природы: физические тела, индивиды социальной группы, мужчины и женщины, элементарные частицы и т.д., а в качестве отношений между элементами могут рассматриваться расстояния между телами (точками), родственные связи, отношения между полами, взаимодействия между частицами. Если ограничиваются одним множеством, то теория, которая строится, называется *унарной системой фундаментальных отношений*. В случае двух множеств соответствующая теория носит название *бинарная система фундаментальных отношений*. Мы будем использовать для систем фундаментальных отношений название системы Кулакова.

Каждая система отношений отличается от любой другой парой натуральных чисел (r, s) , называемой рангом. Ю.И. Кулаков [1] и его ученик Г.Г. Михайличенко показали, что существует классификация систем отношений, и нашли соответствующие алгебраические формулы для всех рангов (r, s) (см. § 2.1).

Ю.И.Кулаков, Ю.С.Владимиров и их ученики, ограничивая свои исследования рамками физики, продемонстрировали, что каждая система бинарных отношений, описываемая очень простыми алгебраическими формулами, приводит после некоторых преобразований и выкладок к строго определенному физическому закону, например ко второму закону Ньютона, закону Ома или к той или иной геометрии (геометрии Евклида, геометрии Лобачевского и т.д.).

Успех теории систем отношений в физике заставляет подумать о возможности применения этой теории в социологии. Это имеет смысл сделать несмотря на то, что в XX веке существует предубеждение против перенесения методов естествознания на науки об обществе. Такое предубеждение удерживается, как правило, среди исследователей, которых называют узкими специалистами. Те же, кто более склонен к философским обобщениям, чаще пытаются увидеть за достижением в конкретной области знаний пути к получению новых результатов в других областях науки.

2. Формализация отношений

Рассмотрим два исходных абстрактных множества $\mathcal{M} = \{i, j, k, \dots\}$ и $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$. Отношение между этими множествами есть отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Если $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{F}$. Значения отношения между элементом i и

элементом α представляется в виде формулы

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha). \quad (1)$$

Другими словами, отношение между любым i и любым α характеризуется вещественным числом $a_{i\alpha}$.

Будем предполагать, что отношение ϕ является *универсальным* в том смысле, что существуют два натуральных числа r и s , такие, что найдется отображение $\Phi : \mathbb{R}^{rs} \rightarrow \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из r элементов $i_1, \dots, i_r \in \mathcal{M}$ и любого набора из s элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_s} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_s} \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

Пара чисел (r, s) называется *рангом* рассматриваемой пары $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$. В этом определении отчетливо видна постулируемая симметрия данного отношения: любой элемент $i \in \mathcal{M}$ может быть заменен на любой элемент из $\mathcal{M}$, так же как и элементы из множества $\mathcal{F}$. Но при этом элементы из $\mathcal{M}$ берут в количестве r , а из $\mathcal{F}$ — s .

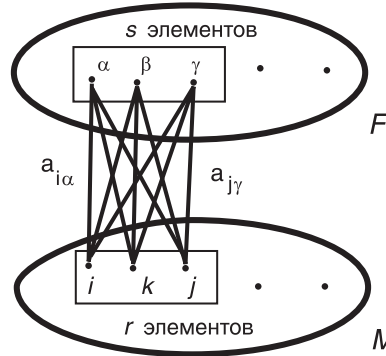


Рис. 1. Бинарная система отношений.

2.1. Классификация бинарных систем Кулакова

Для того чтобы найти классификацию бинарных систем отношений Кулакова, необходимо представить соотношение (1) в форме вещественной функции от двух вещественных переменных x_i и y_α . С точки зрения математики, это означает, что $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ рассматриваются как (гладкие) многообразия размерности соответственно m и n и на них вводятся локальные координаты

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = (x_i^1, \dots, x_i^m) \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = (y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n). \end{cases}$$

В этих координатах формула (1) принимает вид

$$a_{i\alpha} = \phi(x_i^1, \dots, x_i^m, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n). \quad (3)$$

Выражение (3) подставляется в (2), и после достаточно кропотливых выкладок находится вид функций ϕ и Φ . Приведем итог этих исследований.

Классификация бинарных систем Кулакова. Если m размерность многообразия $\mathcal{M}$, а n размерность многообразия $\mathcal{F}$, то ранг (r, s) связан с ними соотношениями: $r = n + 1, s = m + 1$.

- Не существует системы Кулакова ранга $(1, 1)$.
- Существуют системы Кулакова только ранга (r, r) , $r \geq 2$, $(r - 1, r)$, $r \geq 3$ и $(r + 1, r)$, $r \geq 2$.
- Существуют системы Кулакова ранга $(2, 4), (4, 2)$.
- Все диагональные системы отношений с рангом (r, r) могут быть двух типов. Их ранги обозначают как (r, r) и $(r, r; a)$. Для системы отношений ранга (r, r) закон в некоторых координатах записывается в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_r} \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

где отношения между элементами множеств $\mathcal{M}, \mathcal{F}$

$$a_{i\alpha} = \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 2. \quad (5)$$

Системы отношений ранга $(r, r; a)$ характеризуются законом

$$\Phi = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{i_r\alpha_1} & \dots & a_{i_r\alpha_r} \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

где отношения между элементами множеств $\mathcal{M}, \mathcal{F}$

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + y_\alpha^0, \quad r = 2;$$

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + y_\alpha^0 + \sum_{l=1}^{r-2} x_i^l y_\alpha^l, \quad r > 2. \quad (7)$$

- Для систем отношений ранга $(r+1, r)$, $r \geq 2$, имеем

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i_1\alpha_1} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ 1 & a_{i_2\alpha_1} & \dots & a_{i_2\alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{i_{r+1}\alpha_1} & \dots & a_{i_{r+1}\alpha_r} \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

с отношением

$$a_{i\alpha} = y_\alpha^0 + \sum_{l=1}^{r-1} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 2; \quad (9).$$

для систем ранга $(r-1, r)$, $r \geq 3$,

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & \dots & a_{i_1\alpha_r} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{i_{r-1}\alpha_1} & a_{i_{r-1}\alpha_2} & \dots & a_{i_{r-1}\alpha_r} \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

с отношением

$$a_{i\alpha} = x_i^0 + \sum_{l=1}^{r-2} x_i^l y_\alpha^l, \quad r \geq 3. \quad (11)$$

- Для системы $(4, 2)$ закон и отношения могут быть записаны в виде

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & (a_{i_1\alpha_1} a_{i_1\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_2\alpha_1} & a_{i_2\alpha_2} & (a_{i_2\alpha_1} a_{i_2\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_3\alpha_1} & a_{i_3\alpha_2} & (a_{i_3\alpha_1} a_{i_3\alpha_2}) \\ 1 & a_{i_4\alpha_1} & a_{i_4\alpha_2} & (a_{i_4\alpha_1} a_{i_4\alpha_2}) \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

и

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + y_\alpha^2}{x_i^1 + y_\alpha^3}, \quad (13)$$

а для системы $(2, 4)$ –

$$\begin{aligned} & \Phi = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{i_1\alpha_1} & a_{i_1\alpha_2} & a_{i_1\alpha_3} & a_{i_1\alpha_4} \\ a_{i_2\alpha_1} & a_{i_2\alpha_2} & a_{i_2\alpha_3} & a_{i_2\alpha_4} \\ (a_{i_1\alpha_1} a_{i_2\alpha_1}) & (a_{i_1\alpha_2} a_{i_2\alpha_2}) & (a_{i_1\alpha_3} a_{i_2\alpha_3}) & (a_{i_1\alpha_4} a_{i_2\alpha_4}) \end{vmatrix} = \\ & = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

и

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + x_i^2}{x_i^3 + y_\alpha^1}. \quad (15)$$

2.2. Эталоны системы отношений Кулакова

Запишем закон Φ для системы отношений ранга (r, s) в виде

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{k\beta}, \dots, a_{j\gamma}) = 0. \quad (16)$$

Потребуем, чтобы уравнение (16) было разрешимо относительно любого из rs аргументов, т.е. чтобы его можно было всегда записать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, \dots, a_{k\alpha}, a_{k\beta}, \dots). \quad (17)$$

Выберем в множествах $\mathcal{M}, \mathcal{F}$ соответственно по $r-1$ и $s-1$ элементов и назовем их *эталонными*, или образующими базис системы фундаментальных отношений. Пусть это элементы $k, j, \dots$ из множества $\mathcal{M}$ и $\beta, \gamma, \dots$ из множества $\mathcal{F}$. Тогда для неэталонных элементов i и α формулу (17) можно переписать в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(a_{i\beta}, a_{i\gamma}, \dots; a_{k\alpha}, a_{j\alpha}, \dots; a_{k\beta}, a_{k\gamma}, \dots, a_{j\beta}, a_{j\gamma}, \dots), \quad (4.18)$$

где в первой группе аргументов находятся бинарные отношения элемента i со всеми $s-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{F}$, во второй группе выделены бинарные отношения элемента α со всеми $r-1$ эталонными элементами множества $\mathcal{M}$. Наконец, в третьей группе сосредоточены бинарные отношения эталонных элементов друг с другом. Введем обозначения

$$x_i^1 = a_{i\beta}, x_i^2 = a_{i\gamma}, \dots, x_i^{s-1} = \cdot,$$

$$y_\alpha^1 = a_{k\alpha}, y_\alpha^2 = a_{j\alpha}, \dots, y_\alpha^{r-1} = \cdot.$$

Другими словами, мы вводим *координаты* для неэталонных элементов i, α относительно зафиксированного базиса эталонных элементов в множестве $\mathcal{M} \times \mathcal{F}$. Считая отношения между эталонными постоянными (известными) для данного базиса, перепишем формулу (18) в виде

$$a_{i\alpha} = f_{i\alpha}(x_i^1, \dots, x_i^{s-1}, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^{r-1}). \quad (19)$$

Таким образом, бинарное отношение между любыми элементами i, α является функцией, определенной в некоторой области D *координатного* пространства $\mathbb{R}^{r+s-2}$. Числа $m = s-1$ и $n = r-1$ – это размерности соответственно «многообразий» $\mathcal{M}$ и $\mathcal{F}$.

2.3. Первичные структуры гендерной социологии и психологии межличностных взаимодействий

В книге [3] было продемонстрировано, как первоструктуры Кулакова описывают гендерные отношения и межличностные взаимодействия индивидов. Многие формулы социометрики и психометрики являются иным выражением формул, полученных в классификации систем отношений Кулакова.

3. Первичные структуры микроэкономики

Покажем, как теория Ю.И.Кулакова может быть применена к описанию микроэкономических отношений.

3.1. Выручка предприятия

Предположим, что имеется некоторое множество $\mathcal{M} = \{i, j, k, \dots\}$ предприятий-производителей некоторого товара и множество $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ групп покупателей этого товара. Группа покупателей – это локализованная группа покупателей, т.е. население деревни, поселка, микрорайона, города.

Отношение «производитель-группа покупателей» – это отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$. Мы примем, что это микроэкономическое отношение является структурой Кулакова рода $(2, 2)$. В таком случае

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i^1 \\ \alpha \rightarrow y_\alpha^1, \end{cases}$$

и в силу (5)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^1 y_\alpha^1. \quad (20)$$

Если принять, что x_i^1 – это цена на товар i -о производителя, а y_α^1 – количество (в потенциале) товара, приобретаемого α -й группой покупателей, то формула (20) есть не что иное, как выручка i -о предприятия от продажи своего товара α -й группе покупателей.

Универсальность данной первоструктуры состоит в предположении, что пары производителей и пары групп покупателей могут заменяться на любые другие аналогичные пары. Выделение пары производителей, по существу, представляет требование отсутствия монополии какого-либо производителя на товарном рынке. Пара групп покупателей – это отсутствие на рынке диктата одной группы покупателей (монопсония).

Таким образом, микроэкономическая структура Кулакова ранга $(2, 2)$ описывает формулу выручки предприятия-производителя, работающего в условиях идеального рынка.

3.2. Потенциальная потребность в товаре

Рассмотрим теперь структуру Кулакова ранга $(3, 3)$. Для нее

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = (x_i^0, x_i^1) \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = (y_\alpha^0, y_\alpha^1), \end{cases}$$

и в силу (7)

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = x_i^0 + y_i^0 + x_i^1 y_\alpha^1. \quad (21)$$

Теперь мы примем, что $x_i^0 = (r_t)_i$ – объем товаров, требующих замены (потребленных или отслуживших свой срок); $x_i^1 = (b_t)_i$ – среднее количество товара,

приобретаемое одним покупателем в период t ; $y_\alpha^0 = (l_t)_\alpha$, есть изменение потребности (потенциального спроса) на товар за счет воздействия различных факторов (рекламы, появления новых товаров-субститутов, социально-экономической политики и др.); $y_i^1 = (m_t)_\alpha$ – изменение количества покупателей в группе α .

В таком случае формула (21) примет вид

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha) = (r_t)_i + (l_t)_\alpha + (b_t)_i(m_t)_\alpha, \quad (22)$$

и описывает она потенциальную потребность в товаре в период t . Данная формула известна в микроэкономике [2, с.57].

Теперь, говоря об универсальности данной первоструктуры, мы должны представлять себе, что речь идет о более сложной симметрии троек производителей и троек групп покупателей, означающей более развитую систему конкуренции, антимонополии и антиолигополии.

Производитель i характеризуется парой чисел $((r_t)_i, (b_t)_i)$. Экономический смысл этих данных оговаривался выше. Очевидно, что подобные экономические показатели обязано иметь серьезное предприятие-производитель для того, чтобы успешно продавать свой товар.

Группа покупателей α характеризуется парой чисел $((l_t)_\alpha, (m_t)_\alpha)$. Очевидно, что речь идет о большом количестве групп покупателей, т.к. деятельность предприятий-производителей, описанных в данной структуре, для того чтобы быть успешной, должна быть направлена на большое количество групп покупателей.

3.3. Финансирование предприятия с помощью заемного капитала

Рассмотрим теперь структуру Кулакова ранга $(4, 2)$. Имеем

$$\begin{cases} i \rightarrow x_i = x_i^1 \\ \alpha \rightarrow y_\alpha = (y_\alpha^1, y_\alpha^2, y_\alpha^3) \end{cases}$$

и в силу (4.7)

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i^1 y_\alpha^1 + y_\alpha^2}{x_i^1 + y_\alpha^3}. \quad (23)$$

Осталось обнаружить эту структуру в экономике. Известно, однако, что фирма-заемщик при кредитном финансировании получает особое преимущество, которое называется «левиридж-эффект», или действие финансового рычага.

Исходным пунктом действия эффекта является процентная ставка за кредит I и общая рентабельность капитала активов R_A , вычисляемая по формуле

$$R_A = \frac{\Pi + I \cdot \text{ЗС}}{\text{СС} + \text{ЗС}}, \quad (24)$$

где Π – прибыль за рассматриваемый период, СС , ЗС – соответственно собственные и заемные средства (капитал) за тот же период [2, с.340].

Положим

$$a_{i\alpha} = R_A, \quad x_i^1 = \text{ЗС}, \quad y_\alpha^1 = I, \quad y_\alpha^2 = \text{П}, \quad y_\alpha^3 = \text{СС}.$$

Тогда формулы (24), (23) преобразуются одна в другую.

Таким образом, кредитор i характеризуется числом ЗС, т.е. предоставляемым кредитом, а предприятие (фирма-заемщик) α – числами $(I, \text{П}, \text{СС})$. То, что ставка за кредит I является характеристикой предприятия, а не кредитора, объясняется тем, что от самой фирмы зависит, берет ли она кредит на предложенных условиях, или не берет.

Обратим внимание на естественность фундаментальной симметрии в данном случае. Она требует инвариантности отношения (23) между кредиторами и предприятиями относительно замены пар кредиторов и четверок предприятий. Наличие двух кредиторов дает возможность выбора для предприятия (у кого брать, на каких условиях), а существование четырех фирм-заемщиков обеспечивает само существование кредита как формы бизнеса.

Как видим, все структуры Кулакова присутствуют в микроэкономике.

4. Заключение

Какой смысл в том, что структуры Кулакова проявляют себя в физике, социологии, психологии и экономике, т.е. во многих значимых разделах знаний человека? Об этом исчерпывающе сказал И.Е.Тамм, слова которого приведены в начале статьи. Говоря же на менее строгом языке, можно сказать, что Конструктор, создавая мир, в его основу заложил не атомы или элементарные частицы, а первичные структуры – эталоны, по которым строится абсолютно все, что есть в этом мире. Иначе говоря, все состоит не из атомов, а из первоструктур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику*. М.: Архимед, 1992.
2. Кузин Б., Юрьев В., Шахдинаров Г. *Методы и модели управления фирмой*. СПб.: Питер, 2001.
3. Гуц А.К., Лаптев А.А., Коробицын В.В., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. *Математические модели социальных систем: Учебное пособие*. Омск: ОмГУ, 2000. 256 с.

КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ТРЕХМЕРНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМ С ЭФФЕКТАМИ ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ

С.В. Белим

The renormalization-group method is applied to analysis of dynamic of critical behavior in three-dimensional Ising systems with long-range effect.

Как показано в [1], эффекты дальнего действия оказывают существенное влияние на критическое поведение изинговских систем. Ренормгрупповой подход к описанию спиновых систем с эффектами дальнего действия, проведенный в [2] непосредственно для трехмерных систем, позволил получить значения статических критических индексов в двухпетлевом приближении. Однако подобные расчеты отсутствуют при описании критической динамики данных систем.

В предлагаемой работе осуществляется теоретико-полевое описание критической динамики однородных спиновых систем с эффектами дальнего действия непосредственно при $D = 3$ в двухпетлевом приближении. Рассматриваемая модель представляет собой классическую спиновую систему с обменным интегралом, зависящим от расстояния между спинами, описываемую гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{ij} J(|r_i - r_j|) S_i S_j, \quad (1)$$

где S_i – спиновая переменная; $J(|r_i - r_j|)$ – интегралы обменного взаимодействия. Данная модель термодинамически эквивалентна $O(n)$ – симметричной модели Гинзбурга-Ландау- Вильсона, определяемой эффективным гамильтонианом

$$H = \int d^D q \left\{ \frac{1}{2} (\tau_0 + q^a) \varphi^2 + u_0 \varphi^4 \right\}, \quad (2)$$

где φ – флуктуации параметра порядка, D – размерность пространства, $\tau_0 \sim |T - T_c|$, T_c – критическая температура, u_0 – положительная константа. Критическое поведение существенно зависит от параметра a , задающего скорость убывания взаимодействия с расстоянием. Как показано в работе [1], влияние эффектов дальнего действия существенно при $0 < a < 2$, а при $a \geq 2$ критическое поведение эквивалентно короткодействующим системам. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся случаем $0 < a < 2$.

© 2003 С.В. Белим

E-mail: belim@univer.omsk.su

Омский государственный университет

Динамическое поведение спиновых систем в релаксационном режиме вблизи критической температуры может быть описано кинетическим уравнением для параметра порядка типа уравнения Ланжевена:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda_0 \frac{\delta H}{\delta \varphi} + \eta + \lambda_0 \mathbf{h}, \quad (3)$$

где λ_0 – кинетический коэффициент, $\eta(x, t)$ – гауссова случайная сила, характеризующая влияние теплового резервуара и задаваемая функцией распределения

$$P_\eta = A_\eta \exp \left[-(4\lambda_0)^{-1} \int d^d x dt \eta^2(x, t) \right] \quad (4)$$

с нормировочной константой A_η , $\mathbf{h}(t)$ – внешнее поле, термодинамически сопряженное параметру порядка. Временная корреляционная функция $G(x, t)$ параметра порядка определяется путем решения уравнения (3) с $H[\varphi]$, задаваемым (2), относительно $\varphi[\eta, \mathbf{h}]$ с последующим усреднением по гауссовской случайной силе η с помощью P_η и выделением линейной по $\mathbf{h}(0)$ части решения, т.е.

$$G(x, t) = \frac{\delta}{\delta \mathbf{h}(0)} [\langle \varphi(x, t) \rangle]_{h=0}, \quad (5)$$

где

$$[\langle \varphi(x, t) \rangle] = B^{-1} \int D\{\eta\} \varphi(x, t) P_\eta, \quad (6)$$

$$B = \int D\{\eta\} P_\eta. \quad (7)$$

При применении стандартной ренормгрупповой техники к данной динамической модели приходится сталкиваться со значительными трудностями. Однако для однородных систем в отсутствие эффектов дальнего действия было показано [6], что при описании критической динамики модель, основанная на уравнении типа Ланжевена, полностью эквивалентна стандартной лагранжевой системе [7] с лагранжианом

$$L = \int d^d x dt \left\{ \lambda_0^{-1} \varphi^2 + i\varphi^* \left(\lambda_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta H}{\delta \varphi} \right) \right\}, \quad (8)$$

где введено вспомогательное поле φ^* . При этом корреляционная функция $G(x, t)$ параметра порядка для однородной системы определяется как

$$G(x, t) = \langle \varphi(0, 0) \varphi(x, t) \rangle = \Omega^{-1} \int D\{\varphi\} D\{\varphi^*\} \varphi(0, 0) \varphi(x, t) \exp(-L[\varphi, \varphi^*]),$$

где

$$\Omega = \int D\{\varphi\} D\{\varphi^*\} \exp(-L[\varphi, \varphi^*]). \quad (9)$$

Вместо корреляционной функции удобнее рассматривать ее вершинную часть, которую можно представить в формализме фейнмановских диаграмм в двухпетлевом приближении в виде

$$\Gamma^{(2)}(k, \omega; \tau_0, u_0, \lambda_0) = \tau_0 + k^a - \frac{i\omega}{\lambda_0} - 96u_0^2 D_0, \quad (10)$$

$$D_0 = \frac{3}{4} \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + |\vec{q}|^a)(1 + |\vec{p}|^a)(3 + |\vec{q}|^a + |\vec{p}|^a + |\vec{p} + \vec{q}|^a - i\omega/\lambda)}.$$

Следующим шагом в теоретико-полеом подходе является определение скейлинговых функций β , γ_τ , γ_φ и γ_λ , задающих дифференциальное уравнение ренормгруппы для вершинных функций:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial u} - \gamma_\tau \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma_\lambda \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{m}{2} \gamma_\varphi \right] \times \Gamma^{(m)}(k, \omega; \tau, u, \lambda, \mu) = 0, \quad (11)$$

где масштабный параметр μ вводится для обезразмеривания величин.

Для дальнейшего обсуждения динамического поведения нам потребуется только функция β и динамическая скейлинговая функция γ_λ .

Явный вид функций β в двухпетлевом приближении был получен в работе [2]:

$$\begin{aligned} \beta &= -(4 - D) \left[1 - 36uJ_0 + 1728 \left(2J_1 - J_0^2 - \frac{2}{9}G \right) u^2 \right], \\ J_1 &= \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + |\vec{q}|^a)^2 (1 + |\vec{p}|^a) (1 + |q^2 + p^2 + 2\vec{p}\vec{q}|^{a/2})}, \\ J_0 &= \int \frac{d^D q}{(1 + |\vec{q}|^a)^2}, \\ G &= -\frac{\partial}{\partial |\vec{k}|^a} \int \frac{d^D q d^D p}{(1 + |q^2 + k^2 + 2\vec{k}\vec{q}|^{a/2}) (1 + |\vec{p}|^a) (1 + |q^2 + p^2 + 2\vec{p}\vec{q}|^{a/2})}. \end{aligned}$$

Вычисления функции γ_λ в двухпетлевом приближении дали:

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &= (4 - D) 2(D' - G)u^2, \\ D' &= \frac{\partial D_0}{\partial (-i\omega/\lambda)} \Big|_{k=0, \omega=0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Переопределим эффективную вершину взаимодействия:

$$v = \frac{u}{J_0}. \quad (13)$$

В результате приходим к следующему выражению для функций β , и γ_λ :

$$\begin{aligned} \beta &= -(4 - D) \left[1 - 36v + 1728 \left(2\tilde{J}_1 - 1 - \frac{2}{9}\tilde{G} \right) v^2 \right], \\ \gamma_\lambda &= (4 - D) 96(\tilde{D} - \tilde{G})v^2, \\ \tilde{J}_1 &= \frac{J_1}{J_0^2} \quad \tilde{G} = \frac{G}{J_0^2} \quad \tilde{D} = \frac{D'}{J_0^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Такое переопределение приобретает смысл при значениях $a \leq D/2$. При этом J_0 , J_1 , G и D' становятся расходящимися функциями. Вводя же параметр обрезания Λ и рассматривая предел отношений

$$\begin{aligned} \frac{J_1}{J_0^2} &= \frac{\int_0^\Lambda \int_0^\Lambda d^D q d^D p / ((1 + |\vec{q}|^a)^2 (1 + |\vec{p}|^a) (1 + |q^2 + p^2 + 2\vec{p}\vec{q}|^a))}{\left[\int_0^\Lambda d^D q / (1 + |\vec{q}|^a)^2 \right]^2}, \\ \frac{G}{J_0^2} &= \frac{-\partial / (\partial |\vec{k}|^a) \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda d^D q d^D p / ((1 + |q^2 + k^2 + 2\vec{k}\vec{q}|^a) (1 + |\vec{p}|^a) (1 + |q^2 + p^2 + 2\vec{p}\vec{q}|^a))}{\left[\int_0^\Lambda d^D q / (1 + |\vec{q}|^a)^2 \right]^2}, \\ \frac{D'}{J_0^2} &= \frac{3/4 \int d^D q d^D p / ((1 + |\vec{q}|^a) (1 + |\vec{p}|^a) (3 + |\vec{q}|^a + |\vec{p}|^a + |\vec{p} + \vec{q}|^a)^2)}{\left[\int_0^\Lambda d^D q / (1 + |\vec{q}|^a)^2 \right]^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

при $\Lambda \rightarrow \infty$ получаем конечные выражения.

Значения интегралов находилось численно. Для случая $a \leq D/2$ строилась последовательность значений J_1/J_0^2 и G/J_0^2 при различных значениях Λ и аппроксимировалась на бесконечность.

Режим критического поведения полностью определяется устойчивыми неподвижными точками ренормгруппового преобразования, которые могут быть найдены из условия равенства нулю β -функций:

$$\beta(v^*) = 0. \quad (16)$$

Значения эффективных вершин взаимодействия для устойчивых фиксированных точек ренормгруппового преобразования были получены в работе [2].

Подстановка величин эффективных зарядов в фиксированной точке в скейлинговую функцию γ_λ позволяет определить динамический критический индекс z , характеризующий критическое замедление процессов релаксации,

$$z = 2 + \gamma_\lambda. \quad (17)$$

Устойчивые фиксированные точки ренормгруппового преобразования, и значения динамического критического индекса для значений параметра $1,5 \leq a \leq 1,9$ приведены в таблице. Для значений параметра $0 < a < 1,5$ существует только гауссова фиксированная точка $v^* = 0$, не являющаяся устойчивой.

Сопоставление полученных результатов со значением динамического критического индекса для трехмерных систем с короткодействием [6] $z = 2,017$ показывает значительное влияние эффектов дального действия на критическую динамику спиновых систем, выражающееся в увеличении времени релаксации системы ($t \sim |T - T_c|^{\nu z}$, где ν - критический индекс, характеризующий рост радиуса корреляции). Для критической динамики трехмерных систем с дальным действием, как и для статического поведения [2], наблюдается приближение к гауссовому режиму при уменьшении параметра дального действия a . При значениях $a \leq 1,8$ критическое поведение практически неотлично от гауссова.

Значения фиксированных точек и динамического критического индекса для трехмерных систем.

a	v^*	z
1,5	0,015151	2,006628
1,6	0,015974	2,001529
1,7	0,020485	2,000777
1,8	0,023230	2,000180
1,9	0,042067	2,000072

ЛИТЕРАТУРА

1. Luijten E., Mebingfeld H. // *Phys. Rev. Lett.* B. 2001. V.6. P.5305.
2. С.В. Белим, // *Письма в ЖЭТФ*. 2003. Т.77. В.2. 2003. С.118.
3. Fisher M. E., Ma S.-k., Nickel B.G. // *Phys. Rev. Lett.* 1972. V.29. P.917.
4. De Dominicis C., // *Nuovo Cimento Lett.* 1975. V.12. P.567.
5. Brezin E., et.al., // *Phys. Rev. D.* 1973. V.8. P.434.
6. Прудников В.В., Белим С.В., Иванов А.В., Осинцев Е.В., Федоренко А.А. // *ЖЭТФ*. 1998. Т.114. В.3. С.972.

ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ВРЕМЕНИ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

А.К. Гуц, Е.В. Палешева

The stochastic properties of time is studied. We suggest that epoch of elementary fact is random variable. The three laws of time are found.

Введение

Время, с помощью которого Человек наблюдает Мир в движении (развитии), назовем *временем-поток*. Время-поток порождает понятие *длительность*. Поэтому время-поток представляется в виде одномерного линейно упорядоченного континуума и измеряется с помощью *часов*. Время-поток или часы – это сюръективное отображение $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, посредством которого вводится линейный *временной порядок* $\preceq$ в Мире событий: событие a раньше события b , то есть символически $a \preceq b$, если $\tau(a) \leq \tau(b)$.

Предположим, что кроме времени-потока существует время-эпоха, которое каждому наблюдаемому элементарному факту a приписывает *случайным образом* дату τ (эпоху) во времени-потоке и место в пространстве-времени V^4 . Это и означает, что дата τ факта a есть случайная величина.

Классическим является подход, предполагающий, что если фиксированы часы, то для факта a его дата τ – это конкретное число. Мы же допускаем, что τ может иметь *любое* значение, однако его появление (приписывание факту a) определяется плотностью функции распределения $f_\tau(t)$, где t – координата в вероятностном пространстве элементарных исходов даты факта a , относительно которой можно считать, что $\tau = t$ (более подробно см. в [1]).

1. Закон неопределенности описания даты

Итак, примем, что свойство времени, которое проявляется в «выборе» момента времени, отвечающего факту a , – это случайная величина, которую называем временем-эпохой. Пусть плотность распределения $f_\tau(t)$ времени-эпохи удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t f_\tau(t) = 0. \quad (1)$$

Введем величину

$$D(t) = -c_0 \frac{d}{dt} \ln f_\tau(t), \quad (2)$$

где $c_0 = \text{const}$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}D &= -c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} \ln f_\tau(t) \right) f_\tau(t) dt = \\ &= -c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f_\tau(t)} \frac{df_\tau(t)}{dt} f_\tau(t) dt = \\ &= -c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} df_\tau(t) = -c_0 f_\tau(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому среднее квадратичное отклонение величины D

$$\Delta D = \sqrt{\mathbf{D}D} = \sqrt{\mathbf{M}D^2 - (\mathbf{M}D)^2} = \sqrt{\mathbf{M}D^2}. \quad (3)$$

Выясним смысл величины D определенной формулой (2). Поскольку $f_\tau(t)$ – плотность распределения величины τ , то ее смысл – это вероятность того, что факт получит эпоху, лежащую на отрезке времени-потока $[\tau, \tau+1]$, где 1 – условная единица измерения времени. Но тогда, по аналогии с формулой Больцмана для энтропии, можно заявить, что $-c_0 \ln f_\tau(t)$ – это энтропия времени-эпохи. Другими словами, она характеризует меру дезорганизации факта как явления. Поэтому величина $D(t)$ характеризует *скорость нарастания дезорганизации факта*.

Как будет показано ниже, эта скорость тем больше, чем уже границы для локализации явления в потоке времени.

Выведем теперь некоторый закон, которому подчиняется время-эпоха.

Теорема. Если выполнено условие (1), то справедливо соотношение неопределенности

$$\sqrt{(\Delta\tau)^2 + (\mathbf{M}\tau)^2} \cdot \Delta D \geq c_0. \quad (4)$$

Доказательство. Для вывода соотношения неопределенности мы воспользовались приемом, с помощью которого Г.Вейль получал соотношение неопределенности Гейзенберга [2, с.69-70].

Имеем неравенство

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\alpha t \sqrt{f_\tau(t)} + \frac{d}{dt} \sqrt{f_\tau(t)} \right)^2 dt = \\ &= \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\tau(t) dt + 2\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} t \sqrt{f_\tau(t)} \frac{d}{dt} \sqrt{f_\tau(t)} dt + \end{aligned}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} \sqrt{f_\tau(t)} \right)^2 dt. \quad (5)$$

Вычислим каждый из интегралов в правой части неравенства (5). Прежде всего в силу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_\tau(t) dt = \mathbf{M}\tau^2 = \mathbf{D}\tau + (\mathbf{M}\tau)^2 = (\Delta\tau)^2 + (\mathbf{M}\tau)^2. \quad (6)$$

Используя (1), получаем

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} t \sqrt{f_\tau(t)} \frac{d\sqrt{f_\tau(t)}}{dt} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{d(\sqrt{f_\tau(t)} \sqrt{f_\tau(t)})}{dt} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t df_\tau(t) = t f_\tau(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f_\tau(t) dt = -1. \end{aligned} \quad (7)$$

И, наконец, имеем для третьего интеграла

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} \sqrt{f_\tau(t)} \right)^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{f_\tau(t)}} \frac{d\sqrt{f_\tau(t)}}{dt} \right)^2 f_\tau(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} \ln \sqrt{f_\tau(t)} \right)^2 f_\tau(t) dt = \frac{1}{4c_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(c_0 \frac{d}{dt} \ln f_\tau(t) \right)^2 f_\tau(t) dt = \\ &= \frac{1}{4c_0^2} \mathbf{M}D^2 = \frac{1}{4c_0^2} (\Delta D)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, из (5)-(8) имеем неравенство

$$\alpha^2 [(\Delta\tau)^2 + (\mathbf{M}\tau)^2] - \alpha + \frac{1}{4c_0^2} (\Delta D)^2 \geq 0,$$

справедливое для любого α . Это возможно, если

$$1 - 4[(\Delta\tau)^2 + (\mathbf{M}\tau)^2] \frac{1}{4c_0^2} (\Delta D)^2 \leq 0$$

или

$$\sqrt{(\Delta\tau)^2 + (\mathbf{M}\tau)^2} \cdot \Delta D \geq c_0.$$

2. Обобщенный закон времени и его следствия

В формуле (4) сделаем подстановку

$$c_0 = k_0(\mathbf{M}\tau)^2, \quad k_0 = \text{const} > 0. \quad (9)$$

В результате получаем *обобщенный закон времени*¹

$$\sqrt{(\Delta\tau)^2 + (\mathbf{M}\tau)^2} \cdot \Delta D \geq k_0(\mathbf{M}\tau)^2. \quad (10)$$

В зависимости от входящих в (10) величин можно отметить следующие два следствия этой формулы:

1. Пусть $|\mathbf{M}\tau| \ll \Delta\tau$. Тогда

$$\Delta D \Delta\tau \geq k_0(\mathbf{M}\tau)^2. \quad (11)$$

Это, как легко видеть, *второй закон времени*, но в более корректной форме, чем этот же закон в виде, данном в [1]. Из (11) следует, что чем дальше в прошлое (будущее) мы уходим ($\Delta t \equiv |\mathbf{M}\tau| \rightarrow \infty$), тем более сказывается закон о неопределенности описания фактов. Формула (11) автоматически учитывает оговорку, касающуюся применимости второго закона времени и проговоренную в [3].

2. Пусть $\Delta\tau \ll |\mathbf{M}\tau|$. Тогда

$$k_0|\mathbf{M}\tau| \leq \Delta D. \quad (12)$$

Отсюда

$$\Delta D \rightarrow_{|\mathbf{M}\tau| \rightarrow \infty} \infty,$$

т.е. скорость дезорганизации фактов нарастает по мере их «погружения» в Прошлое. Одновременно это говорит о безнадёжности прогноза фактов далекого Будущего. Формула (12) – это *четвертый закон времени*.

Отметим, что *третий закон времени* [4], имеющий вид

$$\Delta D \leq c_1|\mathbf{M}\tau| \equiv c_1\Delta t, \quad (13)$$

говорит скорее о том, что в любой момент времени величина ΔD не может быть произвольно большой.

Мы не имеем полноценного вывода третьего закона времени (13). В случае нормального распределения такой вывод тем не менее был впервые сделан в [7].

¹Заметим, что выражение (4) доказывалось при условии, что $c_0 > 0$. Равенство нулю математического ожидания времени-эпохи $\mathbf{M}\tau$ означает, что наблюдаемое нами событие находится в настоящем. Поскольку любое такое событие по мере наблюдения непрерывным образом все дальше и дальше удаляется в прошлое, то мы совершенно корректно можем считать, что $\mathbf{M}\tau \neq 0$. Поэтому получаемый в результате подстановки (9) в формулу (4) закон (10) остается справедливым.

Полученная в [7] формула страдает существенным недостатком, однако она помогла убедиться в математической возможности четвертого закона времени².

Приведем более удачный вывод третьего закона времени. Пусть теперь плотность распределения времени-эпохи $f_\tau(t)$ соответствует нормальному закону, т.е. положим

$$f_\tau(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\alpha)^2},$$

при этом $\alpha = \mathbf{M}\tau$, а $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\tau} = \Delta\tau$. В этом случае величина $D(t)$ будет определяться выражением

$$D(t) = \frac{c_0}{\sigma^2}(t - \alpha).$$

Вычислим $\mathbf{M}D^2$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}D^2 &= \frac{c_0^2}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - \alpha)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{c_0^2}{\sigma^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - \alpha)}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{(t-\alpha)^2}{2\sigma^2}} d\left[\frac{(t - \alpha)^2}{2\sigma^2}\right] = \\ &= \frac{c_0^2}{\sigma^2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} d(u^2) = \frac{2c_0^2}{\sigma^2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u e^{-u^2} d(u^2) = \frac{2c_0^2}{\sigma^2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} v^{\frac{1}{2}} e^{-v} dv = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{c_0^2}{\sigma^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{c_0^2}{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя данный результат, а также учитывая (3) и (9), получаем, что³

$$\begin{aligned} (\Delta D)^2 &= k_0^2 \frac{(\mathbf{M}\tau)^4}{(\Delta\tau)^2} = k_0^2 (\mathbf{M}\tau)^2 \frac{(\mathbf{M}\tau)^2}{\mathbf{D}\tau} = k_0^2 (\mathbf{M}\tau)^2 \frac{(\mathbf{M}\tau)^2}{\mathbf{M}\tau^2 - (\mathbf{M}\tau)^2} = \\ &= k_0^2 (\mathbf{M}\tau)^2 \frac{(\mathbf{M}\tau)^2}{\mathbf{M}\tau^2} \left(1 - \frac{(\mathbf{M}\tau)^2}{\mathbf{M}\tau^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= k_0^2 (\mathbf{M}\tau)^2 \frac{(\mathbf{M}\tau)^2}{\mathbf{M}\tau^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{M}\tau)^2}{\mathbf{M}\tau^2} + o\left(\frac{(\mathbf{M}\tau)^2}{\mathbf{M}\tau^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Пренебрегая членами второго порядка, а также учитывая, что $(\mathbf{M}\tau)^2/\mathbf{M}\tau^2 < 1$, находим

$$\Delta D < \sqrt{\frac{3}{2}} k_0 |\mathbf{M}\tau|. \quad (15)$$

Выражение (15) представляет *третий закон времени* [4], имеющий в общем случае вид

$$\Delta D \leq c_1 |\mathbf{M}\tau| \equiv c_1 \Delta t.$$

²Формула [7] появилась в результате общения одного из авторов с М.А.Добренко.

³Отметим, что $\mathbf{M}\tau^2 - (\mathbf{M}\tau)^2 = \mathbf{D}\tau > 0$. В силу этого $(\mathbf{M}\tau)^2 < \mathbf{M}\tau^2$, а значит,

$$\frac{(\mathbf{M}\tau)^2}{\mathbf{M}\tau^2} < 1.$$

Это ограничение позволяет нам применить разложение в ряд Тейлора.

3. Как вычисляется вероятность даты?

Что понимается под вероятностью даты τ ? Дадим объяснение, привлекая идею параллельных вселенных, из которых состоит мультиверс [5, 6].

В каждой из параллельных вселенных, а это лоренцевы многообразия V_α^4 , $\alpha \in A$, введем часы t . Допустим, что они синхронизированы. Пусть число вселенных, в которых в момент τ наблюдается факт a , равно $N(\tau)$. Тогда вероятность $P_a(t = \tau)$ для факта a иметь дату τ равна $N(\tau)/N$, где N общее число параллельных вселенных.

4. Почему древние вещи старше современных?

Ответ достаточно простой: древние вещи старше современных по той простой причине, что их нахождение в Настоящем имеет вероятность тем меньшую 1, чем они древнее!

Иначе говоря, если факт a «имел место в прошлом», если Настоящее имеет дату τ , а Прошлое дату τ_1 , $\tau_1 < \tau$, то $N(\tau_1) > N(\tau)$, следовательно, $P_a(t = \tau_1) > P_a(t = \tau)$. Древняя вещь потому и выглядит старо (дряхло, потерто, разрушенно, пожелтевшие и т.д.) в Настоящем, что она больше принадлежит Прошлому, чем Настоящему.

Но и это еще не все. Любой факт Прошлого, находящийся в некотором (наиболее вероятном) «месте» Мира событий, «сообщает о себе» наблюдателю-человеку в Настоящем, т.е. наблюдается им в различных *формах*. Эти формы одинаково стары, но различны! Если речь идет об историческом факте-документе, то различные формы данного документа – это *противоречивые сведения* о факте Прошлого. Факт Прошлого «сообщает» о себе во все более дезорганизованном виде, как говорит четвертый закон времени (12), по мере его погружения в глубь веков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К. *Стохастические свойства времени и пространства* // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып.7. С.94-103.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. М.: ФМ, 1963.
3. Гуц А.К. *Многовариантная история России*. М.: АСТ/СПб.: Полигон, 2000. 381 с.
4. Guts A.K. *Restoration of the Past and three Principle of Time*. -Preprint physics/9705014 (1997). - <http://xxx.lanl.gov/abs/physics/9705014>
5. Дойч Д. *Структура реальности*. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
6. Guts A.K. *The Deutsch theory of the Multiverse and physical constants* // Gravitation & Cosmology. 2003. V.9, N.1 (33). P.33-36.
7. Guts A.K. *Probabilistic properties of time* // International Conference "Kolmogorov and Contemporary Mathematics. Abstracts". Moscow, 2003. P.451-452.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

**В.В. Прудников, В.Н. Бородихин, А.Н. Вакилов,
П.В. Прудников**

For the first time the critical parameters of the effective Hamiltonian for weakly disordered three-dimensional Ising model are determined by Monte Carlo simulation for systems with spin concentrations $p = 0,95; 0,80$. The calculated values of fixed-point coordinates and critical exponents for these spin concentrations are in a good accordance with each other in the range of statistical errors and with field-theoretical results in the six-loop approximation. It can be considered as evidence of critical behaviour universality for weakly disordered systems.

1. Введение

Исследование критического поведения неупорядоченных систем с замороженными дефектами структуры представляет большой теоретический и экспериментальный интерес. Это обусловлено тем, что большинство реальных твердых тел содержит замороженные дефекты структуры, присутствие которых влияет на характеристики систем и, в частности, может существенно модифицировать поведение систем при фазовых переходах и индуцировать новые сложные явления в структурно неупорядоченных системах [1–4]. Для понимания сложного критического поведения таких систем, характеризующихся эффектами аномально сильного взаимодействия флуктуаций ряда термодинамических переменных, когда любое возмущение, вносимое дефектами структуры даже при их низкой концентрации, может вызвать сильное изменение состояния системы, требует разработки и применения адекватных аналитических и численных методов описания. Представления теории фазовых переходов и критических явлений, хорошо разработанные для однородных систем [5], могут претерпеть сильные изменения при попытках их распространения на системы со структурным беспорядком, как это имеет место в спиновых стеклах и системах со случайными магнитными полями [4,6]. Как известно, центральной концепцией теории фазовых переходов и критических явлений является принцип универсальности,

© 2003 В.В. Прудников, В.Н. Бородихин, А.Н. Вакилов, П.В. Прудников

E-mail: prudnikov@univer.omsk.su

Омский государственный университет

т.е. независимость термодинамических характеристик различных систем при фазовых переходах от различий в значениях мелкомасштабных параметров и разделение всех систем на небольшое число классов универсальности в зависимости от пространственной размерности системы и симметрии его параметра порядка. Однако в случае неупорядоченных систем до сих пор остался невыясненным вопрос: являются ли такие характеристики критического поведения, как безразмерные амплитуды взаимодействия флуктуаций параметра порядка и критические показатели, универсальными, т.е. не зависящими от концентрации дефектов структуры вплоть до порога перколяции или существует линия фиксированных точек для значений амплитуд взаимодействия, определяющая непрерывное изменение критических показателей с концентрацией?

Исследования показали [1, 7, 8], что присутствие замороженных точечных дефектов (например, примеси немагнитных атомов в ферро- или антиферромагнитных материалов) изменяет критические свойства систем, теплоемкость которых в однородном состоянии испытывает расходимость в критической точке с показателем $\alpha > 0$. Данному критерию удовлетворяют только системы, эффективный гамильтониан которых вблизи критической точки изоморфен модели Изинга.

Теоретико-полевое описание критического поведения слабо неупорядоченной модели Изинга, проведенное непосредственно для трехмерных систем ($d=3$) в высокопетлевых порядках приближения теории (пятипетлевым [9] и шестипетлевым [10]) с применением методов суммирования получаемых асимптотических рядов, позволило с наибольшей доступной к настоящему времени точностью получить значения безразмерных амплитуд взаимодействия флуктуаций параметра порядка g_R и u_R в неподвижной фиксированной точке ренормгрупповых преобразований модели, задающих ее критические свойства. Так, в соответствии с [10] $g^*=36,72(32)$; $u^*=11,89(30)$. Данные значения отражают главную особенность критического поведения, характеризующегося аномально сильным взаимодействием флуктуаций параметра порядка. Поэтому возникает вопрос о сходимости рядов теории возмущения, в также вопрос о том насколько адекватно результаты применения методов суммирования могут соответствовать реальным критическим характеристикам системы. Вычисление критических параметров g^* и u^* эффективного гамильтониана непертурбативным способом представляет большой интерес.

Экспериментальные исследования неупорядоченных систем, таких как кристаллические смеси одноосных Изинго-подобных антиферромагнетиков (FeF_2 , MnF_2) с немагнитными материалами (ZnF_2), показывают существенное отличие значений критических показателей для неупорядоченных систем от соответствующих показателей однородных систем. В частности, для материалов $Fe_xZn_{1-x}F_2$ были измерены значения критических показателей $\nu = 0,70(2)$; $\gamma = 1,34(6)$, а для материалов $Mn_xZn_{1-x}F_2$ $\nu = 0,715(35)$; $\gamma = 1,364(76)$. При этом многочисленные экспериментальные оценки демонстрируют независимость значений критических показателей от концентрации примесей (см. приведенные в [10] таблицы значений измеренных критических показателей, взятые из широкого ряда экспериментальных работ). Поскольку возможности те-

оретического подхода ограничены описанием слабо неупорядоченных систем, проверка данных результатов методом компьютерного моделирования имеет большое значение.

2. Модель

Известно, что исходная неупорядоченная модель в критической области термодинамически эквивалентна $O(N)$ симметричной модели Гинзбурга-Ландау-Вильсона, определяемой эффективным гамильтонианом:

$$H = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x))^2 + \frac{m_0^2}{2} \varphi(x)^2 + \frac{V(x)}{2} \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi(x)^4 \right], \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ – поле N -компонентного параметра порядка, $V(x)$ – примесный потенциал, $m_0^2 \sim T - T_c(p)$, $T_c(p)$ – критическая температура разбавленного магнетика, зависящая от концентрации спинов p , g_0 – положительная константа.

После применения процедуры репличного усреднения по-гауссовски распределенному потенциалу случайного поля примесей гамильтониан принимает вид:

$$H_{repl} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{i,\alpha} (\partial_\mu \varphi_{\alpha,i}(x))^2 + \frac{m_0^2}{2} \sum_{i,\alpha} \varphi_{\alpha,i}(x)^2 + \right. \\ \left. + \frac{g_0}{4!} \sum_{i,\alpha} (\varphi_{\alpha,i}(x)^2)^2 - \frac{u_0}{4!} \left(\sum_{i,\alpha} (\varphi_{\alpha,i}(x))^2 \right)^2 \right], \quad (2)$$

где индекс $i = 1, \dots, N$, а индекс $\alpha = 1, \dots, n$ нумерует реплики (образы) однородной составляющей в гамильтониане неупорядоченной модели (1), а дополнительная вершина u_0 , возникающая в (2), задает эффективное взаимодействие флуктуаций параметра порядка через поле дефектов. В пределе $n \rightarrow 0$ данная модель термодинамически эквивалентна исходной неупорядоченной модели.

После применения процедуры перенормировки – усреднения по мелкомасштабным флуктуациям поля $\varphi(x)$ и последующего масштабного преобразования, сопровождающегося перенормировкой поля параметра порядка в Z раз, устраняющей расходимость параметров модели в критической точке, гамильтониан принимает вид:

$$H_R = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{i,\alpha} (\partial_\mu \varphi_{\alpha,iR}(x))^2 + \frac{m_R^2}{2} \sum_{i,\alpha} \varphi_{\alpha,iR}(x)^2 + \right. \\ \left. + \frac{m_R g_R}{4!} \sum_{i,\alpha} (\varphi_{\alpha,iR}(x)^2)^2 - \frac{m_R u_R}{4!} \left(\sum_{i,\alpha} (\varphi_{\alpha,iR}(x))^2 \right)^2 \right], \quad (3)$$

где индекс R обозначает перенормированные величины, $\varphi = Z_\varphi^{1/2} \varphi_R$, $Z_\varphi = \chi m_R^2$ – перенормировочная константа, χ – восприимчивость, $m_R^2 = 1/\xi^2$ – перенормированная масса модели, ξ – корреляционная длина.

Процедура ренормгрупповых преобразований модели характеризуется наличием предельной неподвижной точки (фиксированной точки) в пространстве безразмерных амплитуд взаимодействия флуктуаций параметра порядка g_R и u_R , которая задает ее критические свойства и позволяет определить критические показатели для основных термодинамических и корреляционных функций системы. Как отмечалось выше, в шестипетлевом приближении [10] для модели Изинга, характеризующейся $N = 1$, $g^* = 36,72(32)$; $u^* = 11,89(30)$.

3. Методика компьютерного моделирования критического поведения неупорядоченной модели Изинга

Значения эффективных амплитуд взаимодействия флуктуаций могут быть получены методами компьютерного моделирования путем вычисления различных корреляционных функций или моментов функций распределения для параметра порядка. Монте-Карло-результаты в критической области для нетривиальной фиксированной точки однородной модели Изинга [11, 12] находятся в хорошем соответствии с результатами теоретико-полевого подхода.

В настоящей работе впервые методом Монте-Карло определены координаты фиксированной точки эффективного гамильтониана (3) для концентраций спинов $p=0,95; 0,80$.

Рассматривается трехмерная модель неупорядоченной спиновой системы в виде кубической решетки с размерами L и наложенными периодическими граничными условиями. С узлами решетки связаны спины σ_i , принимающие значения ± 1 , и немагнитные атомы примеси (пустые узлы с $\sigma_i \equiv 0$). Данная система описывается гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} p_i p_j \sigma_i \sigma_j, \quad (4)$$

где J_{ij} – константа обменного ферромагнитного взаимодействия, p_i – случайная переменная, описываемая функцией распределения

$$P(p_i) = p\delta(p_i - 1) + (1 - p)\delta(p_i) \quad (5)$$

с $p = 1 - c$, где c – концентрация примеси.

Примесь равномерно распределяется по всей системе, и ее положение фиксируется для отдельной примесной конфигурации в процессе моделирования системы. Концентрация спинов определяется суммированием абсолютных значений спинов по всем узлам решетки

$$p = \frac{1}{L^3} \sum_{i=1}^{L^3} p_i |\sigma_i|.$$

При создании спиновой конфигурации со случайно распределенными примесями в решетке возникают геометрические кластеры узлов со спинами. При

концентрации спинов p больших порога спиновой перколяции p_c в системе практически всегда существует спиновый кластер, характеризующийся общей связностью (протеканием) с одной грани решетки на другую грань, и какое-то количество изолированных кластеров, содержащих относительно небольшое число спинов. В пределе бесконечно большого размера решетки вклад в магнитные характеристики системы будут давать только скоррелированные спины бесконечного перколяционного кластера, поэтому при вычислении критических характеристик имеет смысл не учитывать вклад от узлов, не связанных с перколяционным кластером. Такая процедура позволяет уменьшить «шум» от спинов кластеров конечного размера.

Для распределения спинов с заданной концентрацией p по узлам решетки использовался алгоритм выращивания перколяционного кластера Хаммерсли-Лиса-Александровица [13]. Практические детали реализации данного алгоритма следующие. В центре кубической решетки размещается затравочный спин. Шесть соседних узлов образуют «периметр» затравочного спина. Случайным образом выбирается узел из «периметра». Затем с вероятностью p этот узел занимает спин, а его соседи добавляются в «периметр». В противном случае узел остается свободным (примесным). Чтобы узлы решетки оставались свободными с вероятностью $1 - p$, данный узел больше не проверяется. Если узел уже занят спином, то определяется, нет ли новых непроверенных узлов «периметра». Процедура повторяется до тех пор, пока не будут просмотрены все узлы периметра. Среди выращиваемых в соответствии с данным алгоритмом спиновых конфигураций выбирались для последующего моделирования только те из них, у которых концентрация примесей s отличалась от заданной $s = 1 - p$ не более чем на десять процентов.

В основе компьютерного моделирования статистических процессов лежит метод Монте-Карло, суть которого заключается в использовании случайных чисел для машинной имитации вероятностных распределений. В данной работе для получения последовательных спиновых конфигураций был применен одно-кластерный алгоритм Вольфа [14], который по сравнению с традиционным для метода Монте-Карло алгоритмом Метрополиса позволяет получать значительно менее скоррелированную последовательность спиновых конфигураций, что особенно важно для моделирования критического поведения систем большого размера. Известно, что время корреляции между двумя состояниями системы с линейным размером L вблизи критической температуры ведет себя как $t_{cor} \simeq L^z$. При этом для алгоритма Метрополиса показатель $z_M \simeq 2$, а для алгоритма Вольфа $z_W \simeq 0,5$.

Примененный в работе вариант алгоритма Вольфа состоял в следующем. В системе случайным образом выбирается спин и переворачивается. Затем рассматриваются ближайшие соседи спина, и если они сонаправлены с этим «центральный» спином (неперевернутым), то с вероятностью $1 - \exp(-2\beta)$, где $\beta = 1/T$, они также переворачиваются, а их координаты заносятся в стек. После того, как проведена проверка всех соседних спинов, спин, координаты которого были занесены в стек последними, выбирается «центральный», и вся процедура затем повторяется. Процесс повторяется до тех пор, пока стек не окажется

пустым, что соответствует полному перевороту кластера Вольфа. По данному алгоритму реализуется марковский процесс и с соответствующей вероятностью генерируются конфигурации спинов.

Для уменьшения корреляций спиновых конфигураций вычисление намагниченности и других термодинамических величин осуществлялось через три переворота кластера Вольфа, что условно можно назвать одним Монте-Карло-шагом.

В самом начале процесса все спины полагались сонаправленными (что соответствует состоянию системы при $T = 0$). Процедуре установления термодинамического равновесия в системе, соответствующего температуре T , отводилось 10^4 шагов Монте-Карло.

Поскольку моделируемая система являлась неупорядоченной, кроме усреднения по спиновым конфигурациям проводилось усреднение по различным примесным конфигурациям. В данной работе использовалось 500 примесных конфигураций. Для проведения статистического усреднения каждой примесной конфигурации сопоставлялось 10^5 спиновых конфигураций, или Монте-Карло-шагов.

В процессе моделирования при усреднении по всей совокупности спиновых и примесных конфигураций осуществлялся расчет корреляционной длины ξ и восприимчивости χ по формулам [15], обобщенным на случай неупорядоченных систем:

$$\xi = \frac{1}{2 \sin(\pi/L)} \sqrt{\frac{\chi}{F} - 1}, \quad \chi = \frac{1}{L^3} \overline{\langle S^2 \rangle}, \quad (6)$$

где $S = \sum_i p_i \sigma_i$, $F = \overline{\langle \Phi \rangle} / L^3$,

$$\Phi = \frac{1}{3} (|\sum_i p_i \sigma_i \exp \frac{2\pi i x_{1,i}}{L}|^2 + |\sum_i p_i \sigma_i \exp \frac{2\pi i x_{2,i}}{L}|^2 + |\sum_i p_i \sigma_i \exp \frac{2\pi i x_{3,i}}{L}|^2), \quad (7)$$

$(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i})$ – координаты i -о узла решетки, $\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение по шагам Монте-Карло, а черта сверху – усреднение по примесным конфигурациям.

Эффективные амплитуды взаимодействия флуктуаций параметра порядка u_R и g_R в гамильтониане (3) вычислялись в результате усреднения по всей совокупности примесных конфигураций следующих выражений для кумулянтов и корреляционных функций:

$$g_R = 3 \left(\frac{L}{\xi} \right)^3 \left(1 - \frac{\overline{\langle S^4 \rangle}}{3 \overline{\langle S^2 \rangle}^2} \right), \quad (8)$$

$$u_R = \frac{3\chi^2}{\xi^3} \frac{\overline{\langle S_\alpha^2 S_\beta^2 \rangle} - \overline{\langle S^2 \rangle}^2}{\overline{\langle S^2 \rangle}^2}. \quad (9)$$

Индексы α и β в (9) характеризуют спиновые конфигурации для различных реплик неупорядоченной системы размера L , моделируемых одновременно при одной и той же температуре и отличающихся различными начальными конфигурациями.

4. Результаты компьютерного моделирования

Для системы со спиновой концентрацией $p = 0,95$ измерения проводились при температурах $T=4,275; 4,285; 4,295; 4,315; 4,335$, а для системы с $p = 0,80$ при температурах $T=3,51; 3,52; 3,53; 3,55; 3,57$, т.е. в интервале изменения приведенной температуры $\tau = |T - T_c(p)|/T_c(p) = 10^{-3} - 10^{-2}$, в которой наиболее ярко проявляются флуктуационные эффекты влияния дефектов структуры. При этом использовались значения критической температуры фазового перехода $T_c = 4,2571$ для $p = 0,95$ и $T_c = 3,4959$ для $p = 0,80$, определенные в работе [16]. В табл. 1,2 приведены найденные при вышеперечисленных температурах значения корреляционной длины ξ , восприимчивости χ , вершин g и u для решеток с размерами $L=20 - 130$ для системы с $p = 0,95$, и размерами $L=20 - 170$ для $p = 0,80$. Для каждой температуры исследование ограничивалось тем максимальным размером решетки L_{max} , при котором все вычисляемые физические величины, определяющие критическое поведение системы, выходят на асимптотику.

Из приведенных в табл.1,2 данных видно, что чем ближе температура системы к критической $T_c(p)$, тем при больших размерах решетки L измеряемые величины достигают своего асимптотического значения. Так, для систем с $p = 0,95$ при температуре $T = 4,275$, ближайшей к критической температуре $T_c = 4,2571$, $L_{max} = 130$, тогда как для $T = 4,335$ $L_{max} = 60$. Это связано с ростом флуктуаций параметра порядка и увеличением флуктуационного вклада в измеряемые величины по мере приближения к критической температуре. Более того, с уменьшением концентрации спинов p процедура выделения асимптотических значений измеряемых величин при одинаковых значениях приведенных температур τ требует рассмотрения решеток с большими размерами L_{max} . Так, для системы с $p = 0,80$ достижение асимптотического значения для вершины u при температуре $T = 3,51$ потребовало использования решетки с $L_{max} = 170$.

Огромный объем вычислительной работы, потребовавшийся для получения приведенных в статье результатов, был выполнен на созданном в лаборатории Прикладной теоретической физики и параллельных вычислений Омского государственного университета (руководитель Прудников В.В.) высокопроизводительном вычислительном кластере. Кластер собран на базе десяти двухпроцессорных машин Pentium III/1000MHz. Реальная производительность кластера, достигнутая на тесте SCALAPAC при решении системы из 25 тысяч линейных алгебраических уравнений, равна 8,4 GFLOPS.

Известно, что в конечной системе не может проявиться настоящий фазовый переход. Тем не менее можно ожидать, что если $\xi(T)$ меньше линейного размера L системы, то конечная система будет правильно передавать термодинамические свойства бесконечной системы при применении методики конечно-мерного скейлинга [12,17]. Методика конечно-мерного скейлинга позволяет осуществить выделение термодинамических значений физических величин на основе их значений, полученных для решетки размера L , при температурах, принадлежащих критической области $\tau \ll 1$.

Основная идея теории конечно-мерного скейлинга состоит в том, что зна-

Таблица 1. Численная зависимость физических величин для системы с $p=0,95$ от размеров решетки L для различных температур в критической области.

T	L	ξ	x	χ	g	u
4,335	60	$6,70 \pm 0,04$	0,112	205 ± 3	$30,61 \pm 0,84$	$9,32 \pm 0,33$
	50	$6,67 \pm 0,04$	0,133	204 ± 3	$30,53 \pm 0,84$	$9,56 \pm 0,34$
	40	$6,50 \pm 0,03$	0,162	203 ± 2	$30,31 \pm 0,83$	$10,32 \pm 0,36$
	30	$6,28 \pm 0,03$	0,209	192 ± 2	$28,58 \pm 0,72$	$12,34 \pm 0,39$
	20	$6,04 \pm 0,02$	0,302	187 ± 2	$26,23 \pm 0,60$	$15,82 \pm 0,43$
4,315	60	$8,13 \pm 0,05$	0,136	360 ± 4	$33,02 \pm 0,95$	$8,36 \pm 0,26$
	56	$8,12 \pm 0,04$	0,145	356 ± 4	$32,85 \pm 0,95$	$8,62 \pm 0,28$
	50	$8,08 \pm 0,04$	0,162	350 ± 4	$32,48 \pm 0,93$	$9,34 \pm 0,33$
	40	$7,75 \pm 0,03$	0,194	330 ± 3	$30,48 \pm 0,82$	$11,26 \pm 0,37$
	30	$7,42 \pm 0,03$	0,247	320 ± 3	$27,00 \pm 0,64$	$15,46 \pm 0,42$
4,295	80	$12,02 \pm 0,06$	0,150	538 ± 5	$31,86 \pm 0,91$	$8,35 \pm 0,39$
	75	$11,98 \pm 0,05$	0,160	538 ± 5	$31,73 \pm 0,90$	$8,74 \pm 0,40$
	70	$11,92 \pm 0,05$	0,170	533 ± 5	$31,23 \pm 0,87$	$9,20 \pm 0,42$
	60	$11,68 \pm 0,05$	0,195	508 ± 5	$30,44 \pm 0,82$	$10,54 \pm 0,44$
	50	$11,50 \pm 0,05$	0,230	503 ± 5	$29,29 \pm 0,77$	$12,55 \pm 0,46$
	40	$11,18 \pm 0,04$	0,279	484 ± 4	$27,54 \pm 0,65$	$16,61 \pm 0,50$
	30	$10,41 \pm 0,03$	0,347	429 ± 4	$23,62 \pm 0,50$	$26,04 \pm 0,62$
4,285	100	$14,05 \pm 0,06$	0,141	854 ± 6	$32,37 \pm 0,94$	$9,22 \pm 0,40$
	90	$14,03 \pm 0,06$	0,156	851 ± 6	$32,23 \pm 0,93$	$9,62 \pm 0,42$
	80	$13,95 \pm 0,05$	0,174	847 ± 6	$31,85 \pm 0,91$	$10,23 \pm 0,48$
	70	$13,81 \pm 0,05$	0,197	839 ± 5	$31,20 \pm 0,87$	$11,32 \pm 0,52$
	60	$13,77 \pm 0,05$	0,229	822 ± 5	$30,44 \pm 0,82$	$13,07 \pm 0,55$
	50	$13,52 \pm 0,04$	0,270	790 ± 5	$28,11 \pm 0,69$	$16,56 \pm 0,58$
	40	$13,09 \pm 0,04$	0,327	731 ± 4	$25,11 \pm 0,60$	$24,32 \pm 0,62$
	30	$12,46 \pm 0,04$	0,415	640 ± 3	$20,99 \pm 0,54$	$33,44 \pm 0,95$
4,275	130	$19,35 \pm 0,08$	0,149	1623 ± 9	$33,96 \pm 1,02$	$8,97 \pm 0,40$
	120	$19,30 \pm 0,08$	0,161	1622 ± 9	$33,84 \pm 1,02$	$9,05 \pm 0,40$
	110	$19,21 \pm 0,08$	0,175	1621 ± 9	$33,48 \pm 0,96$	$9,15 \pm 0,42$
	100	$19,03 \pm 0,07$	0,190	1619 ± 9	$32,80 \pm 0,93$	$9,57 \pm 0,44$
	90	$18,80 \pm 0,07$	0,209	1612 ± 9	$31,50 \pm 0,89$	$10,32 \pm 0,50$
	80	$18,60 \pm 0,07$	0,233	1594 ± 8	$30,00 \pm 0,80$	$11,83 \pm 0,53$
	70	$18,05 \pm 0,06$	0,258	1561 ± 8	$28,31 \pm 0,75$	$14,18 \pm 0,56$
	60	$17,49 \pm 0,06$	0,292	1488 ± 7	$26,31 \pm 0,69$	$20,31 \pm 0,62$
	50	$16,54 \pm 0,05$	0,331	1350 ± 6	$23,78 \pm 0,61$	$27,28 \pm 0,78$
	40	$14,85 \pm 0,05$	0,371	1133 ± 5	$20,42 \pm 0,52$	$35,08 \pm 1,05$

Таблица 2. Численная зависимость физических величин для системы с $p=0,80$ от размеров решетки L для различных температур.

T	L	ξ	x	χ	g	u
3,57	50	$7,32 \pm 0,04$	0,146	253 ± 4	$28,22 \pm 0,76$	$11,62 \pm 0,38$
	45	$7,31 \pm 0,04$	0,162	251 ± 3	$28,20 \pm 0,75$	$11,98 \pm 0,40$
	40	$7,28 \pm 0,03$	0,182	249 ± 3	$28,14 \pm 0,73$	$15,12 \pm 0,43$
	30	$6,76 \pm 0,03$	0,225	228 ± 3	$27,98 \pm 0,70$	$27,54 \pm 0,71$
	20	$5,71 \pm 0,02$	0,286	188 ± 2	$27,65 \pm 0,65$	$59,80 \pm 1,18$
3,55	60	$8,91 \pm 0,06$	0,149	373 ± 5	$29,27 \pm 0,81$	$11,20 \pm 0,38$
	55	$8,88 \pm 0,05$	0,161	371 ± 5	$29,24 \pm 0,81$	$11,70 \pm 0,38$
	50	$8,86 \pm 0,05$	0,177	370 ± 5	$29,13 \pm 0,80$	$14,40 \pm 0,54$
	40	$8,41 \pm 0,05$	0,210	350 ± 4	$28,75 \pm 0,76$	$25,18 \pm 0,63$
	30	$7,86 \pm 0,04$	0,262	333 ± 3	$27,95 \pm 0,70$	$41,96 \pm 0,94$
3,53	90	$12,27 \pm 0,08$	0,136	694 ± 8	$29,78 \pm 0,82$	$11,20 \pm 0,38$
	80	$12,19 \pm 0,07$	0,152	686 ± 7	$29,65 \pm 0,82$	$11,41 \pm 0,40$
	70	$12,05 \pm 0,07$	0,172	677 ± 7	$29,29 \pm 0,80$	$12,38 \pm 0,53$
	60	$11,82 \pm 0,06$	0,197	667 ± 6	$28,75 \pm 0,77$	$18,00 \pm 0,60$
	50	$11,38 \pm 0,05$	0,228	655 ± 5	$28,10 \pm 0,73$	$30,00 \pm 0,78$
	40	$10,68 \pm 0,04$	0,267	622 ± 5	$27,06 \pm 0,62$	$51,50 \pm 0,98$
	30	$9,30 \pm 0,04$	0,310	529 ± 4	$25,48 \pm 0,50$	$82,00 \pm 1,14$
3,52	110	$15,88 \pm 0,09$	0,144	1094 ± 9	$29,92 \pm 0,85$	$11,32 \pm 0,50$
	100	$15,81 \pm 0,09$	0,158	1092 ± 9	$29,84 \pm 0,85$	$11,80 \pm 0,53$
	90	$15,56 \pm 0,09$	0,173	1087 ± 9	$29,72 \pm 0,84$	$12,93 \pm 0,54$
	80	$15,42 \pm 0,08$	0,193	1078 ± 9	$29,51 \pm 0,82$	$15,82 \pm 0,57$
	70	$15,15 \pm 0,08$	0,216	1063 ± 8	$29,20 \pm 0,80$	$25,02 \pm 0,65$
	60	$14,42 \pm 0,08$	0,240	1020 ± 8	$28,60 \pm 0,76$	$36,44 \pm 0,80$
	50	$13,51 \pm 0,07$	0,270	944 ± 7	$27,40 \pm 0,64$	$53,02 \pm 0,99$
	40	$12,19 \pm 0,07$	0,305	824 ± 6	$24,86 \pm 0,49$	$81,38 \pm 1,12$
3,51	170	$24,31 \pm 0,18$	0,143	2408 ± 17	$31,73 \pm 0,90$	$11,05 \pm 0,52$
	160	$24,18 \pm 0,18$	0,151	2403 ± 17	$31,60 \pm 0,89$	$11,62 \pm 0,54$
	150	$24,01 \pm 0,17$	0,160	2392 ± 16	$31,42 \pm 0,89$	$12,43 \pm 0,55$
	140	$23,89 \pm 0,17$	0,171	2384 ± 16	$31,15 \pm 0,88$	$13,92 \pm 0,56$
	130	$23,67 \pm 0,16$	0,182	2373 ± 16	$30,85 \pm 0,87$	$16,03 \pm 0,58$
	120	$23,38 \pm 0,16$	0,195	2359 ± 16	$30,41 \pm 0,86$	$18,42 \pm 0,60$
	100	$22,27 \pm 0,15$	0,223	2289 ± 15	$29,24 \pm 0,80$	$27,56 \pm 0,76$
	90	$21,39 \pm 0,14$	0,238	2183 ± 14	$28,51 \pm 0,76$	$33,45 \pm 0,80$
	70	$19,26 \pm 0,12$	0,275	1894 ± 11	$26,62 \pm 0,60$	$52,36 \pm 0,98$
	60	$17,32 \pm 0,10$	0,289	1641 ± 9	$25,38 \pm 0,54$	$62,54 \pm 1,04$
	50	$15,30 \pm 0,08$	0,306	1359 ± 6	$22,97 \pm 0,47$	$77,30 \pm 1,10$

чения A_L некоторой физической величины A на конечной решетке с линейным размером L в критической области могут быть представлены в виде однородной функции от переменной $s = L/\xi(\tau)$:

$$A_L(\tau) = L^{\delta/\nu} f_A(s(L, \tau)), \quad (10)$$

где δ – критический индекс для термодинамической величины $A \sim \tau^{-\delta}$. С учетом температурной зависимости корреляционной длины в критической области $\xi \sim \tau^{-\nu}$ выражение для скейлинговой переменной $s(L, \tau)$ можно записать в виде

$$s(L, \tau) = (A(\tau)/L^{\delta/\nu})^{-\nu/\delta}. \quad (11)$$

Тогда уравнение (10) можно переписать как

$$A_L(\tau) = A(\tau) F_A(s(L, \tau)), \quad (12)$$

задавая связь между скейлинговыми функциями f_A и F_A в виде следующего соотношения

$$F_A(s) = s^{\delta/\nu} f_A(s). \quad (13)$$

Когда в качестве физической величины A выступает корреляционная длина ξ , уравнение (12) задает $\xi_L(\tau)/L$ как функцию только от $\xi(\tau)/L$, что приводит к соотношению

$$A_L(\tau) = A(\tau) Q_A(x(L, \tau)), \quad (14)$$

где $x(L, \tau) = \xi_L(\tau)/L$, а функция $Q_A(x)$ задается выражением

$$Q_A(x) = F_A(f_\xi^{-1}(x)). \quad (15)$$

Тогда алгоритм процедуры конечно-мерного скейлинга выделения термодинамических значений физических величин по измеряемым величинам на конечной решетке может быть представлен в виде последовательности следующих операций. Для заданной температуры T измеряются значения некоторой физической величины $A_L(\tau)$ и $x = \xi_L(\tau)/L$ при увеличивающемся L . Затем определяется значение L_{max} с универсальным отношением $x_c = \xi(L_{max}, \tau)/L_{max}$ таким, что при $x \leq x_c$ величина $A_L(\tau)$ становится независимой от размеров системы в пределах статистических погрешностей результатов и приобретает термодинамический характер. Полученные значения $A_L(\tau)$ для каждого T аппроксимируются с помощью специально подобранной функции $Q_{A(x)}$ таким образом, чтобы значения величины A не зависели от размеров системы, т.е. $A(\tau) = A_L(\tau)/Q_A(x(L, \tau))$. В соответствии с рекомендациями работы [12] функция $Q_A(x)$ была выбрана в виде $Q(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$ с подбираемыми по методу наименьших квадратов коэффициентами c_i . Функция $Q_A(x)$ характеризуется универсальностью для значений температур, принадлежащих критической области, и значений $x \leq x_c$. Это позволяет использовать ее для нахождения термодинамических значений величин при температурах T столь близких к T_c , при которых L_{max} может быть и недостижима, но известны величины $A_L(\tau)$ и $x = \xi_L(\tau)/L$ при $L < L_{max}$. Важной особенностью функции $Q_A(x)$

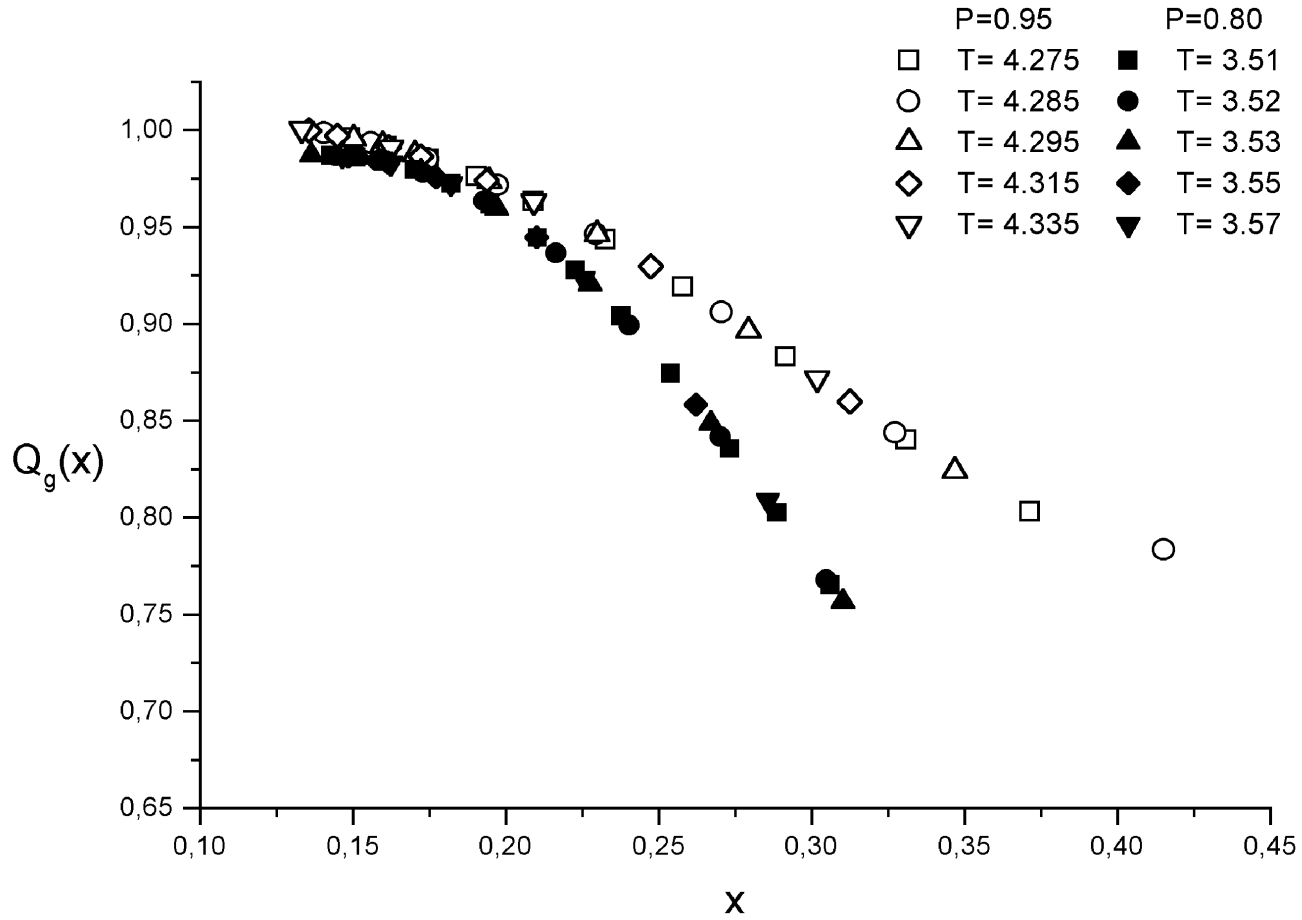


Рис. 1. Графическое представление скейлинговой функции $Q_g(x)$ для различных температур и спиновых концентраций $p = 0,95$ и $p = 0,80$.

является ее независимость в скейлинговой области от каких-либо критических индексов [12, 17]. Графики функций $Q_g(x)$ (рис.1) и $Q_u(x)$ (рис.2), построенные для различных температур и спиновых концентраций $p = 0,95; 0,80$, демонстрируют эту универсальность для $x \leq x_c \simeq 0,15$. Из рисунков видно, что данные скейлинговые функции не обладают температурной зависимостью, а зависимость от концентрации спинов p исчезает для $x \simeq 0,15$.

В табл. 3 приведены результирующие зависимости значений корреляционной длины ξ , восприимчивости χ и вершин g_R и u_R от температуры, найденные с помощью процедуры конечно-мерного скейлинга для систем с $p = 0,95; 0,80$.

Из выявленной температурной зависимости перенормированных вершин g_R и u_R могут быть выделены их критические значения g^*, u^* на основе известных скейлинговых зависимостей данных вершин

$$g_R(\tau) = g^*(1 + a\tau^\theta), \quad (16)$$

$$u_R(\tau) = u^*(1 + b\tau^\theta) \quad (17)$$

с показателем $\theta = \nu\omega$, задаваемым ν – критическим индексом для корреляционной длины и ω – критическим индексом, характеризующим поправки к

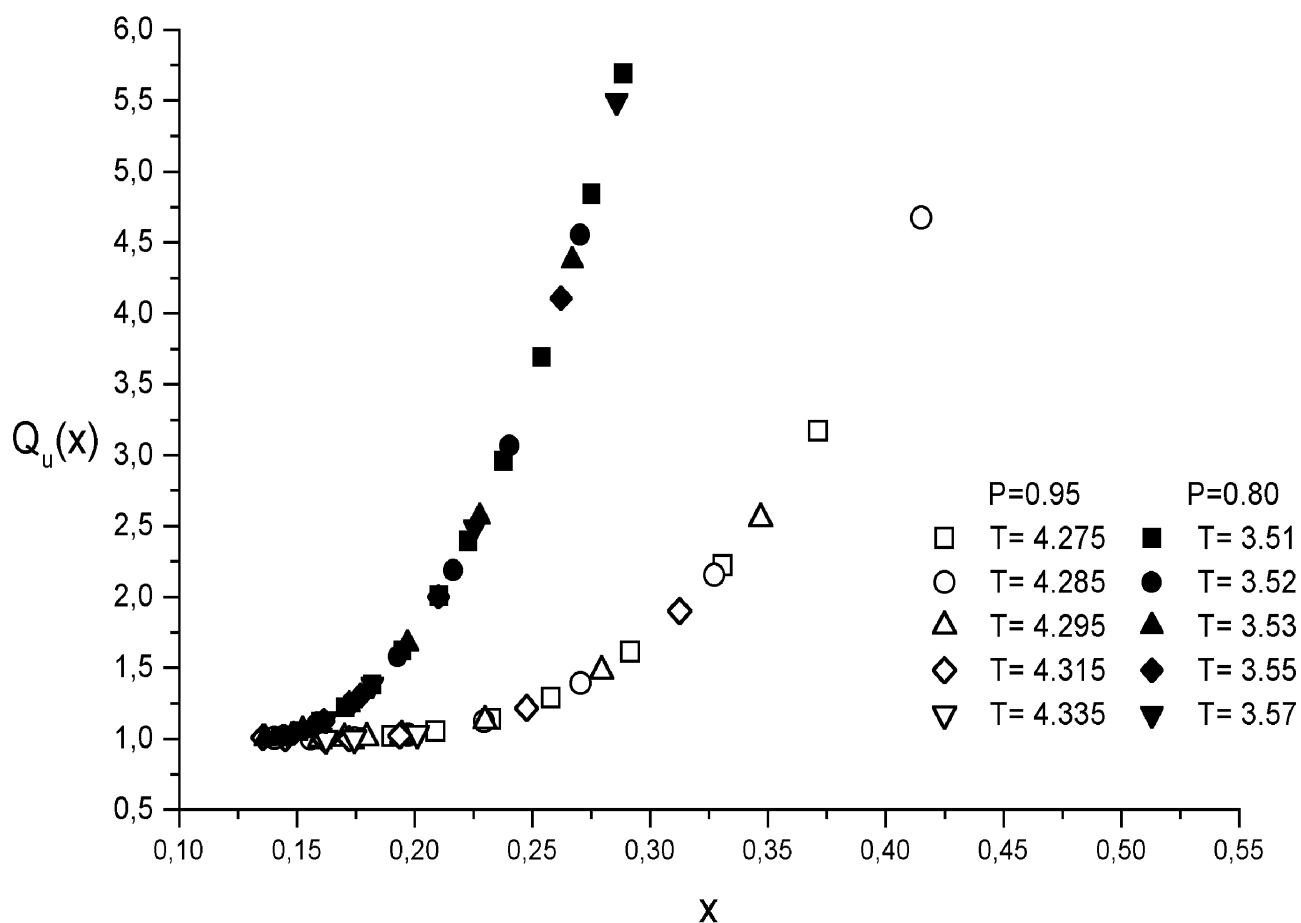


Рис. 2. Графическое представление скейлинговой функции $Q_u(x)$ для различных температур и спиновых концентраций $p = 0,95$ и $p = 0,80$.

Таблица 3. Температурная зависимость поведения физических величин в критической области, выделенная на основе процедуры конечно-мерного скейлинга, для систем с концентрацией спинов 0,95 и 0,80.

p	T	ξ	χ	g	u
0,95	4,275	$20,93 \pm 0,11$	1622 ± 12	$31,46 \pm 1,12$	$10,36 \pm 0,68$
	4,285	$15,73 \pm 0,09$	906 ± 8	$31,13 \pm 1,03$	$10,24 \pm 0,60$
	4,295	$12,68 \pm 0,08$	526 ± 6	$30,87 \pm 0,99$	$10,13 \pm 0,52$
	4,315	$8,33 \pm 0,06$	343 ± 5	$30,49 \pm 1,04$	$9,98 \pm 0,40$
	4,335	$6,86 \pm 0,04$	203 ± 4	$30,27 \pm 0,92$	$9,92 \pm 0,40$
0,80	3,51	$22,91 \pm 0,18$	2217 ± 17	$31,62 \pm 1,01$	$11,22 \pm 0,73$
	3,52	$15,87 \pm 0,10$	1088 ± 10	$31,19 \pm 0,88$	$11,13 \pm 0,71$
	3,53	$12,55 \pm 0,08$	679 ± 8	$30,89 \pm 0,85$	$11,07 \pm 0,63$
	3,55	$9,03 \pm 0,06$	363 ± 6	$30,45 \pm 0,83$	$10,99 \pm 0,51$
	3,57	$7,29 \pm 0,04$	238 ± 4	$30,14 \pm 0,76$	$10,94 \pm 0,60$

скейлингу. Показатель θ характеризует также поправки к асимптотическому температурному поведению корреляционной длины и восприимчивости

$$\xi(\tau) \sim \tau^{-\nu}(1 + c\tau^\theta), \quad (18)$$

$$\chi(\tau) \sim \tau^{-\gamma}(1 + d\tau^\theta). \quad (19)$$

В соответствии с результатами работы [10] при $\omega = 0,25(10)$ и $\nu = 0,6837(53)$ показатель $\theta = 0,17(10)$. В работе [18] методами компьютерного моделирования критического поведения неупорядоченной модели Изинга были получены значения показателей $\nu = 0,6837(29)$; $\omega = 0,37(6)$, которым соответствует $\theta = 0,25(6)$. С целью определения значений критических амплитуд взаимодействия флуктуаций параметра порядка в фиксированной точке g^*, u^* мы по соотношениям (16)-(17) провели аппроксимацию полученных температурных зависимостей для g_R и u_R (табл.3) для значений показателя θ в интервале $0,15-0,25$. Результаты аппроксимаций представлены в табл.4 для спиновых концентраций $p = 0,95; 0,80$. Из приведенных в таблице значений видно, что величина изменений g^*, u^* , обусловленная как изменением показателя θ , так и концентрацией спинов p , находится в пределах статистических погрешностей определения g^*, u^* . Сопоставление полученных значений g^*, u^* с теоретико-полевыми $g^* = 36,72(32)$; $u^* = 11,89(30)$, вычисленными в шестипетлевом приближении [10], указывает на их достаточно хорошее согласие в пределах погрешности результатов. При этом вычисленные нами средние значения g^* и u^* для $p = 0,95$ и $p = 0,80$ лучше согласуются с теоретико-полевыми значениями при θ близких к $\theta = 0,17$, чем к $\theta = 0,25$.

Следует отметить, что вычисляемые в рамках теоретико-полевого приближения значения перенормированных вершин в фиксированной точке существенно зависят от порядка приближения теории и методов суммирования, применяемых для анализа рядов теории возмущения [9, 10, 19–22]. Так, в [9] были получены значения $g^* = 37,88(30)$, $u^* = 13,40(20)$ в пятипетлевом приближении с использованием метода суммирования Паде-Бореля-Леруа. В работе [10] анализировались результаты четырехпетлевого приближения и были представлены значения $g^* = 37,60$, $u^* = 12,57$, полученные в [19] с использованием метода суммирования Чисхолма-Бореля, $g^* = 37,36 \pm 1,20$; $u^* = 10,97 \pm 1,30$ и $g^* = 36,64(90)$; $u^* = 11,78(90)$, полученные в [20] с использованием различных наборов аппроксимантов Паде, $g^* = 36,49$; $u^* = 11,06$, полученные в [21] с использованием ϵ -алгоритма Вина.

Из полученных данных по температурной зависимости корреляционной длины $\xi(\tau)$ и восприимчивости $\chi(\tau)$ (табл.3) нами в соответствии с выражениями (18)-(19) были выделены значения критических индексов ν и γ для значений критического индекса поправки к скейлингу θ , изменяющихся в интервале $0,15-0,25$ (табл.4).

Из представленных в таблице значений ν и γ видно, что они слабо зависят от изменения θ в данном интервале, а наблюдаемые изменения средних значений ν и γ от θ попадают в интервал погрешностей определения этих критических индексов. При сопоставлении значений критических индексов ν и γ , полученных

Таблица 4. Зависимость координат фиксированной точки (g^*, u^*) и критических индексов ν и γ от значений критического индекса θ для систем с концентраций спинов 0,95 и 0,80.

p	θ	g^*	u^*	ν	γ
0,95	0,15	$36,35 \pm 1,16$	$12,21 \pm 0,66$	$0,6797 \pm 0,0028$	$1,340 \pm 0,007$
	0,16	$36,01 \pm 1,16$	$12,08 \pm 0,66$	$0,6801 \pm 0,0028$	$1,340 \pm 0,007$
	0,17	$35,71 \pm 1,16$	$11,96 \pm 0,66$	$0,6804 \pm 0,0028$	$1,340 \pm 0,007$
	0,18	$35,44 \pm 1,16$	$11,86 \pm 0,66$	$0,6808 \pm 0,0029$	$1,340 \pm 0,007$
	0,19	$35,20 \pm 1,16$	$11,77 \pm 0,66$	$0,6811 \pm 0,0029$	$1,340 \pm 0,007$
	0,20	$34,98 \pm 1,16$	$11,69 \pm 0,66$	$0,6815 \pm 0,0029$	$1,341 \pm 0,007$
	0,21	$34,79 \pm 1,16$	$11,61 \pm 0,67$	$0,6818 \pm 0,0030$	$1,341 \pm 0,007$
	0,22	$34,61 \pm 1,17$	$11,55 \pm 0,67$	$0,6822 \pm 0,0030$	$1,341 \pm 0,007$
	0,23	$34,45 \pm 1,17$	$11,49 \pm 0,67$	$0,6825 \pm 0,0031$	$1,341 \pm 0,007$
	0,24	$34,30 \pm 1,17$	$11,43 \pm 0,67$	$0,6829 \pm 0,0031$	$1,341 \pm 0,007$
	0,25	$34,16 \pm 1,17$	$11,38 \pm 0,67$	$0,6832 \pm 0,0031$	$1,341 \pm 0,007$
0,80	0,15	$36,87 \pm 0,98$	$12,21 \pm 0,70$	$0,6832 \pm 0,0027$	$1,345 \pm 0,007$
	0,16	$36,50 \pm 0,98$	$12,14 \pm 0,70$	$0,6832 \pm 0,0027$	$1,345 \pm 0,007$
	0,17	$36,17 \pm 0,98$	$12,08 \pm 0,70$	$0,6832 \pm 0,0027$	$1,345 \pm 0,007$
	0,18	$35,88 \pm 0,98$	$12,02 \pm 0,70$	$0,6832 \pm 0,0028$	$1,345 \pm 0,007$
	0,19	$35,62 \pm 0,98$	$11,97 \pm 0,70$	$0,6832 \pm 0,0028$	$1,345 \pm 0,007$
	0,20	$35,38 \pm 0,98$	$11,93 \pm 0,70$	$0,6832 \pm 0,0028$	$1,345 \pm 0,007$
	0,21	$35,17 \pm 0,98$	$11,89 \pm 0,70$	$0,6832 \pm 0,0028$	$1,345 \pm 0,007$
	0,22	$34,98 \pm 0,98$	$11,85 \pm 0,70$	$0,6833 \pm 0,0028$	$1,345 \pm 0,007$
	0,23	$34,80 \pm 0,98$	$11,82 \pm 0,70$	$0,6833 \pm 0,0029$	$1,345 \pm 0,007$
	0,24	$34,64 \pm 0,99$	$11,79 \pm 0,71$	$0,6833 \pm 0,0029$	$1,345 \pm 0,007$
	0,25	$34,49 \pm 0,99$	$11,76 \pm 0,71$	$0,6833 \pm 0,0029$	$1,345 \pm 0,007$

для спиновых концентраций $p = 0,95$ и $p = 0,80$, видно, что хотя для каждого значения θ наблюдается некоторое увеличение средних значений индексов с ростом концентрации точечных дефектов, однако эти изменения также находятся в пределах статистических погрешностей определения данных критических индексов. Сопоставление полученных результатов с теоретико-полевыми значениями критических индексов $\gamma = 1,342(10)$ и $\nu = 0,6837(53)$ [10] показывает, что они находятся в хорошем согласии друг с другом.

Подводя итоги, можно сделать следующие выводы: полученные в результате компьютерного моделирования критического поведения трехмерной неупорядоченной модели Изинга значения критических амплитуд взаимодействия флуктуаций параметра порядка в фиксированной точке g^*, u^* и критических индексов корреляционной длины ν и магнитной восприимчивости γ достаточно хорошо согласующиеся друг с другом в пределах погрешности численного эксперимента для различных спиновых концентраций $p = 0,95$ и $p = 0,80$ и с теоретико-полевыми значениями, вычисленными в рекордном на настоящее время шестипетлевом приближении, убедительно доказывают универсальность критического поведения слабо неупорядоченных систем. Отметим также, что полученные результаты для g^* и u^* указывают на устойчивость критического поведения слабо неупорядоченных изингоподобных трехмерных систем относительно эффектов нарушения репличной симметрии, которые согласно работам [23] должны были бы вызвать в данных системах флуктуационное нарушение устойчивости критического состояния. Данные выводы согласуются с представленными в наших работах [24] результатами теоретико-полевого описания критического поведения слабо неупорядоченных систем с введенным потенциалом взаимодействия, задающим нарушение репличной симметрии.

В заключение отметим, что мы предполагаем распространить развитую в настоящей работе методику на случай неупорядоченных систем с большими значениями концентрации примесей, осуществить выделение для них координат фиксированной точки и определение значений критических индексов. Этот цикл исследований позволит ответить на фундаментальный вопрос о возможной универсальности критического поведения неупорядоченных систем в широкой области концентраций примеси или о ее нарушении в условиях сильной неупорядоченности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris A.B. *Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models* // J. Phys. C. 1974. V.7, N6. P.1671-1692.
2. Хмельницкий Д.Е. *Фазовый переход второго рода в неоднородных телах* // ЖЭТФ 1975. Т.68. P.1960.
3. Stinchcombe R.B. in *Phase transitions and critical phenomena*, ed. by Domb C. and Lebowitz J.L. Acad.Press. New York 1983. V.7, P.151.
4. Доценко В.С. *Критические явления в спиновых стеклах с беспорядком* // УФН 1995. Т.165. P.481.

5. Паташинский А.З. Покровский В.Л. *Флуктуационная теория фазовых переходов*. М.: Наука, 1982.
6. Доценко В.С. *Современная теория критических явлений* // УФН 1993. Т.163. Р.1.
7. Соколов А.И. Шалаев Б.Н. *О критическом поведении модели Изинга с примесями* // ФТТ 1981. Т.23. Р.2058.
8. Jug G. *Critical behaviour of disordered spin systems in two and three dimensions* // Phys.Rev. 1983. B27. P.4518.
9. Pakhnin D.V., Sokolov A.I. *Five - loop renormalization - group expansion for the three - dimensional n - vector cubic model and critical exponents for impure Ising systems* // Phys. Rev. B. 2000. V.61. P.15130.
10. Pelissetto A., Vicari E. *Randomly dilute spin models: a six - loop field - theoretic study* // Phys. Rev. B. 2000. V.62. P.6393.
11. Tsypin M.M. *Effective potential for scalar field in three dimensions: Ising models in the ferromagnetic phase* // Phys. Rev. B. 1997. V.55. P.8911.
12. Kim J.-K. *Critical renormalized coupling constants in the symmetric phase of the Ising models* // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. V.33. P.2675.
13. Гулд Х., Тобочник Я.К. *Компьютерное моделирование в физике: В 2 ч*. М.: Наука, 1989.
14. Wolff U. // Phys.Rev.Lett. 1989. **62**. P.361.
15. Salas J. Sokal A. *Exact Finite - Size - Scaling corrections to the critical two - dimensional Ising model on a torus* // J. Stat. Phys. 2000. V.98. P.551.
16. Heuer H.-O. *Monte Carlo simulation of disordered 3 - dimensional Ising systems* // Europhys. Lett. 1990. V.12. P.551.
17. Kim J.-K., de Souza A.J.F. and Landau D.P. *Numerical Computation of Finite Size Scaling Functions: An Alternative Approach to Finite Size Scaling* // Phys.Rev. 1996. E54. P.2291.
18. Ballesteros H.G., Fernandez L.A., Martin-Mayor V. et.al. *Critical exponents of the three dimensional diluted Ising model* // Phys. Rev. 1998. B58. P.2740.
19. Mayer I.O. Sokolov A.I. and Shalaev B.N. *Critical exponents for cubic and impure uniaxial crystals: most accurate theoretical values* // Ferroelectrics 1989. V.95. P.93.
20. Varnashev K.B. *The stability of a cubic fixed point in three dimensions from the renormalization group* // Phys.Rev. 2000. B61. P.14660.
21. Mayer I.O. *Critical exponents of the dilute Ising model from four-loop expansion* // J.Phys. 1989. A22. P.2815.
22. Pelissetto A. Vicari E. *Critical phenomena and renormalization-group theory* e-print cond-mat/0012164.
23. Dotsenko Vik.S., Harris A.B. Sherrington D. Stinchcombe R.B. *Self Avoiding Surfaces in the 3D Ising Model* // J.Phys. 1995. A28. P.3093; Dotsenko Vik.S. and Feldman D.E. *Replica Symmetry Breaking and the Renormalization Group Theory of the Weakly Disordered Ferromagnet* // J.Phys. 1995. A28. P.5183.
24. Прудников В.В., Прудников П.В., Федоренко А.А. *Устойчивость критического поведения слабо неупорядоченных систем к нарушению репличной симметрии* // Письма в ЖЭТФ 2001. Т.73. Р.153 ; Prudnikov V.V. Prudnikov P.V. Fedorenko A.A. *Stability of critical behaviour of weakly disordered systems with respect to the replica symmetry breaking* // Phys.Rev. 2001. B63. P.184201.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ДЕМОНСТРАЦИОННО-ОБУЧАЮЩАЯ ПРОГРАММА «УДИВИТЕЛЬНЫЙ МИР КРИСТАЛЛОВ. СВОЙСТВА СИММЕТРИИ»

Р.И. Газизов, Н.В. Жданов, С.Л. Ланчук, Г.Б. Тодер

The computer demonstrating and training program is presented. The program is devoted to questions of the symmetry and structure of crystals. It can be recommended to teachers and students of technical and classical universities for computer-assisted instruction of Solid State Physics.

В настоящее время известно более 3000 минералов. Большая их часть имеет определенный химический состав. При идентификации минералов существенную роль играет форма их кристаллов. Хотя во многих образцах она искажена или не всюду идеально выражена, все же в большинстве случаев удается различить какие-либо признаки кристаллического строения, например форму граней или постоянные углы между гранями. Типичные формы кристаллов, как известно, объединены в семь кристаллографических систем, называемых сингониями. Различие между ними проводится по кристаллографическим осям и углам, под которыми эти оси пересекаются.

Потребности техники, развитие известных и возникновение новых методов исследования структуры твердых тел привели к тому, что кристаллография, первоначально относившаяся к геолого-минералогическим наукам, тесно переплелась со многими разделами химии, физики и технических наук. Основой кристаллографии в настоящее время является физика кристаллов (кристаллофизика) — раздел физики твердого тела.

Вместе с повышением роли математических методов в исследовании кристаллов расширяются области применения кристаллов в технике. Это выдвигает новые требования к подготовке специалистов, как исследователей, так и инженеров, и вызывает необходимость не только в соответствующей новой учебной литературе, но и в использовании новых, современных образовательных технологий, эффективных и гибких, для более глубокого и полного освоения теории кристаллов, отвечающих современному уровню науки и техники.

К сожалению, имеющаяся учебная литература по теории, описывающей структуру кристаллов, их физические, химические свойства, методы исследования, либо не рассчитана на инженеров, либо включает слишком краткий курс,

© 2003 Р.И. Газизов, Н.В. Жданов, С.Л. Ланчук, Г.Б. Тодер

E-mail: toder@ngs.ru

Омский государственный университет путей сообщения

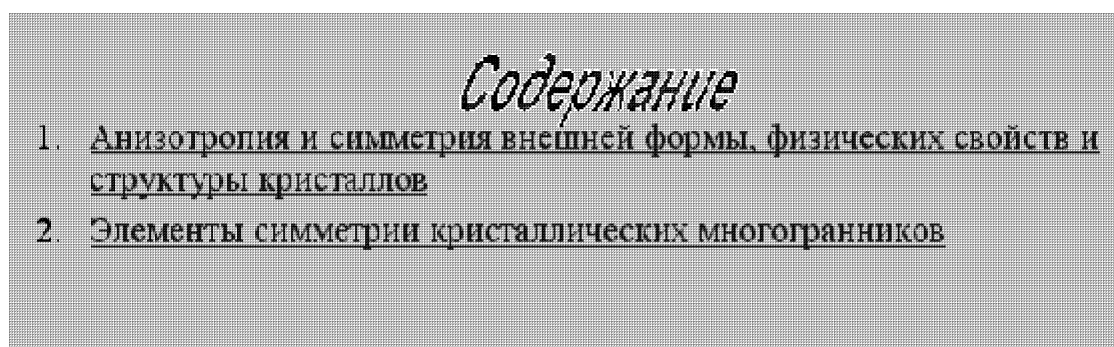


Рис. 1. Содержание программы.

не содержащий описания математического аппарата физики кристаллов. Поэтому в настоящий момент имеется острая необходимость в создании курса физики кристаллов, в котором возможности и преимущества современных технологий обучения на базе компьютерных программ сочетались бы со стандартными методами обучения и учитывали специфику инженерного образования, в частности традиционные трудности, такие как: сложность восприятия студентами инженерно-технических специальностей абстрактного теоретического подхода к изучению дисциплин; недостаток знания математических, физических и др. методов анализа исследуемых систем; отсутствие опыта практического применения теоретических знаний; и, как следствие, превалирующее представление о том, что теоретические знания, даже по естественно-научным дисциплинам, все равно не пригодятся в профессиональной деятельности.

Представляемая программа посвящена вопросам связи структуры кристаллов и их симметрии и должна стать первой из цикла программного обеспечения по курсу физики твердого тела, содержащего основы геометрической кристаллографии, теории симметрии кристаллов, теории электрических, магнитных, тепловых, упругих и оптических свойств кристаллов. Она предназначена для проведения аудиторных занятий при изучении физики твердого тела, кристаллофизики и отдельных их разделов в классических и технических университетах и физико-технических вузах, в том числе при самостоятельном изучении этих дисциплин, а также для дистанционного обучения.

Программа носит демонстрационный и обучающий характер. Цель программы — помочь студенту в формировании единого представления о структуре кристаллов с точки зрения свойств симметрии в контексте общематематических основ этих свойств. Физико-химические свойства кристаллов и их связь со структурой в представляемой разработке не изучаются. Пользователь знакомится со свойствами симметрии кристаллических решеток и с основами математических теорий, позволяющих описывать эти свойства и классифицировать кристаллы. Авторы также надеются, что программа позволит популяризировать знания из области современной теоретической физики и увидеть не только внешнюю красоту кристаллов, но и невидимую сразу, скрытую красоту свойств симметрии пространства и физической теории, базирующейся на этих свойствах.



Рис. 2. Слайд, знакомящий с простейшими симметриями.

Теоретическое содержание программы в настоящий момент состоит из двух разделов (рис. 1) и включает описание допустимых кристаллических решеток с точки зрения пространственных групп. Слайды с фотографиями природных образцов и трехмерные изображения соответствующих кристаллических решеток позволяют обучающемуся непосредственно в процессе работы оценить красоту глубоко абстрактной теории симметрии кристаллов, сравнивая предсказываемые этой теорией идеальные кристаллические структуры с формой реальных образцов минералов и драгоценных камней, фотографии которых, сделанные в виде слайдов, включены в программу. В таком подходе реализуется необходимое современному инженеру и современному человеку вообще синтетическое и эстетическое восприятие научных и природных феноменов.

Необходимо особо подчеркнуть, что наряду с теоретическим программа включает наглядный материал, позволяющий получить пространственное представление об изучаемых объектах — кристаллах. Программа содержит множество рисунков, цветных изображений природных минералов и соответствующих им геометрических структур. Она помогает разобраться в строении кристаллических тел поэтапно, начиная с основных элементов симметрии. Изложение математических основ рассчитано на студентов инженерных специальностей, незнакомых с математическим аппаратом теории групп и представлений групп (см., например, рис. 2).

Программа имеет пользовательский интерфейс, основанный на применении функционального меню, работает в операционных системах Windows-95; 98; NT; 2000; ME (Millennium). Минимальные технические требования: оперативная память — 16 Мб; P-133; свободное место на жестком диске — 30 Мб.

Программа представлена в виде презентации. Для ее разработки используется стандартный пакет Microsoft Power Point, позволяющий создать электронные слайды с применением анимации. Просмотр слайдов осуществляется при

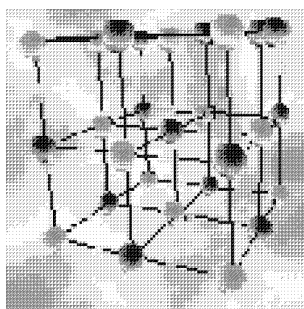


Рис. 3. Кубическая решетка. Один из кадров видеофильма.

помощи системы гиперссылок, которая позволяет обучающемуся обращаться к любому слайду программы.

Как приложение для получения трехмерного изображения пространственных кристаллических решеток использована программа 3DStudioMax2, которая позволяет перемещать и вращать объект, изменять его освещение и создать видеофильм. Использование пакета 3DStudioMax2 дало возможность показать строение кристаллических решеток и элементов решеток, отвечающих основным элементам групп симметрии, с различных точек расположения наблюдателя (см., например, рис.3). Предусмотрена также возможность по желанию пользователя вращать трехмерные изображения геометрических структур.

Пользователю также предоставлена возможность включать и отключать музыку, сопровождающую работу с программой.

В настоящее время продолжается расширение и совершенствование программы. Апробация программы будет проведена в 2003-2004 учебном году со студентами первого, второго и третьего курсов Омского государственного университета путей сообщения (ОмГУПС).

В заключение авторы благодарят кафедры теплоэнергетики, прикладной математики и механики, физики и химии ОмГУПС, обеспечивающие техническую поддержку в разработке программы.

SIMCOSAR: ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ ИНФОРМАЦИОННОГО ПОЛЯ ИНТЕРНЕТ

И.А. Земсков

The article presents the description of simulation program package (named as SimCOSAR). Computer programs were realized on Python with SimPy package.

Введение

В предыдущей статье [1] были приведены модели двух концепций реализации системы мониторинга информационного поля Интернет. Также немного было сказано о разрабатываемом комплексе программ, который реализует описанные модели. В ходе пробных экспериментов в программный комплекс вносились некоторые исправления и дополнения, а также была выявлена и реализована оптимальная, на наш взгляд, архитектура построения программного комплекса. Поэтому целью данной статьи мы выбрали знакомство коллег с текущей версией программного комплекса моделирования. Но прежде чем приступить к его описанию, обозначим основные принципы и договорённости, которые были использованы при его проектировании и реализации:

- работу комплекса можно и нужно разбить на этапы. Например, в отдельный этап может быть вычленено создание рабочей среды (набора ресурсов) и карты (журнала) событий, происходящих в наблюдаемой среде;
- так как проведение экспериментов разделено на этапы, а каждый этап имеет свою «настроечную» информацию и результаты функционирования (минимум лог-файл функционирования соответствующего модуля), то логичным (но не сразу пришедшим) решением стало размещение всей информации, касающейся одного этапа в отдельной директории. Причём мы ввели правило именования директорий. Например, уже упомянутые этапы создания рабочей среды располагаются в директориях с именем «seriesN», где N - номер серии (серий может быть столько, сколько необходимо исследователю). Остальные имена директорий будут указаны далее по тексту;

© 2003 И.А. Земсков

E-mail: zemskov@univer.omsk.su

Омский государственный университет

- в условиях применения языка Python было признано, что наиболее удобным способом организации хранения настроечной информации является использование ini-файлов, доступ к которым обеспечивает стандартный класс - ConfigParser. Все ini-файлы каждого этапа мы договорились хранить в специальной («ini») поддиректории директории этапа;
- для всех этапов должна быть выделена и помещена в доступное место (общий каталог «ini») максимально единая настроечная информация (это необходимо во избежание бессмысленного дублирования информации и облегчения настройки программного комплекса);
- так как каждый этап может включать в себя несколько действий (например инициализация, работа, вывод накопленной статистики), принято решение объединять все однотипные действия в единые пакетные файлы (bat-файл). Пакетный файл помещается в корень директории этапа;
- было принято решение хранить самые последние версии модулей в едином каталоге («bin»), причём имена файлов в данном каталоге не должны содержать версию (на всех стадиях разработки любых модулей комплекса мы договорились вести учёт версий программного кода, как в заголовках, так и в названиях файлов модулей) модуля. Эта договорённость избавляет от необходимости лишний раз исправлять имена вызываемых в пакетных файлах модулей;
- реально происходящий процесс передачи информации с одного узла сети Интернет на другой узел имеет большое количество неподдающихся формализации нюансов. Все эти нюансы субъективно влияют на изучаемый процесс мониторинга, но их рассмотрение лишь засорит модели ненужными подробностями. Поэтому было принято решение, что каждый раз, когда необходимо определить время передачи некоторого объёма информации через сеть, мы будем использовать случайную величину, которая равномерно распределена на некотором интервале. В каждом конкретном случае мы будем давать свои оценки возможным значениям нижней и верхней границ интервала.

1. Состав программного комплекса

Реализация всех функций комплекса сгруппирована по нескольким модулям:

- **SimPages.py** - создание рабочей среды (набора ресурсов) и карты (журнала) событий, происходящих в наблюдаемой среде;
- **SimRobRoute.py** - создание «маршрутов» обследования набора ресурсов роботом или роботами;
- **SimRobot.py** - имитация работы системы мониторинга в случае использования концепции «роботов»;
- **SimRobotM.py** - имитация работы системы мониторинга в случае использования стратегии «модифицированных роботов»;
- **SimSensor.py** - имитация работы системы мониторинга в случае использования концепции «сенсоров»;
- **SimReport.py** - извлечение статистики, которая была накоплена в ре-

зультате осуществления имитации;

- **SimMergeReports.py** - извлечение статистики, которая была накоплена в результате осуществления нескольких имитаций («прогонов»).

Рассмотрение каждого из этих модулей начнём с общего для всех модулей элемента, а именно с общей настроечной информации.

2. Общая настроечная информация

Общие настройки могут быть распределены по нескольким ini-файлам, которые помещаются в общую для всего комплекса ini-директорию. На данный момент мы имеем два файла настроек: common.ini и db.ini. Ссылки на эти файлы реализуются в каждом модуле программного комплекса в виде глобальных текстовых констант (comini, dbini). Впоследствии количество файлов и их содержание может (в силу возникающих потребностей разработки) измениться, а сейчас мы приведём таблицы, в которые собрали содержание названных файлов. Здесь и в аналогичных таблицах дальше в отдельном столбце таблицы мы будем приводить рекомендуемые значения параметров (часто предполагается невозможность их изменения без необходимости изменения программного кода). Ещё один столбец таблицы будет посвящён словесному описанию параметра.

Таблица 1. Файл common.ini.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[Options]	WorkDirectory		Директория размещения программного комплекса
[reportOptions]	ReportFileExtension	.csv	Расширение файлов с отчётными данными
	ReportValuesDelimiter	;	Разделитель значений в файле отчёта
[measureOptions]	PageSizeMeasure	byte	Единицы измерения объёмов информационных ресурсов. В модулях значение параметра нигде в явном виде не используется и носит характер справочной информации
	TimeMeasure	10msec	Единица измерения модельного времени. В модулях значение параметра нигде в явном виде не используется и носит характер справочной информации

Таблица 2. Файл db.ini.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[dbOptions]	Host		IP адрес MySQL сервера
	Login		Имя учётной записи на сервере

Таблица 2. Файл db.ini(продолжение)

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[dbOptions]	Password		Пароль доступа к учётной записи
	PagesTableName	pages	Имя таблицы, в которой будет храниться информация о моделируемых информационных ресурсах
	PagesTableFieldsSQL	pid int(11) primary key, iter tinyint, lastch tinyint, size int(11), changed tinyint, crawled tinyint, wtime int(11)	SQL описание полей таблицы PagesTableName, напрямую используется в программе
	ChangesTableName	events	Имя таблицы, в которой будет храниться информация о происходящих изменениях моделируемых информационных ресурсов
	ChangesTableFieldsSQL	eid int(11) auto_increment primary key, iter tinyint, pid int(11), etime int(11), newch tinyint, prevch tinyint, dsize int(11), index(etime)	SQL описание полей таблицы ChangesTableName
	QueriesTableName	queries	Имя таблицы, в которой будет храниться информация о поступивших запросах на моделируемые информационные ресурсы
	QueriesTableFieldsSQL	qid int(11) auto_increment primary key, iter tinyint, pid int(11), qtime int(11), index(qtime)	SQL описание полей таблицы QueriesTableName
	RobRouteTableName	robroute	Имя таблицы, в которой будет храниться информация о маршруте робота(-ов)
	RobRouteTableFieldsSQL	pid int(11), rob int(11)	SQL описание полей таблицы RobRouteTableName
	StatTableFieldsSQL	sid int(11) auto_increment primary key, stime int(11), varval double	SQL описание полей таблиц, которые используются для сбора статистических данных

Пока данные таблицы приводятся без дополнительных пояснений, так как необходимые разъяснения будут даваться при дальнейшем описании модулей комплекса.

3. Модуль SimPages.py

Основная задача данного модуля заключается в генерации серии «виртуальных» информационных ресурсов, а также истории их изменений и истории запросов на них. Данный модуль может быть отработан каждый раз, когда по плану экспериментов необходима новая (другая) серия информационных ресурсов. Под серией будем понимать один или несколько (они отличаются исходными значениями параметров моделирования) наборов информационных ресурсов. Таким образом, в одной серии должен присутствовать хотя бы один набор описаний информационных ресурсов. А всю информацию, которая касается определённой серии, мы решили хранить в папке с именем «seriesN» (где N необходимо заменить номером рассматриваемой серии).

Модулю для работы необходимо указать два параметра: во-первых, название директории («seriesN»), а во-вторых, имя файла с настройками текущего набора («serN-M.ini»). Таким образом, для генерации всей серии необходимо выполнить модуль SimPages.py ровно M раз, т.е. столько раз, сколько наборов в серии. Все эти вызовы модуля можно собрать в один пакетный файл (например, можно создать файл build.bat и поместить все команды в него, что, собственно, мы и сделали). В дальнейшем для создания всей серии необходимо вызвать на выполнение только этот пакетный файл.

Все файлы с настройками хранятся в поддиректории «ini». Каждая серия имеет общий файл настроек (хранимый, например, в файле с именем «serN.ini», где N - номер серии). Каждый набор также имеет свой персональный файл настроек (хранимый, например, в файле с именем «serN-M.ini», где N - номер серии, а M - номер набора). Приведём содержимое общего файла настройки серии и файла настройки набора.

Таблица 3. Файл serN.ini.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[simOptions]	ModelTime		Моделируемое время, единиц (1ед=10мсек)
	Iterations	1	Количество итераций (при наличии больших вычислительных мощностей и других ресурсов можно попробовать собрать обширную статистику), единиц
[pageOptions]	MinPageSize	65	Минимальный размер информационного ресурса, байт
	MaxPageSize	122880	Максимальный размер информационного ресурса, байт
	MinPageLoadTime	1	Минимальное время, которое необходимо для «скачивания» информационного ресурса, единиц

Таблица 3. Файл serN.ini(продолжение)

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
	MaxPageLoadTime	40	Максимальное время, которое необходимо для «скачивания» информационного ресурса, единиц
	DefaultPageChange	6	Задаваемый изначально тип (номер) «последнего» изменения информационного ресурса. Тип 6 соответствует «Страница доступна (нет изменений)». Весь список типов доступен в [1]
	DefaultPageChanged	0	Логический ключ (1 - True / 0 - False), который отвечает за исходное значение признака «Информационный ресурс изменился»
	DefaultPageCrawled	1	Логический ключ (1 - True / 0 - False), который отвечает за исходное значение признака «Последнее изменение ресурса уже известно системе мониторинга»
[logOptions]	LogDirectory	logs\	Директория для размещения соответствующих данному этапу журналов («логов»)
	LogFileName	serlog.txt	Имя файла главного журнала событий
	LogTraceToFile	1	Логический ключ (1 - True / 0 - False), который отвечает за включение протоколирования действий при выполнении данного модуля

Таблица 4. Файл serN-M.ini.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[serOptions]	CommonIni	serN.ini	Ссылка на файл общих настроек для текущей серии
[simOptions]	RandomSeed		Смещение генератора случайных чисел (integer)
[pageOptions]	PageCount		Количество моделируемых информационных ресурсов, единиц
	FirstPageNum	1	Нумерация информационных ресурсов в наборе начинается с данного значения
[changeOptions]	ChangeIntensity		Интенсивность изменений любого информационного ресурса (float)

Таблица 4. Файл serN-M.ini(продолжение)

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
	MinPageIncSize	0	Минимальный размер возможного положительного приращения информационного ресурса, байт
	MinPageDecSize	0	Минимальный размер возможного отрицательного приращения информационного ресурса, байт
[requestOptions]	RequestIntensity		Интенсивность «внешних» запросов любого информационного ресурса (float)
[dbOptions]	DBName	serN_M	Имя базы данных, в которой будет храниться текущий набор
	TablesNeedCreate	1	Признак необходимости создания таблиц набора, (1 - True / 0 - False)
[logOptions]	StepLogCreatingPages		Задаёт шаг, с которым в журнал попадает сообщение о «созданных» на данный момент информационных ресурсах. Значение шага не может быть больше значения параметра PageCount

Как видно из таблицы 4, за каждым набором закрепляется своя база данных (см. поле DBName). Для простоты создания и удаления всех необходимых баз данных одной серии мы описали два SQL-скрипта: create.sql и drop.sql, которые помещаем в специальную поддиректорию («sql») директории «seriesN». Каждая база данных набора состоит из трёх таблиц, структуру которых можно увидеть в соответствующих полях файла db.ini. Однако необходимо дать некоторые пояснения к используемым полям таблиц.

Таблица «pages» (имя таблицы описывается полем PagesTableName) - описывает информационные ресурсы и имеет следующие поля:

- **pid** – идентификационный номер ресурса;
- **iter** – порядковый номер итерации;
- **lastch** – номер (тип) последнего изменения;
- **size** – исходный размер информационного ресурса;
- **changed** – поле содержит признак изменения ресурса с момента последнего наблюдения за его состоянием системой мониторинга;
- **crawled** – поле содержит признак учёта системой мониторинга последних изменений, которые произошли с ресурсом;
- **wtime** – поле хранит время первого неучтённого изменения.

Таблица «events» (см. поле ChangesTableName) описывает изменения информационных ресурсов и имеет следующие поля:

- **eid** – идентификационный номер события изменения;
- **iter** – порядковый номер итерации;

- **pid** – идентификационный номер ресурса, для которого произошло текущее событие изменения;
- **etime** – время наступления события изменения;
- **newch** – новый номер (тип) изменения ресурса;
- **prevch** – предыдущий номер изменения ресурса (необходим для обнаружения ситуаций, когда «фактически» изменений в состоянии ресурса не произошло, например, когда новый номер изменения совпадает со старым и равен 2 - «Ошибка 404»);
- **dsize** – новый байтовый размер рассматриваемого ресурса.

Таблица «queries» (см. поле QueriesTableName) описывает запросы информационных ресурсов и имеет следующие поля:

- **qid** – идентификационный номер события запроса ресурса;
- **iter** – порядковый номер итерации;
- **pid** – идентификационный номер ресурса, который запрашивают;
- **qtime** – время поступления запроса на информационный ресурс.

В таблице 4 дополнительного пояснения требуют параметры «ChangeIntensity», «RequestIntensity». Необходимо сказать, что на данный момент в рамках программного комплекса моделирование интервалов времени между последовательными событиями производится только с использованием экспоненциального распределения. Реализация процедуры генератора случайных величин, распределённых по экспоненциальному закону с математическим ожиданием θ (θ вычисляется как отношение общего времени моделирования к соответствующей интенсивности) позаимствована из [2]. Если в дальнейшем потребуется проведение экспериментов с другими законами распределения, то может потребоваться доработка данного модуля соответствующими процедурами и соответственно расширение файлов настроек необходимыми параметрами.

Основу модуля SimPages.py составляют три класса (Page, Change, Query) и одна глобальная процедура (main), которая собственно и содержит главный цикл модуля. Обобщённый алгоритм функционирования модуля представлен блок-схемой на рисунке 1.

При каждом запуске модуля SimPages.py в файл главного журнала («лог» выполнения модуля) попадает новая порция следующей информации:

- дата и время начала работы модуля;
- версия используемого модуля SimPages.py;
- полный путь к файлу и само имя файла используемых настроек набора;
- счётчик итераций;
- используемое смещение генератора случайных чисел;
- количество созданных на данный момент (выводится реальное время) информационных ресурсов (для вывода используется шаг StepLogCreatingPages);
- суммарный «виртуальный» объём (в байтах) созданного набора ресурсов;
- дата и время завершения работы модуля.

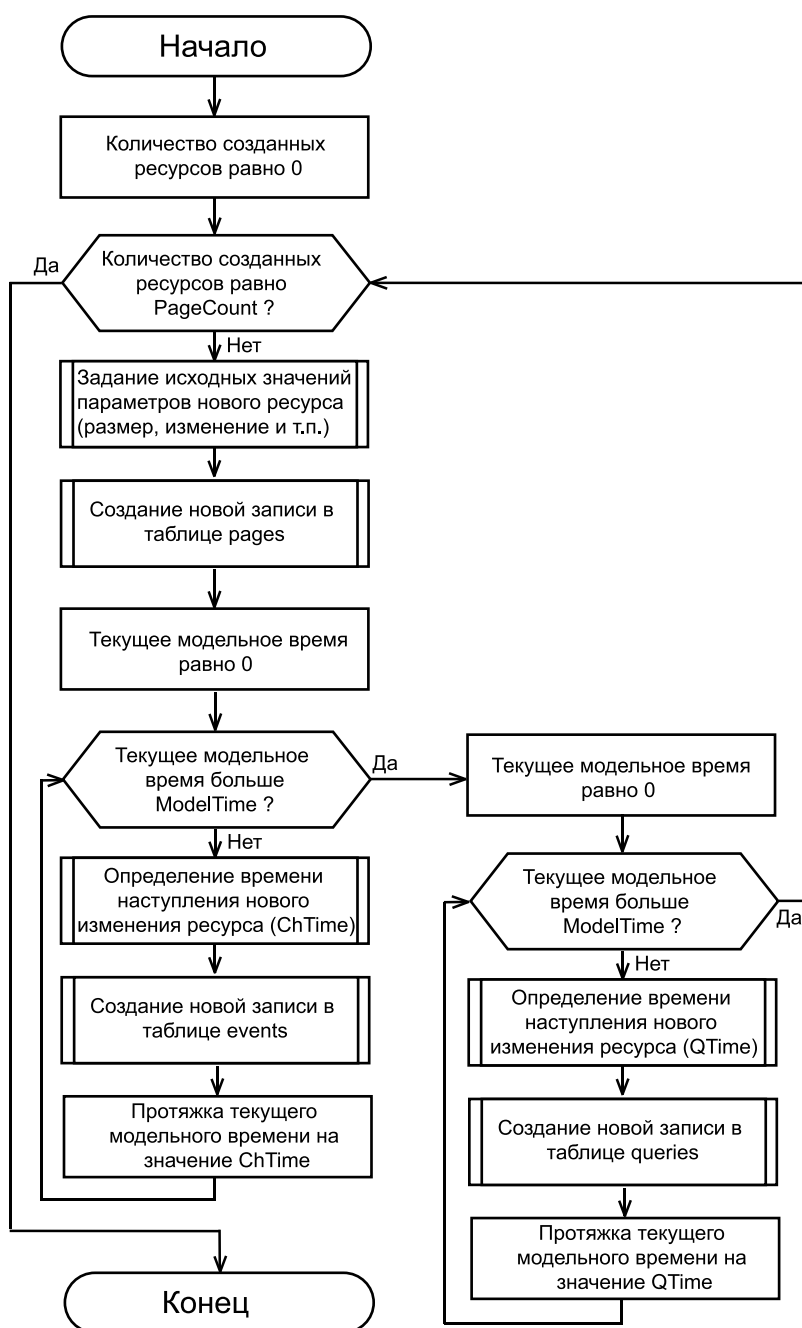


Рис. 1. Обобщённый алгоритм модуля SimPages.py.

4. Модуль SimRobRoute.py

В реальной жизни у роботов поисковых систем существует бесконечное множество всевозможных путей обхода информационных ресурсов. Вопросу о нахождении оптимального пути посвящено множество исследовательских работ, и, чтобы убедиться в этом, достаточно посетить архивы последних конференций, которые освещают проблемы технологий поисковых систем Интернет [3]. Однако в рамках нашего исследования мы используем и рассматриваем самый простой в реализации - «последовательный маршрут». Данный маршрут характеризуется тем, что список ресурсов, которые известны системе мониторинга, последовательно обходит индексирующий робот. Если роботов несколько, список делится на примерно равные части и к каждой части «прикрепляют» одного из имеющихся роботов. После достижения последнего ресурса в списке робот должен продолжить обход, начиная с первого ресурса в списке.

В контексте всего вышесказанного можно сделать вывод, что модуль SimRobRoute.py занимается тем, что «привязывает» каждый конкретный ресурс в таблице pages к одному из роботов (их количество задаётся параметром RobotQuantity, см. таблицу 5 далее). Алгоритм «привязки» априори подразумевает наличие упорядоченной нумерации ресурсов в таблице pages. Поэтому для работы модулю достаточно знать только общее количество информационных ресурсов.

В зависимости от поставленных целей исследования могут понадобиться один или несколько маршрутов. Причём один и тот же маршрут может повторно использоваться по отношению к различным сериям информационных ресурсов. Единственным ограничением для такого использования является совпадение у маршрута и серии количества моделируемых ресурсов. Вся информацию, которая касается определённого маршрута, мы решили хранить в папке с именем «pathN» (где N необходимо заменить номером рассматриваемого маршрута).

Модулю для работы необходимо указать два параметра: во-первых, название директории («pathN»), а во-вторых, имя файла с настройками текущего маршрута («pathN.ini»). С целью облегчить работу с модулем мы создали пакетный файл, в котором указали необходимую строку вызова модуля с передачей требуемых параметров. Файлу присвоили имя build.bat. Файл с настройками хранится в поддиректории «ini». В таблице 5 приведено содержимое файла настройки маршрута.

Таблица 5. Файл pathN.ini.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[pageOptions]	PageCount		Общее количество информационных ресурсов, которые будут являться пунктами маршрутов, единиц

Таблица 5. Файл pathN.ini(продолжение)

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[robotOptions]	RobotQuantity		Количество роботов, участвующих в мониторинге информационных ресурсов, единиц
[dbOptions]	DBName	pathN	Имя базы данных, в которой будет храниться текущий маршрут
[logOptions]	LogDirectory	logs\\	Директория для размещения соответствующих данному этапу журналов («логов»)
	LogFileName	routelog.txt	Имя файла главного журнала событий
	LogTraceToFile	1	Логический ключ (1 - True / 0 - False), который отвечает за включение протоколирования действий при выполнении данного модуля

Как видно из таблицы 5, за каждым маршрутом закрепляется своя база данных (см. поле DBName). Для простоты создания и удаления баз данных маршрутов мы описали два SQL-скрипта: create.sql и drop.sql, которые поместили в поддиректорию («sql») директории «pathN». Каждая база данных маршрута состоит из одной таблицы, структуру которой можно увидеть в соответствующем поле (RobRouteTableFieldsSQL) файла db.ini.

При каждом запуске модуля SimRobRoute.py в файл главного журнала («лог» выполнения модуля) попадает новая порция следующей информации:

- дата и время начала работы модуля;
- версия используемого модуля SimRobRoute.py;
- полный путь к файлу и само имя файла используемых настроек набора;
- номер текущего робота;
- дата и время завершения работы модуля.

5. Модуль SimRobot.py

Данный модуль позволяет осуществлять имитацию функционирования системы мониторинга, которая построена с использованием концепции «роботов». Использование модуля основано на том соображении, что каждый раз, когда мы вызываем на исполнение данный модуль по отношению к наборам одной и той же серии, мы тем самым осуществляем «один» эксперимент. Конечно, можно называть экспериментом и обработку каждого набора по отдельности, но, на наш взгляд, для данного случая более уместен термин «прогон». Само собой разумеется, что один эксперимент может задействовать несколько модулей (вдобавок, например, SimReport.py или SimMergeReports.py), каждый из которых может требовать на вход свои файлы настроек, а на выходе создавать несколько файлов с результатами своей деятельности. Исходя из этих соображений, мы поместили всю информацию, которая касается одного эксперимента

в директорию с именем «testR», где R – номер эксперимента. Приведённые соображения действительны и для других модулей имитации: SimRobotM.py, SimSensor.py.

Модулю для работы необходимо указать два параметра: во-первых, название директории («testR»), а во-вторых, имя файла с настройками используемого набора ресурсов («serN-M.ini», имя файла совпадает с именем файла настроек наборов для модуля SimPages.py, но, как будет видно далее, содержимое этих файлов заметно отличается). Таким образом, для имитации системы на данных всей серии необходимо выполнить модуль SimRobot.py ровно M раз, т.е. столько раз, сколько наборов в серии. Все эти вызовы модуля мы собрали в один пакетный файл и назвали его run.bat.

Все файлы с настройками эксперимента хранятся в поддиректории «ini». Каждый эксперимент имеет общий файл настроек (хранимый, например, в файле с именем «testR.ini», где R - номер эксперимента). Использование имён «serN-M.ini» для файлов настроек наборов обосновывается последующей (при увеличении числа экспериментов) легкостью контроля правильности выбора данных для проведения эксперимента. Приведём содержимое общего файла настройки эксперимента и файла настройки набора.

Таблица 6. Файл testR.ini для модуля SimRobot.py.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[simOptions]	ModelTime		Моделируемое время, единиц
	Iterations	1	Количество итераций, единиц
[pageOptions]	PageCount		Количество моделируемых информационных ресурсов, единиц
	MinPageLoadTime	1	Минимально возможное время «скачивания» одного информационного ресурса
	MaxPageLoadTime	40	Максимально возможное время «скачивания» одного информационного ресурса
[robotOptions]	RobotQuantity		Количество роботов, участвующих в мониторинге информационных ресурсов, единиц
[logOptions]	LogDirectory	logs\\	Директория для размещения соответствующих данному этапу журналов («логов»)
	LogFileName	testlog.txt	Имя файла главного журнала событий
	LogTraceToFile	1	Логический ключ (1 - True / 0 - False), который отвечает за включение протоколирования действий при выполнении данного модуля
	StepLogCycles	1	Шаг журнализации события завершения роботом цикла обхода «своих» ресурсов

Таблица 7. Файл serN-M.ini для модуля SimRobot.py.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[testOptions]	CommonIni	testR.ini	Ссылка на файл общих настроек для текущего эксперимента
[simOptions]	RandomSeed		Смещение генератора случайных чисел (integer)
[dbOptions]	MainDBName	serN_M	Имя базы данных, в которой хранится необходимый набор
	StatDBName	testR_M	Имя базы данных, в которой будут сохраняться значения наблюдаемых величин(ReportStat Vars)
	RouteDBName	pathL	Имя базы данных, в которой хранится используемый в эксперименте маршрут робота(-ов)
[reportOptions]	ReportDirectory	M\\	Директория для размещения соответствующих данному набору статистических данных, которые будут собраны в ходе эксперимента. Буква M совпадает с номером обрабатываемого набора
	ReportStat Vars	needfresh, freshness, sumsize	Имена переменных, для которых в процессе имитации идёт сбор общей «статистики». Значения данного параметра используются при создании соответствующих таблиц базы данных и файлов отчётов
	OtherReportStat Vars	sumsizerob	Дополнительные имена «статистических» переменных, которые имеют немного отличный алгоритм обработки и вывода. Значение параметра, в частности, используется для сбора статистики по каждому конкретному роботу в отдельности

Чтобы пояснить принципы использования некоторых параметров файлов настроек, рассмотрим блок-схемы (см. рисунок 2) обобщённых алгоритмов, используемых в модуле. Но сначала стоит упомянуть тот факт, что мы используем python-модуль SimPy [4, 5], который является библиотекой классов для построения моделей, основанных на дискретных событиях, или на так называемом «событийном подходе» [6]. Применение данной библиотеки позволяет организовать квазипараллельное выполнение процессов. Таким образом, в модуле SimRobot.py «одновременно» может выполняться несколько процессов, что мы попытались отразить на блок-схемах, закрасив фон некоторых блоков в серый цвет. В частности, в серый цвет выкрашены три блока схемы А: процесс «изменения» информационного ресурса, процесс «обхода» роботом информационных

ресурсов, процесс сбора статистической информации. Обобщённые алгоритмы трёх названных блоков представлены блок-схемами Б, В, Г соответственно. В этих блок-схемах также есть блоки, которые помечены серым цветом. Принцип функционирования этих блоков основан на резервировании необходимого события в определённый момент на отрезке времени моделирования. В тот момент, когда текущее модельное время совпадает со временем зарезервированного события, происходит передача управления из главного цикла модуля в программный код, следующий за кодом, который ранее выполнил резервирование данного «специального» события.

Дадим пояснения к некоторым блокам на схеме А (см. рисунок 2):

- **Инициализация набора информационных ресурсов.** Исходная информация о моделируемых ресурсах хранится в таблице `pages`. Для описания одного ресурса и удобной последующей работе с ним в рамках модуля представлен класс `Page`. Таким образом, описываемый блок создаёт в памяти массив объектов типа `Page`, причём сразу присваивает свойствам каждого объекта нужные значения, беря их из соответствующих полей таблицы `pages`.
- **Инициализация набора «статистических» переменных.** В модуле имеется ассоциативный массив `simvarsdefault`, в котором описаны исходные (чаще всего нулевые) значения статистических переменных. Однако в главном цикле модуля используется только двойник этого массива `simvars` (элементы этого массива и являются т.н. «статистическими переменными»). А при каждой новой итерации главного цикла необходимо «сбрасывать» в исходное состояние значения элементов массива `simvars` (что мы и делаем копированием `simvarsdefault` в `simvars`). Также для некоторых статистических переменных созданы специальные классы (`Needfresh`, `Freshness`, `SumsizeRobs`, `Sumsize`), которые реализуют логику сбора соответствующих данных. Каждый из этих классов является потомком класса `Process` python-модуля `SimPy`, что позволяет реализовать статистические измерения в любые задаваемые моменты модельного времени. В модуле мы реализовали замер переменных с определённым шагом времени, а каждая статистическая переменная может иметь свой шаг измерения, который должен храниться в специальном ассоциативном массиве `statvarstime`.
- **Инициализация робота (-ов).** В модуле описан класс `Crawl` (наследник класса `Process` python-модуля `SimPy`), который имитирует поведение единичного робота. Таким образом, в момент «инициализации роботов» осуществляется создание одного или нескольких (согласно параметру `RobotQuantity`) объектов типа `Crawl` и «привязывание» каждому роботу своего маршрута согласно используемой (`RouteDBName`) таблице `robroute`.
- **Процесс «изменения» информационных ресурсов.** В модуле описан класс `Changes` (наследник класса `Process` python-модуля `SimPy`), который реализует наступление событий изменений для всех моделируемых ресурсов. Обобщённый алгоритм представлен схемой Б на рисунке 2.
- **Процесс «обхода» роботом информационных ресурсов.** Блок подразумевает функционирование объектов типа `Crawl`, обобщённый алго-

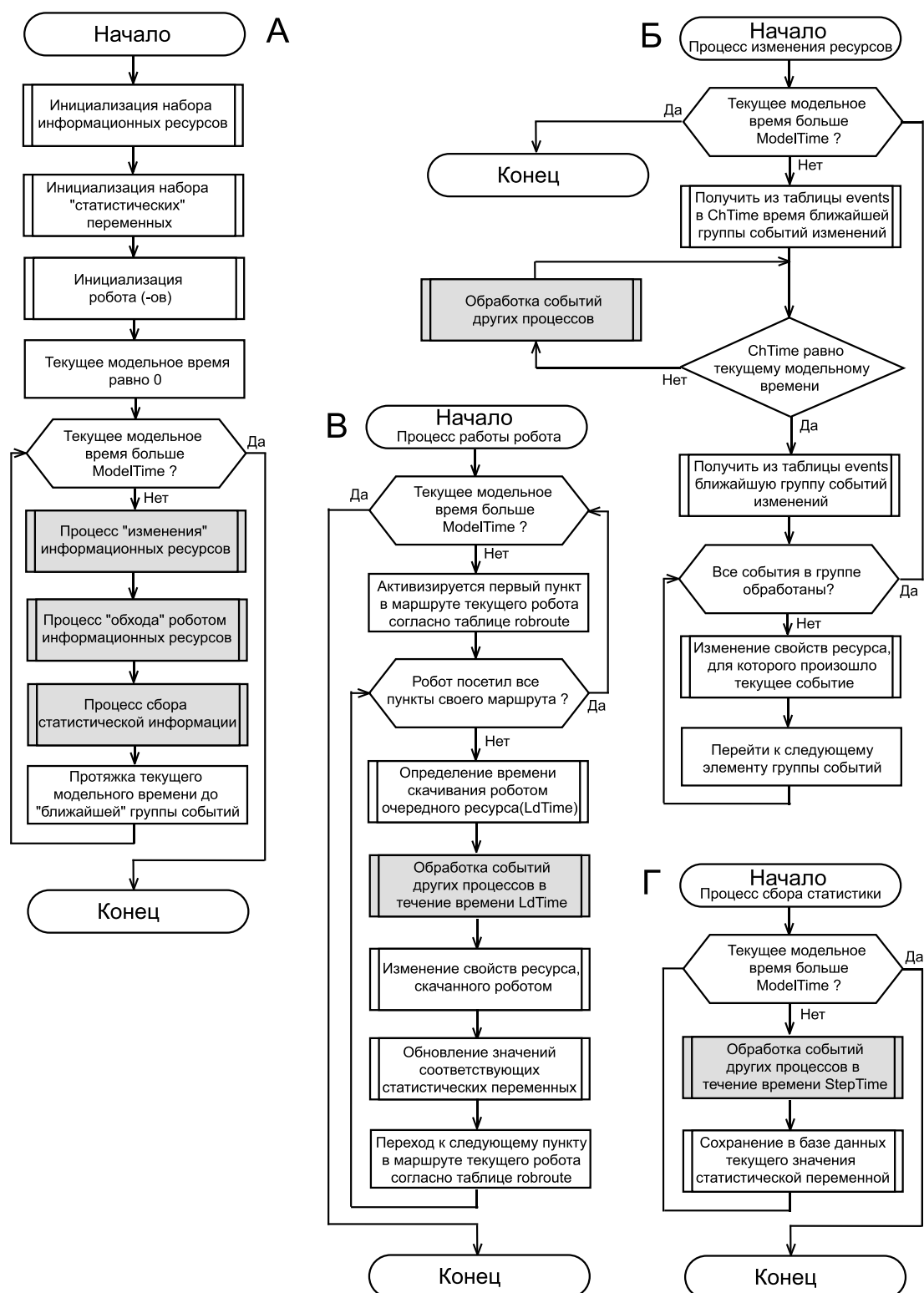


Рис. 2. Блок-схемы алгоритмов модуля SimRobot.py.

ритм которых представлен схемой В на рисунке 2.

- **Процесс сбора статистической информации.** Обобщённый алгоритм представлен схемой Г на рисунке 2. В рамках данного блока собирается статистика переменных, для которых есть соответствующие классы (см. блок инициализации статистических переменных).
- **Протяжка текущего модельного времени до «ближайшей» группы событий.** Осуществляется встроенной процедурой `simulate python`-модуля `SimPy`.

Теперь рассмотрим некоторые блоки на других оставшихся схемах рисунка 2. Начнём со схемы Б:

- **Получить из таблицы `events` в `ChTime` время ближайшей группы событий изменений.** В специальную переменную `ChTime` попадает результат SQL-запроса, который берёт первую запись среди упорядоченных по полю `etime` записей.
- **Обработка событий других процессов.** В языке `Python` имеется оператор `yield`, который позволяет «заморозить» исполнение программного кода процедуры, которая его содержит. Приведём фрагмент стандартной документации языка `Python`:

When a `yield` statement is executed, the state of the generator is frozen and the value of expression `_list` is returned to `next()`'s caller. By «frozen» we mean that all local state is retained, including the current bindings of local variables, the instruction pointer, and the internal evaluation stack: enough information is saved so that the next time `next()` is invoked, the function can proceed exactly as if the `yield` statement were just another external call.

При разработке всех классов, которые являются наследниками класса `Process`, нами использовался именно оператор `yield`. А все вызовы метода `next()` реализуются в рамках `python`-модуля `SimPy`.

- **Получить из таблицы `events` ближайшую группу событий изменений.** Выполняется SQL-запрос, на который возвращаются записи таблицы `events` с равными значениями поля `etime` и равными текущему модельному времени.
- **Изменение свойств ресурса, для которого произошло текущее событие.** Одна запись таблицы `events` описывает событие изменения одного информационного ресурса. В данном блоке происходит изменение свойств соответствующего объекта типа `Page` (который находится в памяти и доступен как элемент массива) на значения рассматриваемой записи из `events`.

Далее рассмотрим некоторые блоки схемы В:

- **Определение времени скачивания роботом очередного ресурса (`LdTime`).** Для выполнения данной операции мы используем генератор случайных чисел, равномерно распределённых в интервале $[MinPageLoadTime, MaxPageLoadTime]$. Полученный результат помещается в локальную переменную `LdTime`. Однако все эти действия вы-

полняются только в том случае, когда ресурс доступен для скачивания. Иначе время скачивания равно 0.

- **Обработка событий других процессов в течение времени LdTime.** Принцип действия блока подробно описан ранее, здесь же нужно добавить, что оператору `yield` передаётся в качестве параметра значение `LdTime`, которое используется для вычисления момента возвращения управления в данное место.
- **Изменение свойств ресурса, скачанного роботом.** Если у ресурса имелись изменения, которые неизвестны поисковой системе, то необходимо изменить соответствующие (`changed`, `crawled`) свойства ресурса (объект типа `Page`). Тем самым мы обозначим новое состояние ресурса и наблюдаемой среды.
- **Обновление значений соответствующих статистических переменных.** В данный момент изменяется значение переменных, которые характеризуют процесс скачивания ресурсов (`SumSizeRob`, `MinWaitCrawl`, `MaxWaitCrawl`, `AvrWaitCrawl`, `Cycles`).

А закончим рассмотрение блоками схемы Г:

- **Обработка событий других процессов в течение времени StepTime.** В качестве длительности промежутка «бездействия» используется значение `StepTime`, которое берётся из `statvarstime` для каждой статистической переменной соответственно.
- **Сохранение в базе данных текущего значения статистической переменной.** Блок выполняет два действия. Во-первых, происходит замер текущего значения соответствующей переменной (для некоторых переменных необходимы специальные вычисления). Во-вторых, осуществляется специальный SQL-запрос вставки новой записи в таблицу, которая соответствует (`ReportStatVars`, `OtherReportStatVars`) измеряемой переменной.

Приведём полный список имеющихся в модуле статистических переменных, давая необходимые пояснения:

- **SumSizeRob** - в переменной суммируется текущая длина (в байтах) ресурсов, которые скачивает робот. У каждого робота имеется «своя» такая переменная, значение которой каждые 10000 единиц модельного времени помещается в таблицу `sumsizeroBJ` базы `testR_M` (где `J` - номер робота).
- **MinWaitCrawl** - минимальное время, которое прошло с момента наступления события изменения ресурса до события завершения скачивания изменившегося ресурса роботом. Определяется на основе всего массива ресурсов посещаемых данным роботом.
- **MaxWaitCrawl** - максимальное время, которое прошло с момента наступления события изменения ресурса до события завершения скачивания изменившегося ресурса роботом. Определяется на основе всего массива ресурсов, посещаемых данным роботом.
- **AvrWaitCrawl** - время ожидания «обновления» суммируется для каждого посещённого ресурса и делится на количество посещённых за модельное время ресурсов. У каждого робота имеется «своя» такая переменная.
- **Cycles** считает сделанные каждым роботом циклы обхода отведённых ему

ресурсов.

- **NeedFresh** хранит количество ресурсов, которые изменили своё состояние (т.е. изменились) и которые необходимо посетить роботу, чтобы обновить имеющуюся информацию. Каждые 5000 единиц модельного времени значение переменной помещается в таблицу needfresh базы testR_M.
- **Freshness** вычисляет значение свежести индекса поисковой системы на основе значения переменной NeedFresh (см. формулу в [1]). Каждые 5000 единиц модельного времени значение переменной помещается в таблицу freshness базы testR_M.
- **SumSize** вычисляет общий объём скачанной всеми роботами информации. Каждые 10000 единиц модельного времени значение переменной помещается в таблицу sumsize базы testR_M.

При каждом запуске модуля SimRobot.py в файл главного журнала («лог» выполнения модуля) попадает новая порция следующей информации:

- дата и время начала работы модуля;
- версия используемого модуля SimRobot.py;
- полный путь к файлу и само имя файла используемых настроек набора;
- счётчик итераций;
- используемое смещение генератора случайных чисел;
- используемое количество роботов;
- сообщения о завершении цикла каждым роботом отдельно (с выводом текущего модельного времени);
- блок-статистики отдельно для каждого робота:
 - * Cycles;
 - * MinWaitCrawl;
 - * MaxWaitCrawl;
 - * AvrWaitCrawl;
 - * SumSizeRob;
- выводится общее для всех роботов значение SumSize;
- дата и время завершения работы модуля.

6. Модуль SimRobotM.py

Одним из направлений развития концепции «роботов» стала стратегия «модифицированных роботов» (устоявшегося названия нами не найдено, и, чтобы хоть как-то различать «роботов», вводим своё название), т.е. роботов, которые за счёт использования некоторых стандартных средств HTTP-протокола (запрос HEAD, поле If-Modified-Since) обходятся без периодического тотального скачивания всех ресурсов к себе и тем самым снижают свою нагрузку на наблюдаемую среду. Наше исследование было бы скучным без учёта этой, всеми признанной, стратегии (многие крупные поисковые системы, такие как Google, пользуются роботами именно этой модификации). Поэтому нами был разработан модуль моделирования работы системы в случае стратегии «мобильных роботов». За основу модуля SimRobotM.py был взят код модуля SimRobot.py. Изменения коснулись только класса Crawl. В силу этого мы не будем приво-

дить подробное описание модуля SimRobotM.py, а ограничимся только лишь описанием сделанных изменений.

По традиции начнём описание модуля с его файлов настройки. Для модуля SimRobotM.py один из файлов настройки (testR.ini) приобрёл два новых параметра (см. таблицу 8), всё остальное осталось без изменений.

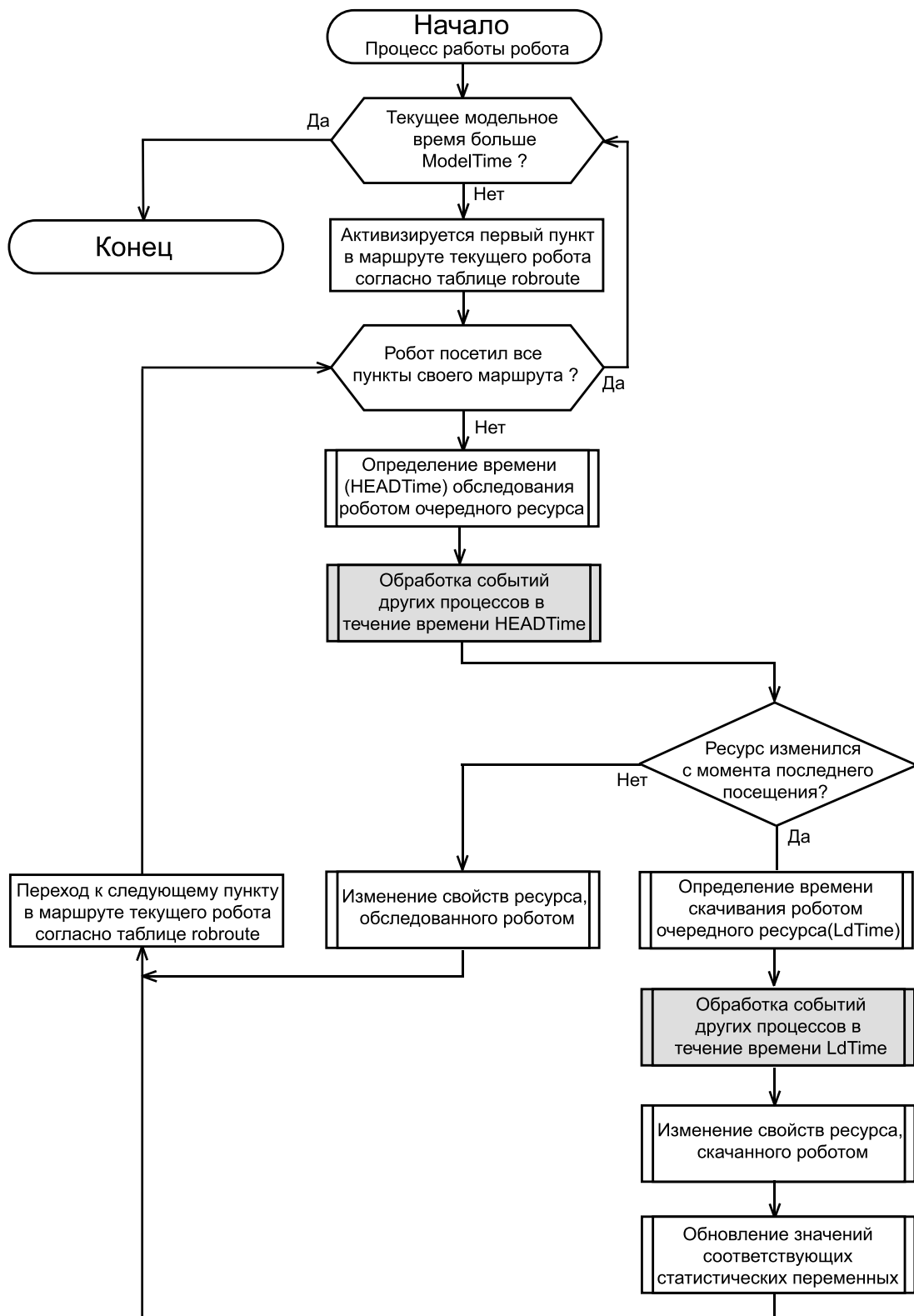
Таблица 8. Файл testR.ini для модуля SimRobotM.py (сокращённая версия).

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[robotOptions]	MinHEADTime	1	Минимально возможное время для обследования одного информационного ресурса с помощью «специального» запроса (сюда входит время отправки запроса и время получения ответа)
	MaxHEADTime	3	Максимально возможное время для обследования одного информационного ресурса с помощью «специального» запроса (сюда входит время отправки запроса и время получения ответа)

Изменения, коснувшиеся класса Crawl, отображены на блок-схеме рисунка 3. Дадим пояснения к некоторым блокам:

- **Определение времени (HEADTime) обследования роботом очередного ресурса.** Для выполнения данной операции мы используем генератор случайных чисел, равномерно распределённых в интервале $[MinHEADTime, MaxHEADTime]$. Полученный результат помещается в локальную переменную HEADTime.
- **Обработка событий других процессов в течение времени HEADTime.** Принцип действия подобных блоков подробно описан ранее, здесь же нужно добавить, что оператору yield передаётся в качестве параметра значение HEADTime, которое используется для вычисления момента возвращения управления в данное место.
- **Изменение свойств ресурса, обследованного роботом.** Каждый ресурс (объект типа Page) имеет логический ключ-свойство «crawled» («посещён»), вот его-то и нужно перевести в состояние True. Через это свойство в последствии вычисляется статистическая переменная NeedFresh.

Список статистических переменных и сообщений в главном журнале («логе») выполнения модуля SimRobotM.py абсолютно идентичен имеющимся в модуле SimRobot.py, поэтому особо останавливаться на них мы не будем, а перейдём к рассмотрению следующего модуля.

Рис. 3. Блок-схема алгоритма метода `life` класса `Crawl` модуля `SimRobotM.py`.

7. Модуль SimSensor.py

Данный модуль позволяет осуществлять имитацию функционирования системы мониторинга, которая построена с использованием концепции «сенсоров». Использование модуля во многом похоже на использование ранее описанных модулей SimRobot.py и SimRobotM.py. Каждый вызов на исполнение данного модуля по отношению к наборам одной и той же серии осуществляет один эксперимент, а вся информация, которая касается одного эксперимента, помещается в директорию с именем «testR» (где R номер эксперимента). Также модулю для работы необходимо указать два параметра: во-первых, название директории («testR»), а во-вторых, имя файла с настройками используемого набора ресурсов («serN-M.ini»). Для имитации системы на всех наборах серии необходимо выполнить модуль SimSensor.py ровно M раз, т.е. столько раз, сколько наборов в серии. Все вызовы модуля собраны в один пакетный файл (run.bat). Как и договорились ранее, все файлы с настройками эксперимента хранятся в поддиректории «ini». Каждый эксперимент имеет общий файл настроек (хранимый, например, в файле с именем «testR.ini», где R - номер эксперимента). Приведём содержимое общего файла настройки эксперимента и файла настройки набора, которые используются модулем SimSensor.py.

Таблица 9. Файл testR.ini для модуля SimSensor.py.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[simOptions]	ModelTime		Моделируемое время, единиц
	Iterations	1	Количество итераций, единиц
[pageOptions]	PageCount		Количество моделируемых информационных ресурсов, единиц
	MinPageLoadTime	1	Минимально возможное время «скачивания» одного информационного ресурса
	MaxPageLoadTime	40	Максимально возможное время «скачивания» одного информационного ресурса
[sensorOptions]	MinSendAlertTime	1	Минимальная продолжительность времени между «отправкой» сенсором и получения системой мониторинга уведомления о найденном изменении в состоянии ресурса
	MaxSendAlertTime	3	Максимальная продолжительность времени между «отправкой» сенсором и получения системой мониторинга уведомления о найденном изменении в состоянии ресурса
[logOptions]	LogDirectory	logs\\	Директория для размещения соответствующих данному этапу журналов («логов»)

Таблица 9. Файл testR.ini для модуля SimSensor.py(продолжение)

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
	LogFileName	testlog.txt	Имя файла главного журнала событий
	LogTraceToFile	1	Логический ключ (1 - True / 0 - False), который отвечает за включение протоколирования действий при выполнении данного модуля

Таблица 10. Файл serN-M.ini для модуля SimSensor.py.

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[testOptions]	CommonIni	testR.ini	Ссылка на файл общих настроек для текущего эксперимента
[simOptions]	RandomSeed		Смещение генератора случайных чисел (integer)
[dbOptions]	MainDBName	serN_M	Имя базы данных, в которой хранится необходимый набор
	StatDBName	testR_M	Имя базы данных, в которой будут сохраняться значения наблюдаемых величин(ReportStatVars)
[reportOptions]	ReportDirectory	M\\	Директория для размещения соответствующих данному набору статистических данных, которые будут собраны в ходе эксперимента. Буква М совпадает с номером обрабатываемого набора
	ReportStatVars	needfresh, freshness, sumsize, nowprocessing	Имена переменных, для которых в процессе имитации идёт сбор общей «статистики». Значения данного параметра используются при создании соответствующих таблиц базы данных и файлов отчётов

Как можно заметить, различие файлов настроек для SimRobot.py и для SimSensor.py минимально. Исчезли параметры, специфичные для концепции «роботов» (RobotQuantity, StepLogCycles, RouteDBName, OtherReportStatVars), и появились параметры, специфичные для концепции «сенсоров» (MinSendAlertTime, MaxSendAlertTime, ReportStatVars{«nowprocessing»}). Чтобы пояснить принципы использования новых параметров файлов настроек, рассмотрим блок-схемы (см. рисунок 4) обобщённых алгоритмов, используемых в модуле SimSensor.py. Заранее следует оговорить, что последующее упоминание термина «робот» связано с изменением его смысла. Далее нужно иметь в виду то, что в контексте

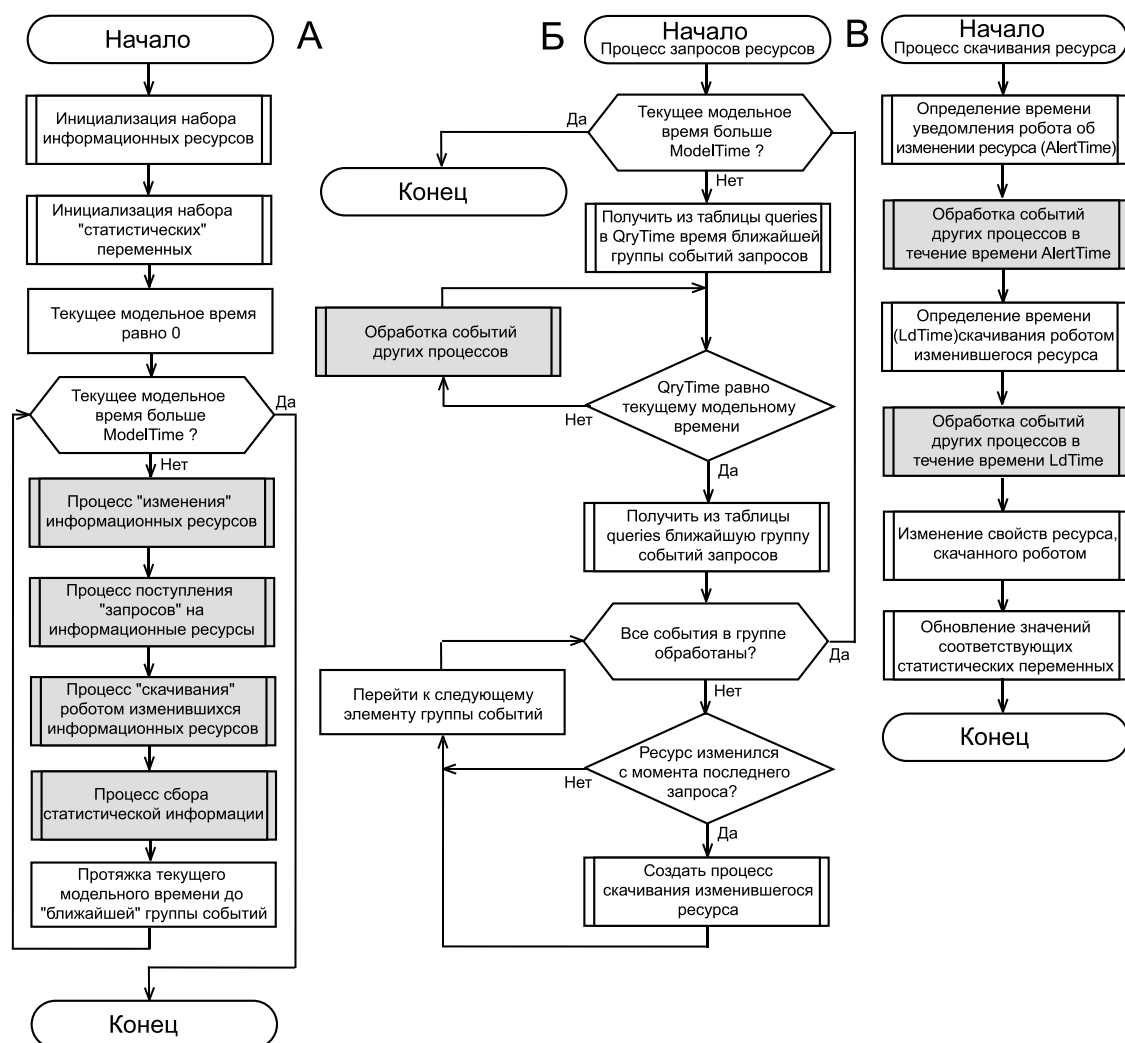


Рис. 4. Блок-схемы алгоритмов модуля SimSensor.py.

концепции «сенсоров» робот сильно «видоизменился». Наиболее заметными изменениями являются потеря роботом функции циклического обхода ресурсов и приобретение функции «ожидания вызова».

Дадим пояснения к некоторым блокам на схеме А (см. рисунок 4), опуская описание блоков, которые повторяют блоки модуля SimRobot.py:

- **Процесс поступления «запросов» на информационные ресурсы.** В модуле описан класс Queries (наследник класса Process python-модуля SimPy), реализующий наступление событий, которые мы условно называем «запросами информационных ресурсов». Обобщённый алгоритм представлен схемой Б на рисунке 4.
- **Процесс «скачивания» роботом изменившихся информационных ресурсов.** Блок подразумевает функционирование объектов типа Crawl, обобщённый алгоритм которых представлен схемой В на рисунке 4. Стоит отметить, что объекты класса Crawl модуля SimSensor.py заметно отличаются от объектов класса Crawl модуля SimRobot.py. Например, объек-

ты класса `Crawl` теперь создаются только в процессе функционирования класса `Queries` (точнее, при обнаружении изменившегося ресурса), а уничтожаются сразу же после завершения «скачивания» ресурса.

- **Процесс сбора статистической информации.** Принципы функционирования данного блока подробно описаны для модуля `SimRobot.py`, а здесь следует добавить, что для данного модуля немного изменился список статистических переменных (мы приведём его позже).

Теперь рассмотрим некоторые блоки на других оставшихся схемах рисунка 4. Начнём со схемы Б:

- **Получить из таблицы `queries` в `QryTime` время ближайшей группы событий запросов.** В специальную переменную `QryTime` попадает результат SQL-запроса, который берёт первую запись среди упорядоченных по полю `qtime` записей.
- **Получить из таблицы `queries` ближайшую группу событий запросов.** Выполняется SQL-запрос, на который возвращаются записи таблицы `queries` с равными значениями поля `qtime` и равными текущему модельному времени.
- **Создать процесс скачивания изменившегося ресурса.** Создаётся объект типа `Crawl`, которому как параметр передаётся номер требуемого информационного ресурса. Далее вызывается процедура `activate python-` модуля `SimPy`, которая включает вновь созданный объект в главный цикл моделирования, а именно планирует все события, связанные с объектом. На этом шаге процесс поступления «запросов» продолжает функционировать дальше и запущенный процесс скачивания уже никоим образом с ним не взаимодействует.

Далее рассмотрим некоторые блоки схемы В:

- **Определение времени уведомления робота об изменении ресурса (`AlertTime`).** Для выполнения данной операции мы используем генератор случайных чисел, равномерно распределённых в интервале $[MinSendAlertTime, MaxSendAlertTime]$. Полученный результат помещается в локальную переменную `AlertTime`.
- **Обработка событий других процессов в течение времени `AlertTime`.** Ранее мы уже описывали аналогичные блоки, здесь же нужно добавить то, что оператору `yield` передаётся в качестве параметра значение `AlertTime`, которое используется для вычисления момента возвращения управления в данное место.
- **Определение времени (`LdTime`) скачивания роботом изменившегося ресурса.** Для выполнения данной операции мы используем генератор случайных чисел, равномерно распределённых в интервале $[MinPageLoadTime, MaxPageLoadTime]$. Полученный результат помещается в локальную переменную `LdTime`. Однако все эти действия выполняются только в том случае, когда ресурс доступен для скачивания. Иначе время скачивания равно 0.
- **Обработка событий других процессов в течение времени `LdTime`.** Здесь оператору `yield` передаётся в качестве параметра значение `LdTime`,

которое используется для вычисления момента возвращения управления в данное место.

- **Изменение свойств ресурса, скачанного роботом.** Блок меняет значения соответствующих (changed, crawled) свойств ресурса (объект типа Page) с тем, чтобы обозначить новое состояние ресурса и наблюдаемой среды. Если за время скачивания произошло ещё одно изменение, то оно останется неизвестно системе вплоть до нового «внешнего» запроса. Однако, если изменение произошло в период передачи уведомления и до начала скачивания ресурса, то изменение станет известно.
- **Обновление значений соответствующих статистических переменных.** В данный момент изменяется значение переменных, которые характеризуют процесс скачивания ресурсов (SumSize, MinWaitCrawl, MaxWaitCrawl, AvrWaitCrawl, MaxProcessing, NowProcessing).

Приведём полный список имеющихся в модуле статистических переменных, давая необходимые пояснения:

- MinWaitCrawl - минимальное время, которое прошло с момента наступления события изменения ресурса до события завершения скачивания изменившегося ресурса роботом. Определяется на основе всего массива ресурсов, когда-либо скачанных роботом.
- MaxWaitCrawl - максимальное время, которое прошло с момента наступления события изменения ресурса до события завершения скачивания изменившегося ресурса роботом. Определяется на основе всего массива ресурсов, когда-либо скачанных роботом.
- AvrWaitCrawl суммирует время ожидания «обновления» для каждого скачанного ресурса и делится на общее количество скачанных за модельное время ресурсов;
- NowProcessing хранит количество закачиваемых роботом ресурсов в данный момент модельного времени. Является нашей попыткой оценить нагрузку на систему мониторинга в варианте концепции «сенсоров». Каждые 5000 единиц модельного времени значение переменной помещается в таблицу nowprocessing базы testR_M.
- MaxProcessing хранит максимальное количество ресурсов, одновременно закачиваемых роботом за всё время моделирования.
- NeedFresh хранит количество ресурсов, которые изменили своё состояние (т.е. изменились) и которые необходимо посетить роботу, чтобы обновить имеющуюся информацию. Каждые 5000 единиц модельного времени значение переменной помещается в таблицу needfresh базы testR_M.
- Freshness - вычисляется значение свежести индекса поисковой системы на основе значения переменной NeedFresh (см. формулу в [1]). Каждые 5000 единиц модельного времени значение переменной помещается в таблицу freshness базы testR_M.
- SumSize вычисляет общий объём скачанной роботом системы мониторинга информации. Каждые 10000 единиц модельного времени значение переменной помещается в таблицу sumsize базы testR_M.

При каждом запуске модуля SimSensor.py в файл главного журнала («лог»

выполнения модуля) попадает новая порция следующей информации:

- дата и время начала работы модуля;
- версия используемого модуля `SimSensor.py`;
- полный путь к файлу и само имя файла используемых настроек набора;
- счётчик итераций;
- используемое смещение генератора случайных чисел;
- блок статистики:
 - * `NowProcessing` содержит количество скачиваемых ресурсов на момент окончания цикла моделирования;
 - * `MaxProcessing`;
 - * `MinWaitCrawl`;
 - * `MaxWaitCrawl`;
 - * `AvrWaitCrawl`;
 - * `SumSize`;
- дата и время завершения работы модуля.

8. Модуль `SimReport.py`

Основная задача данного модуля заключается в извлечении статистики, которая была накоплена в результате функционирования модулей `SimRobot.py`, `SimRobotM.py`, `SimSensor.py`. Извлечение происходит для каждого набора информационных ресурсов отдельно, т.к. модулю для работы необходимо указать два параметра: во-первых, название директории («testR»), а во-вторых, имя файла с настройками используемого набора ресурсов («serN-M.ini»). Поэтому для извлечения статистики для всей серии необходимо выполнить модуль `SimReport.py` ровно M раз, т.е. столько раз, сколько наборов в серии. Все эти вызовы модуля можно собрать в один пакетный файл (мы создали файл `report.bat` и поместили все команды в него). В дальнейшем для извлечения всей статистики необходимо вызвать на выполнение только этот пакетный файл.

Файлы настроек «serN-M.ini» уже описаны ранее при описании модулей `SimRobot.py` и `SimSensor.py`, поэтому ограничимся только указанием используемых параметров. Во-первых, это параметр `StatDBName` секции `[dbOptions]`. Во-вторых, это параметры `ReportDirectory`, `ReportStatVars`, `OtherReportStatVars` секции `[reportOptions]`. Также в работе модуля используются два параметра файла `common.ini`, а именно `ReportFileExtension` и `ReportValuesDelimiter`.

Таким образом, основной цикл модуля осуществляется по значениям параметров `ReportStatVars` + `OtherReportStatVars` (если есть), и на каждом шаге цикла выполняется SQL-запрос (например, на первом шаге может быть запрос: «select * from needfresh1 order by sid») к соответствующей текущему параметру таблице. Корень имени таблицы совпадает с именем параметра, а в окончании имени добавляется цифра, которая означает номер итерации. Результаты запроса построчно записываются в файл (именуемый как «имя параметра» + `ReportFileExtension`), причём значения разных столбцов (всего два столбца: время замера значения и само значение) в файле разделены значением параметра `ReportValuesDelimiter`. Для обработки каждого параметра создаётся объект

Таблица 11. Пример фрагмента таблицы с объединёнными данными для переменной *freshness*.

0	100	100	100	100	100	100	100	100	100
5000	99,9	99,6	99,1	99,9	99,6	99,2	99,9	99,6	99,2
10000	99,8	99,2	98,3	99,8	99,1	98,3	99,8	99,1	98,3
15000	99,7	98,7	97,4	99,8	98,7	97,4	99,8	98,7	97,5
30000	99,7	98,3	96,6	99,7	98,3	96,6	99,7	98,3	96,6

класса *Report*. Класс *Report* описан в рассматриваемом модуле и предоставляет единообразный стиль работы с таблицами статистики и файлами отчётов.

При каждом запуске модуля *SimReport.py* в файл главного журнала выполнения модуля попадает новая порция следующей информации:

- дата и время начала работы модуля;
- версия используемого модуля *SimReport.py*;
- полный путь к файлу и само имя файла используемых настроек набора;
- количество созданных файлов отчётов;
- дата и время завершения работы модуля.

9. Модуль *SimMergeReports.py*

CSV-файлы, которые получаются в результате работы модуля *SimReport.py*, удобно использовать, только когда необходимо проанализировать результаты одного прогона (имитация одной стратегии на одном наборе). Однако естественным желанием стало создание графиков, на которых можно было бы одновременно отображать результаты нескольких прогонов. Используемые нами программы, такие как Microsoft Excel, StatSoft STATISTICA, требуют дополнительных усилий по объединению данных (например, в рамках одной таблицы) с целью последующего удобного построения «Multiple» (термин взят из STATISTICA) графиков. Таким образом, в качестве результата объединения нам необходимо получить таблицу (файл формата csv), в которой первый столбец будет содержать время замера и который останется общим, а в остальные столбцы попадут результаты замеров. Пример необходимого результата можно увидеть в таблице 9.

Ручное объединение необходимых данных занимает много времени и сил, поэтому был разработан модуль *SimMergeReports.py*, который, получая на входе два параметра (имя директории и имя файла настройки), выдаёт в результате файл в формате csv, аналогичный по структуре таблице 9. Так как до сих пор нам было необходимо объединять результаты только в рамках одного эксперимента, то и файл настроек мы решили хранить в ini-директории эксперимента («testR»). Структура файла настройки представлена в таблице 12.

Таблица 12. Файл merge.ini (M - количество объединяемых наборов).

Секция	Параметр	Рекомендуемое значение	Описание
[simOptions]	Iterations	1	Количество итераций, единиц
[dbOptions]	DBName1	testR_1	Имя базы данных, содержащей статистические результаты, полученные в эксперименте R по одному из наборов. Получает номер 1
	...	...	...
	DBNameM	testR_M	Имя базы данных, содержащей статистические результаты, полученные в эксперименте R по одному из наборов. Получает номер M
[logOptions]	LogDirectory	logs\	Директория для размещения соответствующих данному этапу журналов («логов»)
	LogFileName	merge.txt	Имя файла главного журнала событий
	LogTraceToFile	1	Логический ключ (1 - True / 0 - False), который отвечает за включение протоколирования действий при выполнении данного модуля
[reportOptions]	ReportsCount	M	Общее количество наборов, статистические результаты которых будут объединены в единые файлы
	ReportStatVars	needfresh, freshness, sumsize	Имена переменных, накопленные данные которых необходимо «объединить»
[outOptions]	outDirectory	res\	Директория, в которую будет осуществлён вывод файлов с объединёнными данными
	outFileExtension	.csv	Расширение файлов с объединёнными данными
	outValuesDelimiter	;	Разделитель значений в файле

Алгоритм работы модуля становится очевидным после изучения файла настроек. Остаётся пояснить несколько моментов:

- для объединения нескольких значений полей из разных таблиц используется sql-конструкция «LEFT JOIN»;
- директория «res\» является поддиректорией директории эксперимента;
- в рамках одной статистической переменной объединяемые данные из разных наборов должны иметь одинаковые времена измерения;
- объединяемые таблицы могут принадлежать к различным экспериментам, но в нашей работе мы пока не пользовались данной возможностью;
- вся работа модуля осуществляется средствами объектов класса Report.

При каждом запуске модуля SimMergeReports.py в файл журнала выполне-

ния модуля попадает новая порция следующей информации:

- дата и время начала работы модуля;
- версия используемого модуля `SimMergeReports.py`;
- полный путь к файлу и само имя файла используемых настроек;
- количество созданных файлов отчётов;
- дата и время завершения работы модуля.

10. Замечания по использованию комплекса

Использование пакетных файлов в работе комплекса позволяет организовать непрерывный процесс вычислений и тем самым уменьшить простой вычислительной техники. Однако предварительные эксперименты показали, что использование одного компьютера, пусть даже очень мощного на данный момент (Pentium 4, 512Mb, 60Gb HDD), сильно затягивает во времени реализацию даже самого простого плана экспериментов. В связи с этим возникло желание воспользоваться мощностью вычислительного кластера. Однако задача адаптации нашего комплекса для использования в кластере видится как очень трудоемкая, так как требует пересмотра всех основных принципов функционирования уже созданного кода. Под адаптацией мы имеем в виду переход на использование специализированных библиотек, которые позволяют реализовать распределённые вычисления (например MPI). В силу многих объективных причин мы решили отложить работы по адаптации комплекса под кластер на будущее, но отказываться от идеи задействовать в вычислениях многим больше одного компьютера мы не решились. Летний период отпусков и студенческих каникул позволил нам надеяться на возможность использования обыкновенного учебного компьютерного класса.

Однако на этом пути встают некоторые ограничения:

- как правило, в классах используется не особо производительная вычислительная техника с ограниченными ресурсами;
- правила техники безопасности запрещают оставлять класс без присмотра. Это требование означает, что один исследователь должен присутствовать во время работы класса и вариант «оставить считать на ночь» исключён.

Первое ограничение особенно касается скорости взаимодействия с жёсткими дисками, так как основная работа комплекса заключается во взаимодействии (много запросов к базам данных) с устройствами этого вида. При разработке нашего комплекса мы учли этот нюанс и постарались минимизировать работу с дисками за счёт переноса некоторых данных в ОЗУ. Однако из-за большого объёма (сотни мегабайт) данных перенос не коснулся таблиц `events` и `queries`. В данной статье описан комплекс уже с учётом данных изменений.

Второе ограничение является более серьёзным, так как не позволяет осуществлять имитацию большого количества информационных ресурсов (например порядка нескольких десятков миллионов) и тем более осуществлять работу комплекса в автономном режиме. Для преодоления данного ограничения можно было бы воспользоваться методологией сериализации (`serialize`), которая позволила бы, во-первых, останавливать работу модулей с сохранением текущего со-

стояния всех переменных, а во-вторых, возобновлять работу с восстановлением ранее сохранённого состояния. Однако в используемой библиотеке SimPy стандартных средств осуществления сериализации состояния модельной среды нет. А самостоятельная разработка таких средств (ввиду их сложности) рассматривается нами только в перспективе проведения крупномасштабных исследований и поэтому на данном этапе нам не доступна.

Заключение

В статье представлены результаты очередного этапа работ по исследованию концепций мониторинга информационного поля Интернет, а точнее, описан программный комплекс имитационного моделирования SimCOSAR (SIMulation COnccepts Sensors And Robots). В ходе пробных экспериментов были выявлены сложности в использовании комплекса (описаны в предыдущем параграфе), некоторую часть мы постарались учесть при разработке, а часть сложностей находят своё отражение в создаваемом плане проведения экспериментального исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Земсков И.А. *Имитационное исследование концепций сбора информации для индексов поисковых систем* // Математические структуры и моделирование, 2002. Вып.10. С. 172-191
2. Р. Шеннон. *Имитационное моделирование систем - искусство и наука*. М.: Мир, 1978.
3. The Eleventh International World Wide Web Conference. – <http://www2002.org/>
4. SimPy: A Python-based simulation package.
– <http://sourceforge.net/projects/simpy/>
5. Python home page. – <http://www.python.org/>
6. Марков А.А. *Моделирование информационно-вычислительных процессов*. Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД К ОБРАЗОВАНИЮ: РЕАЛИЗАЦИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ В ТРАДИЦИОННЫХ И НОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

И.М. Зырянова, Г.Б. Тодер

The complex approach to education are realized at the Chair of Physics and Chemistry of The Omsk State Railway University on the base of relations between subjects (physics with chemistry and others). The results of two years direct work with a check student's group are presented.

В течение последних лет на кафедре физики и химии Омского государственного университета путей сообщения (ОмГУПС) авторами работы реализуется комплексный подход к постановке и решению проблем, связанных с управлением процессом обучения. Подход осуществляется на основе системной разработки и внедрения в учебный процесс технологий обучения, реализующих раскрытие и использование межпредметных связей [1] (в том числе: химии и физики; физики и математики; химии и экологии; физики и теплотехники; химии, физики и различных специальных дисциплин) с одновременной компьютеризацией учебного процесса.

В частности, преподавание химии и физики в области структуры атома, электрохимических процессов, термодинамики, кинетики взаимосвязано. Разрабатываются учебные пособия межпредметного содержания [2, 3], проводятся дополнительные курсы (неравновесная термодинамика физических и химических процессов), на практических занятиях и олимпиадах предлагаются межпредметные задачи [4].

В течение двух лет эффективно используется обучающе-контролирующая программа межпредметного содержания «Строение атома и периодическая система элементов» [5, 6], включающая базовые знания по физике и по химии по данной теме.

Такой подход к образовательному процессу, опирающийся на межпредметные связи, получил название экологического [1, 7]. Для него характерны в частности:

- направленность на выработку умения анализировать любое явление с различных сторон;

© 2003 И.М. Зырянова, Г.Б. Тодер

E-mail: toder@ngs.ru

Омский государственный университет путей сообщения

- ориентированность на поиск общих свойств различных явлений и связей между ними;
- построение моделей реальных процессов, учитывающих в качестве параметров множество факторов различной природы;
- воспитание экологического мышления, учитывающего не только ближайшие перспективы, но и долговременные последствия любого вида деятельности.

Динамика осознанности межпредметных связей «физика–химия» наблюдалась в течение двух лет для основной исследуемой группы студентов ТЭФ ОмГУПС из 29 чел. Были классифицированы признаки проявления качества «осознанность» [8]:

1. Узнавание межпредметных среди представленных связей без пояснения механизма их возникновения.
2. Рассказ о существенных признаках объектов изучения с применением терминов одного предмета и использованием межпредметных связей как второстепенного дополнительного материала.
3. Выделение межпредметных связей понятий и т. п. из учебной информации об объекте.
4. Соотношение предложенного перечня межпредметных учебных элементов и связей с сущностью изучаемых явлений.
5. Понимание и выделение в перечне межпредметных связей определенных логических оснований.
6. Демонстрация единой (межпредметной) точки зрения на учебную проблему, объект изучения и т. п.
7. Качественная интерпретация формул и зависимостей, отражающих межпредметные связи.
8. Выявление существенных признаков изучаемого объекта с применением межпредметных понятий.
9. Аргументация своих высказываний, суждений с помощью привлечения примеров явлений, изучаемых разными предметами.
10. Самостоятельное выявление и классификация с точки зрения межпредметных связей.
11. Выявление существенных свойств изучаемого объекта с использованием предметных закономерностей и теорий.
12. Прогнозирование возможных изменений развития изучаемого объекта на языке межнаучных теорий.

Были выделены пять «контрольных точек».

На начало обучения (контрольная точка I) 8 из 29 человек (27,6 %) не осознавали межпредметные связи физика–химия вообще («нулевой» уровень); 11 (37,9 %) имели 1-2 (самые низкие) уровни; 10 (34,5 %) имели 3-5 уровни осознанности.

В течение I семестра происходит постепенное повышение уровня осознанности межпредметных связей за счет адаптации к учебному процессу в вузе. Поэтому к концу I семестра (контрольная точка II, прослушаны раздел физики

«Механика» и курс химии) уровень осознанности межпредметных связей плавно увеличивается: 5 (17,2 %) студентов не осознавали межпредметные связи; 7 (24,1 %) имели 1-2 уровень, 10 (34,5 %) — 3-5 уровни; 7 (24,1 %) — 6-7 уровни.

Резкий скачок осознанности межпредметных связей физика–химия был стимулирован проведением первой межпредметной олимпиады по химии–физике [4] и разбором олимпиадных задач. На начало II семестра (контрольная точка III) количество студентов, имевших 0 и 1-2 уровни, соответственно 5 (17,2 %) и 6 (20,7 %), практически не изменилось: никто из них не принимал участия в олимпиаде и в анализе задач. Уровень остальных студентов — участников олимпиады существенно вырос: 3-5 уровень имели 6 (20,7 %) человек; 6-7 — 8 (27,6 %); 9 (высокий уровень) — 4 (13,7 %).

К концу III семестра (контрольная точка IV) были прослушаны разделы физики «Электричество и магнетизм», «Колебания и волны», «Оптика», «Элементы квантовой физики и физики атома». При изучении последней темы регулярно прослеживались связи с химией, а в конце семестра была проведена в качестве дополнительного обучения работа с программой «Строение атома и периодическая система элементов»). Оказалось, что даже самые пассивные и слабые студенты (из числа посещавших занятия) — 6 (20,7 %) человек — хотя бы на самом низком уровне (1-2) осознают связи между физикой и химией. Для таких студентов данный показатель просто отражает повышение уровня мышления в целом и не связан с упором на исследуемый аспект. Большинство же студентов имело средний и высокий уровни осознанности: 3-5 уровни — 6 (20,7 %) человек; 6-7 — 2 (6,9 %); 8-10 — 13 (44,8 %); наконец, 2 (6,9 %) человека сознательно и регулярно апеллировали в своих объяснениях, ответах, решениях стандартных и нестандартных задач к единой точке зрения на физику и химию, отвечающей 11 уровню.

Контрольная точка V — конец IV семестра (прослушан полный курс физики, включая термодинамику, основы статистической физики и физики твердого тела (с теоретическим, несвойственным для инженерного образования подходом к явлениям), курс теплотехники — специальной дисциплины, непосредственно базирующейся на физике). Студенты данной группы, уже научившиеся вырабатывать общие подходы к предметам, понимали структуру всего учебного процесса, легко находили межпредметные связи и не ощущали разрыва между специальными дисциплинами и общетеоретическими курсами. Следовательно, возросла и мотивированность изучения базовых предметов, в частности сложных разделов физики. Этим объясняется высокий показатель уровня осознанности исследуемых межпредметных связей в данной контрольной точке: 1-2 уровень имели — 5 (17,2 %) студентов группы; 3-5 — 7 (24,1 %); 6-7 — 17 (68,6 %), в том числе самый высокий 12 — 13 (44,8 %).

Таким образом, осуществление проблемно-контекстного подхода на основе реализации межпредметных связей явилось мощным фактором повышения эффективности обучения.

Подчеркнем, что в других студенческих группах, даже более сильных, уровень осознанности связей, умение находить связи между разными явлениями оказались значительно ниже. Стоит отметить, что уже шесть студентов из кон-

трольной группы начали к середине IV семестра заниматься самостоятельной познавательной и научной деятельностью, связанной с пересечением различных областей знания: физика твердого тела — тепловые свойства твердых тел — теплоэнергетика; теплоэнергетика — математическое моделирование тепловых процессов; неравновесная термодинамика химических и физических процессов — явления переноса — теплоэнергетика; научные понятия — психологические ассоциации — художественные образы. Поэтому можно считать представленный результат закономерным итогом проводившейся в течение двух лет целенаправленной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зырянова И.М., Тодер Г.Б. *Высшая школа: реализация межпредметных взаимосвязей в учебном процессе и компьютеризация как факторы повышения эффективности образования. Учет межпредметных связей и компьютеризация при изучении общей химии* // Омский научный вестник. Омск. ОмГТУ. Вып.17. 2001. с.194–198.
2. Мухин В.А., Зырянова И.М. *Периодический закон и его следствия*. / Учебно-методическое пособие для студентов I курса химического факультета. Часть I. Омск. ОмГУ. 2001.
3. Зырянова И.М., Тодер Г.Б. *Физические основы современной химии* / Пособие по физике и химии. (Готовится к изданию).
4. Зырянова И.М., Тодер Г.Б. *Реализация межпредметных связей общей химии и физики в задачах для студентов технических вузов* // Университетское образование: Сборник материалов VI Международной научно-методической конференции. Пенза. ПГУ–ПДЗ. 2002. с.306–308.
5. Зырянова И.М., Бахтызин П.М. *Разработка компьютерной контролирующе-обучающей программы «Строение атома и периодическая система элементов»* // Омский научный вестник. Омск. ОмГТУ. 2001. Вып.17. с.201–204.
6. Зырянова И.М., Тодер Г.Б., Яцук А.А. *Расширенная версия компьютерной контролирующе-обучающей программы «Строение атома и периодическая система элементов». Результаты ее использования и их анализ*. // В печати.
7. Дубенский Ю.П., Зырянова И. М., Тодер Г.Б. *Существенные факторы профессиональной подготовки инженера: системный подход, проблемное обучение и реализация межпредметных связей* // Материалы Международной конференции «Университетская наука — образованию России. VI Царскосельские чтения». Санкт-Петербург. 2002. с.82–84.
8. Ровкин Д.В. *Дидактические основы технологии конструирования интегративного содержания учебного предмета* / Автореферат диссертации к.п.н. Омск: ОмГПИ. 1997.

РАСШИРЕННАЯ ВЕРСИЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ КОНТРОЛИРУЮЩЕ-ОБУЧАЮЩЕЙ ПРОГРАММЫ «СТРОЕНИЕ АТОМА И ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ». РЕЗУЛЬТАТЫ ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

И.М. Зырянова, Г.Б. Тодер, А.А. Яцук

The computer demonstrating and controlling program is presented. The program is devoted to questions of the structure and chemical properties of atoms and structure of The Periodic System. Work of the program's extended version is described. Analysis of results of one's use are given.

Разработка и широкое использование наукоемких технологий является одним из перспективных способов повышения эффективности современного образовательного процесса [1]. Вследствие технических возможностей электронные средства обучения имеют неоспоримое преимущество по сравнению с традиционными при обеспечении быстроты и гибкости управления (например система гиперссылок), обмене информацией, замене устаревшей информации новой или расширении баз данных.

Необходимость применения компьютерных технологий в обучении является в настоящее время общепризнанной. Существует обширный банк обучающих, контролирующих, моделирующих, демонстрационных и сочетающих несколько функций программ по различным учебным дисциплинам. Они все более активно применяются в образовательном процессе, с успехом дополняя традиционные методы обучения и позволяя преподавателю более эффективно и наглядно донести до студентов суть изучаемых явлений. Не заменяя непосредственное общение преподавателя со студентом, компьютерные средства обучения являются инструментом, моделирующим процессы, которые часто невозможно реализовать в учебных лабораториях.

Грамотное применение преподавателем автоматизированной диалоговой формы обучения, реализуемой с помощью ПК, ускоряет достижение поставленной дидактической цели [2] путем активации самостоятельной познавательной деятельности студента.

© 2003 И.М. Зырянова, Г.Б. Тодер, А.А. Яцук

E-mail: toder@ngs.ru

Омский государственный университет путей сообщения

Однако, как правило, и печатные, и электронные учебники посвящены какому-либо одному предмету и абсолютно не затрагивают смежные дисциплины. Но современному специалисту важно видеть и понимать взаимосвязь различных областей человеческого знания, поэтому требуется создание учебных курсов, направленных на синтетическое восприятие получаемой информации [3].

Эффективной и вызвавшей большой интерес среди студентов оказалась обучающе-контролирующая программа межпредметного содержания «Строение атома и периодическая система элементов» [4], используемая в течение двух лет на кафедре физики и химии ОмГУПС и включающая базовые знания по физике и химии по данной теме.

Программа имеет стандартный пользовательский интерфейс, основанный на применении функционального меню, диалоговых окон, командных кнопок; работает в операционных системах Windows-95, 98, NT, 2000, ME (Millennium). Минимальные технические требования: оперативная память — 16 Мб; P-133; свободное место на жестком диске — 100 Мб. Предназначена для проведения практических аудиторных занятий и может быть использована при дистанционном обучении.

Работа с программой может осуществляться обучаемым как самостоятельно, так и под контролем преподавателя и начинается с запуска нажатием клавиши «Enter». В опции «Регистрация» необходимо ввести свой индивидуальный шифр: Ф.И.О., номер группы, вариант экзаменационного задания. Результаты экзамена автоматически сохраняются в журнале преподавателя, где фиксируется дата сдачи и рейтинговая оценка. Если обучаемый не ввел свой вариант экзаменационного задания, дальнейшая работа с программой блокируется. После заполнения всех установочных параметров посредством главного меню можно войти в основные блоки программы и использовать их как самостоятельно, так и в едином комплекте (рис. 1). Блоки («Теория», «Упражнения», «Экзамен») имеют разветвленную структуру и включают теоретический, справочный материал, набор упражнений и заданий различной степени сложности. С помощью специальных кнопок выбирают теоретический материал и виды заданий.

Блок «Теория» включает три теоретических информационно-справочных раздела:

1. Электронное строение атома.
2. Периодичность свойств элементов.
3. Строение ядра. Элементарные частицы,

которые содержат важнейшие сведения, понятия, определения, таблицы, графики и разобранные примеры.

При изучении теоретических разделов осуществляется накопление знаний и переработка полученной информации. Используя клавиши, можно выходить в различные подразделы, причем по мере усвоения материала возможен переход в другие блоки программы.

Закрепление полученных знаний осуществляется в блоке «Упражнения», включающем контрольные вопросы и упражнения по соответствующим теоретическим разделам. В режиме самостоятельной работы после выбора теоре-

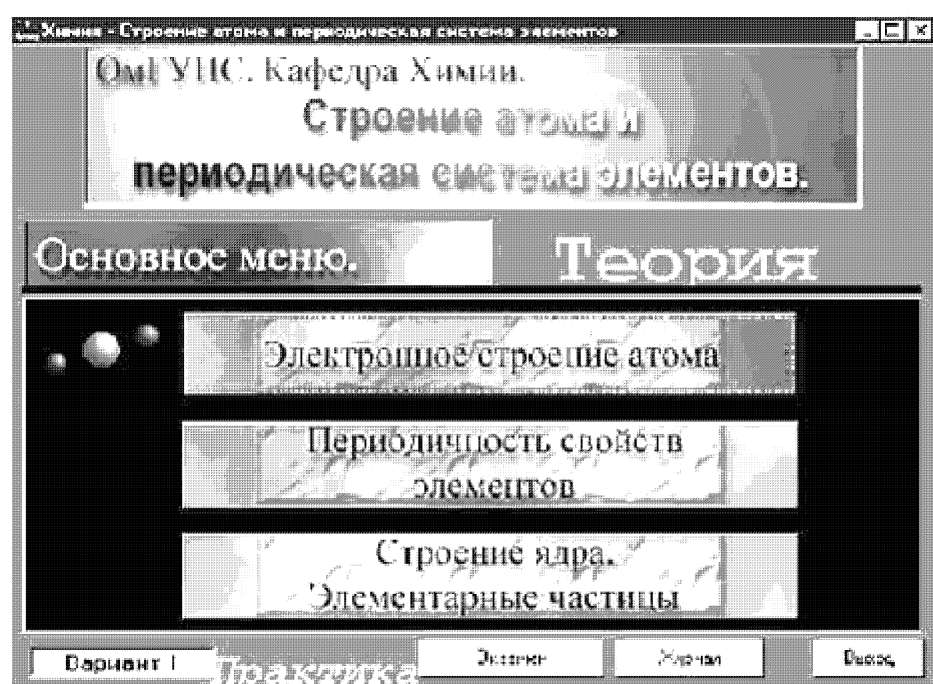


Рис. 1. Основное меню.

тического раздела и варианта упражнения студент приступает к выполнению задания.

Блок «Упражнения» предназначен для текущего контроля знаний обучаемого по материалу конкретного информационного раздела и имеет два основных этапа функционирования:

- I. Непосредственно предъявление вопросов и фиксирование результатов ответов на них;
- II. Представление протокола работы студента с соответствующим рейтингом.

В блоке «Экзамен» осуществляется как текущий (преподавателем и студентом), так и окончательный (преподавателем) контроль по заданной теме.

При работе в блоке «Упражнения» студент имеет возможность: 1) вернуться к информационно-справочным разделам, что позволяет после обращения к теоретическому материалу продолжить работу над индивидуальным заданием до выяснения правильных ответов; а затем 2) самостоятельно перейти в блок «Экзамен» и получить оценку своих знаний.

Непосредственно в блоке «Экзамен» вход в теоретические разделы блокируется.

Контроль позволяет оценить состояние знаний по материалам теоретического раздела за счет фиксирования правильных и неправильных ответов. Вопросы имеют различную степень сложности. Правильные ответы выбираются студентом из числа предложенных щелчком мыши по нумерованным кнопкам (на один вопрос дается пять вариантов ответа, один из них верный). Студент

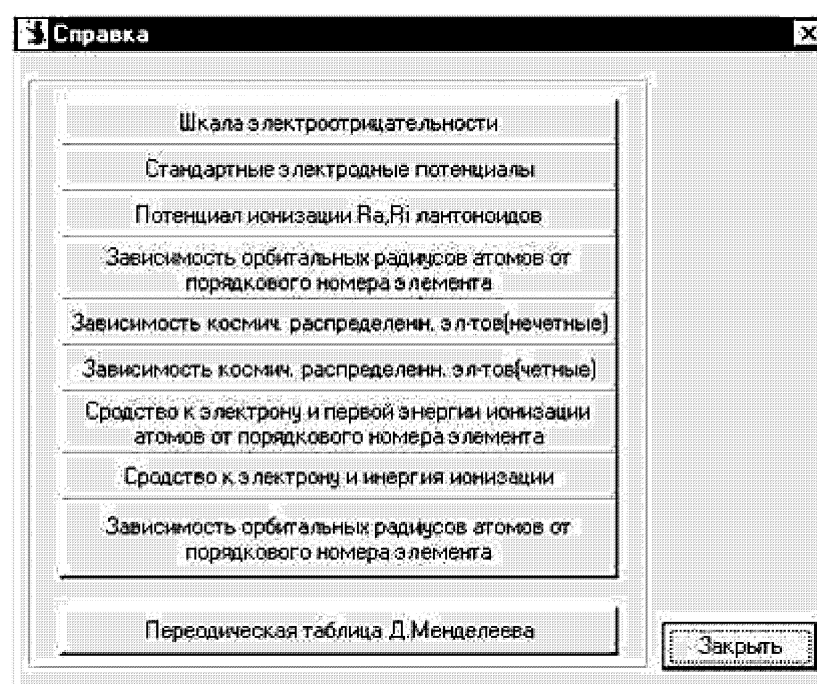


Рис. 2. Справочный раздел.

может выполнить упражнения по всем теоретическим разделам, причем количество выполненных упражнений и набранных баллов соответственно будет определять рейтинг обучаемого.

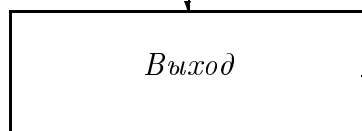
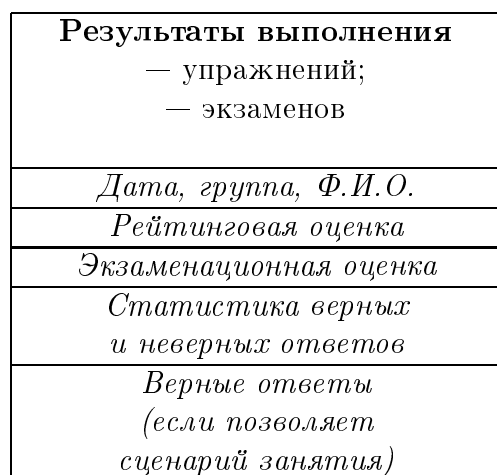
Формирование оценки осуществляется сравнением ответа студента с содержанием банка ответов. Результат выполнения каждого задания фиксируется в баллах: от 0 до 5. Общая сумма баллов принимается равной 100 %. После завершения работы на экран выдаются результаты (в численном и графическом виде): суммарный набранный балл и процент, который суммарный балл составляет от максимально возможного по отдельным информационным разделам и в целом. Общий результат позволяет стимулировать дальнейшую работу обучаемого по изучению данной темы.

При выполнении задания студент может использовать необходимый справочный материал (рис. 2). Предусмотрена возможность изменения и дополнения списка вопросов и вариантов ответов, что позволяет использовать данную программу неоднократно.

В работе [4] была предложена вниманию первая версия программы, состоящая из трех блоков, где работа программы, структура и функции блоков «Теория», «Упражнения» и «Экзамен» рассмотрены подробнее. Там же даны примеры вариантов тестовых заданий.

В настоящей статье представлена вторая, расширенная, версия, в которой существенно улучшен интерфейс преподавателя, а также добавлен многофункциональный рейтинговый модуль, состоящий из модифицированной по сравнению с первой версией «ведомости», а также блока настройки и блока статистики. На рис. 3 изображена схема работы рейтингового модуля.

ИНТЕРФЕЙС СТУДЕНТА



ИНТЕРФЕЙС ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

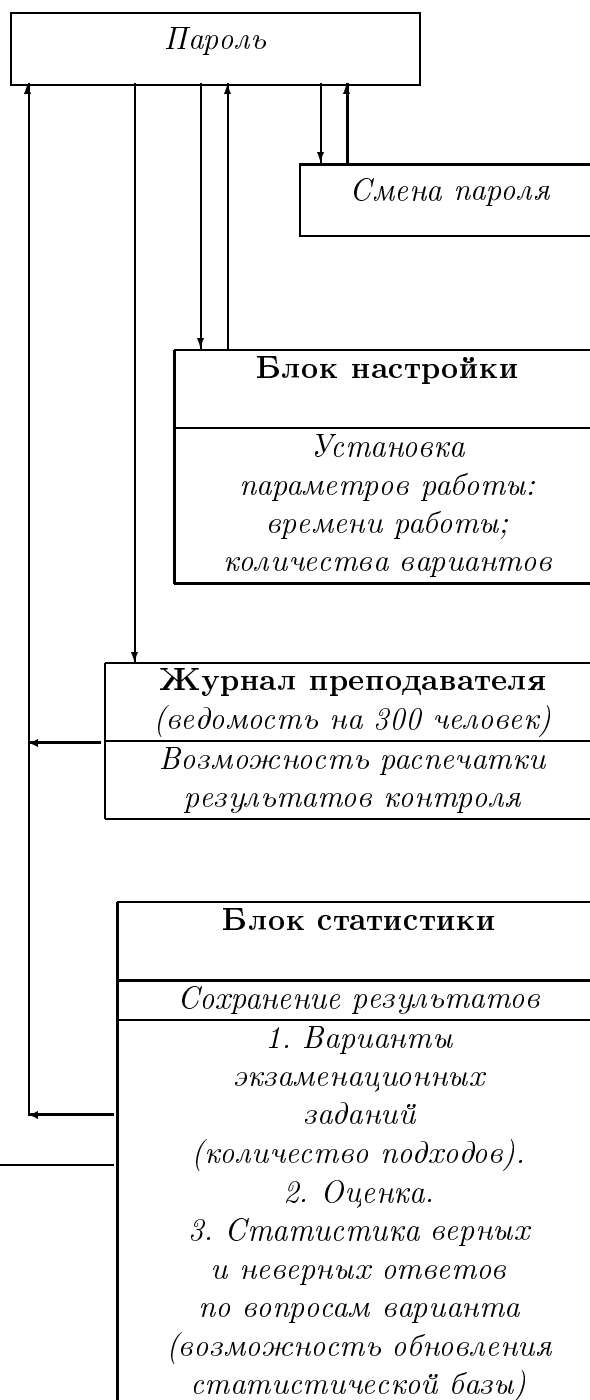


Рис. 3. Схема работы рейтингового модуля.

В «ведомости» хранятся результаты контроля студентов, причем в журнале преподавателя, рассчитанном на 300 человек, может быть зафиксирована как оценка за экзаменационное задание, так и рейтинговая оценка в целом в зависимости от плана занятия (рис. 4). Новая версия «ведомости» не только позволяет студенту оценить полученный результат, но и дает возможность распечатать на принтере результаты экзамена.

Блок статистики (рис. 5) позволяет сохранять результаты большого количества экзаменов и вести статистику ответов на конкретные вопросы. Преподаватель, зная динамику ответов, соотношение правильных и неправильных ответов и опираясь на другие статистические показатели, может задать (в том числе изменить) сценарий занятия с потоком, группой или отдельным студентом по своему усмотрению в соответствии с индивидуальным рейтингом студента или коллективным групповым рейтингом, оперативно реагируя на сложившуюся к данному моменту времени ситуацию в группе или на мгновенное состояние конкретного студента. Другими словами, *преподаватель получает возможность быстро и гибко моделировать учебный процесс*, реализуя вместе с обучаемыми самоорганизующуюся динамическую систему с обратной связью.

Блок настройки (рис. 6) позволяет преподавателю изменять при необходимости пароль при входе в блок статистики, задавать время, предусмотренное на ответ; устанавливать количество экзаменационных заданий, которые необходимо выполнить, чтобы получить зачет, ту или иную оценку за экзамен.

Описанная компьютерная разработка использовалась на практических занятиях в дисплейных классах (15 ПК), а также на лабораторных работах по химии при текущем контроле в сочетании с традиционными формами обучения (лекции, практические занятия, лабораторный практикум, семинарские занятия и т. д.).

На диаграмме (рис. 7) приведены результаты выполнения зачетных работ по теме «Строение атома и периодическая система элементов», показывающие, что рост уровня усвоения материала по данной теме после работы с обучающе-контролирующей программой при получении практического задания составляет примерно 11 % на одного студента теплоэнергетического факультета (ТЭФ) ОмГУПС (первый семестр 2002–2003 уч/г.). В целом среди студентов ОмГУПС, работавших с программой, за 2001–2002 и 2002–2003 уч/гг. уровень успеваемости и усвоения знаний поднялся на 14 %, несмотря на то что начальный уровень химических знаний у поступивших на первый курс не вырос, а скорее упал.

Статистическая обработка и интерпретация результатов проверки знаний показали, что полученные результаты согласуются с предположением о нормальном распределении. Расчеты производили с помощью компьютерной программы «Статистика» [5].

Два года непрерывного использования доказали, что представленная программа может эффективно выполнять следующие функции: 1) предоставлять обучаемому новую информацию по темам «Строение атома и атомного ядра» и «Периодическая система элементов» в наглядной и доступной форме; 2) закреплять теоретический материал при выполнении упражнений, контрольных заданий; 3) давать обучающимся возможность объективного самоконтроля; 4) осу-

пешествлять контроль над процессом усвоения знаний, оказывая большую помощь преподавателю; 5) облегчить студенту адаптацию к обучению в вузе в соответствии с темпом работы, уровнем начальной подготовки по изучаемым темам и уровнем общей подготовки, характером мышления и т. д.; 6) обеспечить оптимальный режим индивидуальной работы в зависимости от конкретных ошибок, сделанных в процессе обучения, и их причин, а также других факторов [6] (см. также [7–9]).

Таким образом, программа отвечает требованиям, предъявляемым к современным образовательно-информационным технологиями, в частности

I. Реализует [2]:

- 1) дидактические цели обучения;
- 2) «содержательную составляющую» технологии, которая задается рабочей программой учебной дисциплины, структурно-предметными схемами взаимосвязи различных дисциплин;
- 3) «процедурную составляющую» технологии, которая определяется преподавателем в виде сценария каждого учебного занятия.

II. Оптимизирует управление учебным процессом, помогая добиться роста эффективности процесса обучения как следствия:

- повышения качества образования за счет создания условий для индивидуализации обучения;
- повышения темпа проведения аудиторных занятий [10];
- активизации коллективной аудиторной и самостоятельной работы студентов;
- осуществления наглядного, непрерывного и объективно воспринимаемого студентами контроля знаний.

Опрос первокурсников, использовавших при обучении программу «Строение атома и периодическая система», показал, что 58 % участников анкетирования назвали этот раздел химии наиболее интересным из всех и хотели бы продолжить его изучение; 74 % опрошенных воспринимают химические и физические свойства как взаимосвязанные и имеющие единую природу закономерности поведения данных физических систем в различных ситуациях.

Таким образом, реализация межпредметных связей через компьютеризацию является необходимым условием повышения эффективности обучения, формирующим у студентов дополнительную мотивацию к изучению в том числе обших, непрофилирующих дисциплин.

Список последних посещений проводимых экзаменов

Курсиш: Сидоров
 Семейство: Сидоров
 Группа: 20 а
 Вариант: Вариант 1
 Дата проведения экзамена: 29.09.99
 Решены упражнений: 5
 Всего баллов: 20
 Экзаменационная оценка: 5

Очистить Закреть

Рис. 4. Журнал преподавателя.

Статистика вводится с 21.09.02

Номер варианта	Число попыток	Сред. процент
Вариант 1	3	12
Вариант 2	7	21
Вариант 3	7	21
Вариант 4	11	44
Вариант 5	15	28
Вариант 6	17	28
Вариант 7	19	28
Вариант 8	14	34
Вариант 9	11	36
Вариант 10	7	40
Вариант 11	5	32
Вариант 12	2	20
Вариант 13	1	20
Вариант 14	1	21
Вариант 15	0	0

Номер варианта	Число попыток	Сред. процент
Вариант 16		20
Вариант 17	4	20
Вариант 18	4	20
Вариант 19	3	21
Вариант 20	4	20
Вариант 21		
Вариант 22		
Вариант 23		
Вариант 24		
Вариант 25		
Вариант 26		
Вариант 27		
Вариант 28		
Вариант 29		
Вариант 30		

Вариант №20

Вопрос №1 0 2

Вопрос №2 0 5

Вопрос №3 9 5

Вопрос №4 8 4

Вопрос №5 0 2

OK

Сформировать статистику Закреть

Рис. 5. Блок статистики.

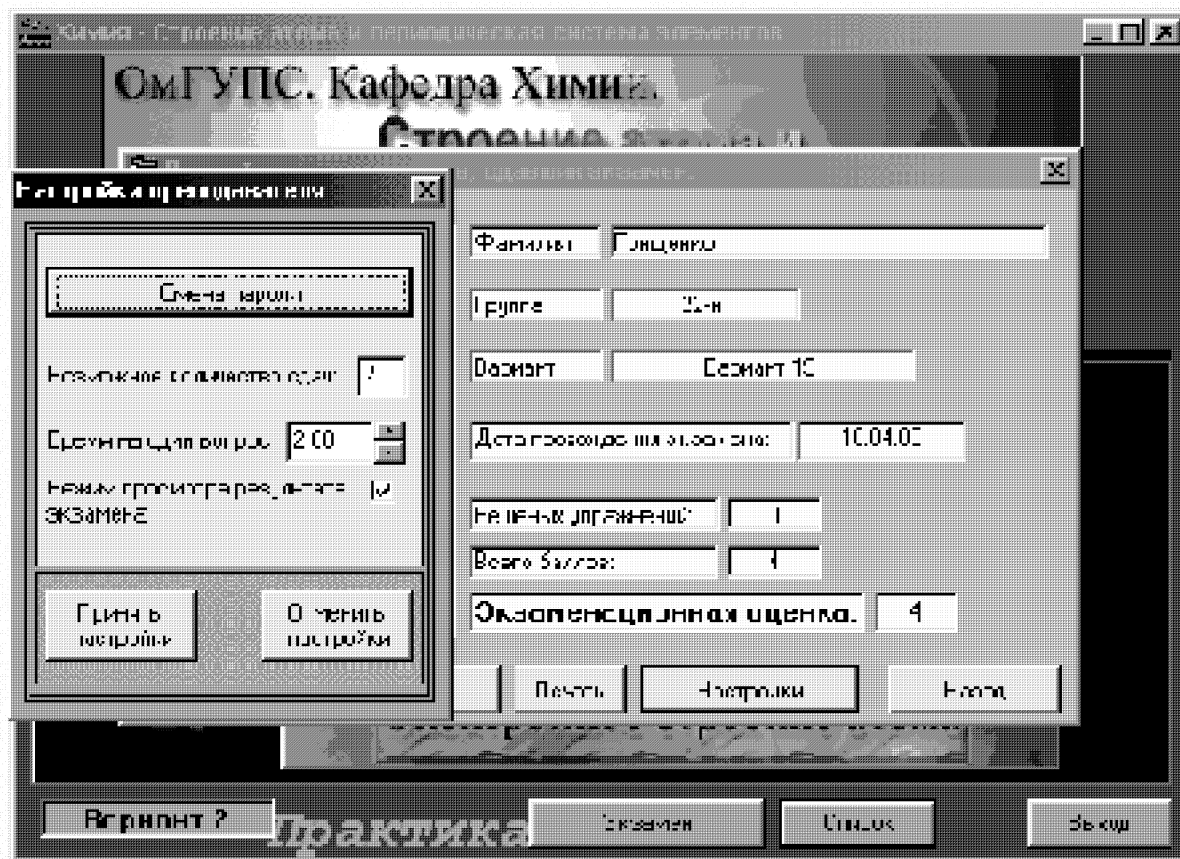


Рис. 6. Блок настройки.

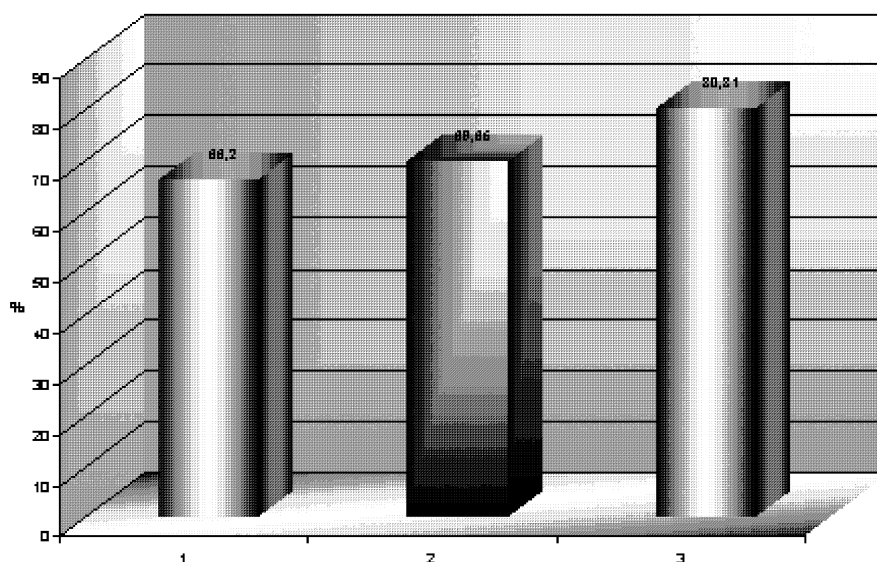


Рис. 7. Результаты выполнения зачетных работ по теме «Строение атома и периодическая система элементов»: 1 — Программированное задание по теме; 2 — Работа с обучающе-контролирующей программой; 3 — Практическая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Концепция развития межвузовской комплексной программы «Научные технологии образования» (МКП НТО) / под ред. проф. М.М. Благовещенской. М.: МГУПП, 2001.
2. Благовещенская М.М., Мануйлов В.Ф., Федоров И.В. Компьютерные научные технологии образования и их внедрение в процесс управления обучением / Труды X Международной конференции. Москва — Таганрог: ТРТУ, 2001. С.25.
3. Зырянова И.М., Тодер Г.Б. Высшая школа: реализация междисциплинарных взаимосвязей в учебном процессе и компьютеризация как факторы повышения эффективности образования. Учет междисциплинарных связей и компьютеризация при изучении общей химии // Омский научный вестник. Омск. ОмГТУ. Вып.17. 2001. С.194–198.
4. Зырянова И.М., Бахтызин П.М. Разработка компьютерной контролирующей обучающей программы «Строение атома и периодическая система элементов» / Омский научный вестник. Омск. ОмГТУ. 2001. Вып.17. с.201–204.
5. Вершинин В.И., Галкин В.В., Чиркова Е.А., Надыкто Д.Г. Компьютерная программа «Статистика». Омск. ОмГУ. 1991.
6. Тодер Г.Б., Зырянова И.М. Компьютерные технологии в образовании как средство адаптации к учебному процессу в высшей школе / Тезисы докладов. Всероссийская научно-методическая конференция «Новые образовательные технологии в вузе». Екатеринбург: УГТУ–УПИ. 2001. С.57.
7. Зырянова И.М., Иماشов М.А. Компьютерные контролирующе-обучающие программы по общей химии / Тезисы докладов. Всероссийская научно - методическая конференция «Новые образовательные технологии в вузе». Екатеринбург: УГТУ–УПИ. 2001. С.39.
8. Зырянова И.М., Голованова О.А. Использование новых компьютерных технологий при изучении общей химии / Труды X научно-методической конференции «Научные технологии образования». Москва — Таганрог. 2001. С.128-131.
9. Бухарова Г.Д., Абитова О.М. Особенности преподавания физики с использованием компьютерных технологий / Тезисы докладов. Всероссийская научно-методическая конференция «Новые образовательные технологии в вузе». Екатеринбург: УГТУ–УПИ. 2001. С.32-33.
10. Дрожжина Е. Возможности компьютерных технологий обучения // Народное образование. 1997. №9. С.52–59.

ЗАЩИТА БАЗЫ ДАННЫХ ФОТОДОКУМЕНТОВ

Д.Н. Лавров, А.В. Мухоморов

In article method protection database is presented. The method is combination of the block algorithm of the cryptooperation and stego-algorithm.

Защита базы данных (БД) — сложная многоплановая задача. Цели защиты могут быть различными. Так, в [2] ставится задача защиты таблицы БД, каждая запись которой состоит из двух полей: «фамилия сотрудника» и «данные о сотруднике». Первое поле является индексным, второе поле данных. Выбирается однонаправленная хэш-функция и симметричный алгоритм шифрования. Поле данных шифруется с помощью симметричного алгоритма, использующего в качестве ключа данные индексного поля. Не зная данных индексного поля, невозможно получить данные о сотруднике.

Такая защита не позволяет получить сразу данные о всех сотрудниках. Поиск по маске также невозможен.

Эта защита не совершенна [4], так как может быть вскрыта с помощью «грубого» взлома [1].

Проблемы защиты БД путем прямого шифрования полей данных обсуждаются в [3].

Целью данной работы является разработка системы защиты БД фотодокументов, которая, с одной стороны, позволяла бы получить полный доступ к базе, включая контекстный поиск, а с другой — без специального программного обеспечения невозможно было бы использовать и преобразовывать данные.

База данных фотодокументов состоит из записей, содержащих поля: «фонд», «опись», «дело», «лист», «текст», «фото». В поле «текст» хранится текст документа, в поле «фото» — отсканированное фотоизображение документа. Два поля «текст» и «фото» хранятся в различных таблицах БД. Цели этого разнесения будут прояснены ниже.

Так же как и в [2], выбирается однонаправленная хэш-функция h и симметричный алгоритм шифрования. Алгоритм зашифрования на ключе K обозначим $E_K(\cdot)$, расшифрования — $D_K(\cdot)$. В программной реализации использовались хэш-функция MD5 и алгоритм Blowfish. Введем обозначения: T — данные поля «текст», P — данные поля «фото» текущей записи. Алгоритм защиты БД фотодокументов состоит в следующем:

© 2003 Д.Н. Лавров, А.В. Мухоморов

E-mail: petroff@mail.ru

Омский государственный университет

1. Вычисляем ключи шифрования $h(T)$ и $h(P)$.
2. С помощью полученных ключей «перекрестно» шифруем поля «текст» и «фото», получаем $E_{h(P)}(T)$ и $E_{h(T)}(P)$.
3. Размещаем ключи $h(T)$ и $h(P)$ в самих полях с помощью алгоритма вставок в случайные позиции, определенные специальным ключом K . Обозначим эту функцию $S_K(\cdot, \cdot)$ (на первой позиции данные поля, на второй ключ), тогда преобразованные данные описываются композицией отображений:

$$S_K(E_{h(P)}(T), h(T)) \text{ и } S_K(E_{h(T)}(P), h(P)).$$

4. Преобразованные данные помещаются в поля «текст» и «фото».

Ключ K представляет собой номера байт, в которых хранятся ключи $h(T)$ и $h(P)$ в контейнерах $E_{h(T)}(P)$ и $E_{h(P)}(T)$ соответственно. Ключ K должен быть различным для различных записей. Этого можно достичь с помощью криптостойкого генератора псевдослучайной последовательности.

Алгоритм S размещения ключей шифрования в данных является по сути алгоритмом стеганографии, так как в качестве сообщения выступает ключ, а в качестве контейнера – данные полей записи.

Доступ к данным осуществляется по следующему алгоритму:

1. Вынимаем ключи $h(T)$ и $h(P)$ из поля текущей записи.
2. С помощью полученных ключей расшифровываем поля «текст» и «фото», получаем $P = D_{h(T)}(E_{h(T)}(P))$ и $T = D_{h(P)}(E_{h(P)}(T))$.

Если злоумышленник получит доступ только к одной таблице БД, в которой хранятся данные $S_K(E_{h(P)}(T), h(T))$, то прочесть данные из нее он не сможет, так как ему неизвестен ключ $h(P)$. Единственное, что он сможет получить, – это хэш $h(T)$, да и то если известен стегоключ K . В этом случае грубый взлом неэффективен.

Проанализируем ситуацию, когда злоумышленник получил все таблицы БД. Рассматривая запись БД, злоумышленник получает в свое распоряжение пару $(S_K(E_{h(P)}(T), h(T)); S_K(E_{h(T)}(P), h(P)))$. Оценим трудоемкость атаки грубой силы на стегоалгоритм. Пусть N – размер контейнера в байтах, n – размер ключа в байтах. Тогда вариантов размещения ключа в контейнере будет

$$A_{N+n}^n = \frac{(N+n)!}{n!} = (n+1) \cdot \dots \cdot (N+n) \geq (n+1)^N.$$

Следовательно, время, потраченное на вскрытие одной записи БД, больше, чем

$$(n+1)^N \cdot t,$$

где t – время проверки подлинности одного ключа.

Пусть для примера $n = 256$ бит = 32 байта (типичная длина ключа), $N = 2400$ байт (соответствует странице текста), $t = 10^{-3}$ сек., тогда время, потраченное на вскрытие одной записи, будет составлять $33^{2400} \cdot 10^{-3} \approx 3 \cdot 10^{3657}$ секунд.

Наиболее опасный вариант – это когда атакующий получает не только таблицы базы, но и программное обеспечение доступа и работы с БД. При анализе выполнимого кода программного обеспечения возможно отследить работу стегаалгоритма и получить ключ K . Для предотвращения подобной атаки необходима защита программного кода. Возможны следующие варианты защиты кода: защита от отладки (препятствует работе отладчиков типа SoftIce), защита от дизассемблирования (код стегаалгоритма шифруется при хранении в EXE-файле); логические ловушки для отладчиков; привязка программного кода к аппаратной части компьютера.

Важно, чтобы стоимость взлома сравнялась со стоимостью данных и программного обеспечения.

Наиболее уязвимым местом данной системы защиты является защита программного обеспечения. Но удовлетворительного решения в мире компьютерных технологий неизвестно до сих пор.

В заключение отметим, что платой за представленную защиту БД является, как показывают эксперименты, увеличенное в среднем вдвое время обращения к записям базы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blakley G.R., Meadows C. *A Database Encryption Scheme which Allows the Computation of Statistics Using Encrypted Data* // Proceedings of the 1985 Symposium on Security and Privacy, IEEE Computer Society. 1985. Apr. P. 116-122.
2. Feigenbaum J., Liberman M.Y., Grosse E., Reeds J.A. *Cryptographic Protection of Membership Lists* // Newsletter of the International Association of Cryptologic Research. 1992. V. 9. P. 16-20.
3. Епанчинцева О.Л., Ворошилов В.В. Шифрование данных в DBF-файлах // Математические структуры и моделирование. Сб. науч. трудов. / Под ред. А.К.Гуца. Омск: ОмГУ, 2000. №6. С.139-142.
4. Шнаейр Б. *Прикладная криптография*. М.: Триумф. 2002. 816 с.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ ЗАПРОСОВ К РЕЛЯЦИОННЫМ БАЗАМ ДАННЫХ

А.В. Угаров

In this article the new method of construction of queries to relation databases. The method is based on join property verification and let automatic construction queries with correct outer joins.

Введение

По мере распространения сетевых технологий все больше и больше информации можно получить в Интернет. Причем информация улучшается не только количественно, но и качественно. Все чаще web-странички наполняются динамическим содержанием и, более того, строятся на основе данных, хранящихся в базах данных в структурированном виде. Еще одним движущим фактором структуризации данных в Интернет является неудовлетворительность поиска данных в неформализованных источниках [1]. Таким образом, наблюдается тенденция к хранению информации во всемирной сети в структурированных источниках данных, которая, по-видимому, в ближайшие годы еще более укрепит свои позиции.

С другой стороны, для доступа к сильно структурированным данным необходим соответствующий инструментарий. Причем наиболее интересна возможность работы с различными СУБД и произвольными базами данных. Подобные механизмы реализованы в современных профессиональных приложениях для работы с базами данных, таких как Business Objects, Oracle Forms, Microsoft Access, Delphi (утилита SQL Builder) и других. Однако все они предназначены в основном для разработчиков программного обеспечения, к тому же ориентированы на традиционные базы данных.

Одна из основных целей подобного инструментария – это предоставление наиболее прозрачно для пользователя, внутренней структуры базы данных и максимальная простота при работе с ней. То есть необходим инструментарий для организации интерфейса между пользовательским представлением базы данных, в терминах которого будет формироваться запрос, и внутренним представлением данных в базе данных. Запрос, сформированный на основе пользовательского представления данных, должен быть корректно преобразован в

запрос на основе внутреннего представления [2–4]. Под корректностью здесь понимается однозначное отображение состояний пользовательского представления данных в состояния внутреннего представления. Вместе с возрастающим количеством информационных ресурсов полная или частичная автоматизация построения соответствующего отображения приобретает все большую актуальность.

Соответствующее отображение можно построить, определив механизм преобразования произвольного состояния пользовательского представления в соответствующее ему состояние внутреннего представления. Для второго представления наиболее удобно использовать реляционную модель данных [3]. Соответственно, исходный запрос пользователя следует преобразовать в универсальный реляционный запрос (УРЗ) [5, 6]. В данной статье рассматривается проблема автоматизации построения УРЗ. Также в работе сформулированы требования к внутреннему представлению данных, приведен алгоритм построения множества отношений для УРЗ.

1. Теоретические основы межмодельных отображений

При построении схемы реляционной базы данных традиционно используется процесс нормализации исходного отношения. В теории нормализации центральным понятием является декомпозиция. Будем использовать следующее устоявшееся определение декомпозиции [5, 6]:

Определение 1. Пусть задана схема отношения R на множестве атрибутов $U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и множество $\mathbb{F}$ всех функциональных зависимостей на R . Декомпозицией схемы отношения R называется совокупность схем отношений $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ таких, что $\bigcup_{j=1}^k R_j = R$, то есть $\bigcup_{j=1}^k U_j = U$, где $U_j = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}\}$ – множество атрибутов отношения R_j . При этом не требуется, чтобы R_j были непересекающимися.

На практике декомпозиция – это разбиение первичного отношения на несколько отношений, при котором получается «лучшая», по тем или иным причинам, схема базы данных. За примером построения декомпозиции можно обратиться к [7].

Осуществление декомпозиции некоторого первоначального множества схем отношений может снять часть проблем, возникающих при проектировании реляционной базы данных (избыточность, аномалии обновления, включения, удаления) [5–8]. Вместе с тем при «неправильной» декомпозиции могут возникнуть проблемы при восстановлении исходного отношения. Таким образом, при построении декомпозиции необходимо учитывать дополнительные ограничения. В частности, декомпозиция должна удовлетворять свойству соединения без потерь информации (ССП).

Определение 2. Пусть R – схема отношения, в результате декомпозиции которой получены схемы $R_1, R_2, \dots, R_k$ и $\mathbb{F}$ – множество функциональных зависимостей на R . Говорят, что декомпозиция $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ обладает

свойством соединения без потерь (относительно $\mathbb{F}$), если любое отношение r со схемой R , удовлетворяющее $\mathbb{F}$, может быть представлено в виде:

$$r = \pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(r),$$

то есть отношение r является естественным соединением своих проекций на все R_j , $j = \overline{1, k}$.

Если декомпозиция обладает свойством соединения без потерь, то любое отношение может быть восстановлено из его проекций.

В более узком случае, когда нужно восстановить подмножество исходного отношения, используется понятие локального свойства соединения без потерь (локальное ССП).

Определение 3. Пусть R – схема отношения, в результате декомпозиции которой получены схемы $R_1, R_2, \dots, R_k$ и $\mathbb{F}$ – множество функциональных зависимостей на R . Говорят, что схемы $R_1, R_2, \dots, R_l$ ($l < k$) удовлетворяют локальному свойству соединения без потерь (относительно $\mathbb{F}$), если для любого отношения r со схемой R , удовлетворяющему $\mathbb{F}$, выполнено:

$$\pi_{R'}(r) = \pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_l}(r), \quad \text{где } R' = \bigcup_{i=1}^l R_i.$$

Выполнение локального ССП является необходимым условием для корректного восстановления подмножества исходного отношения. Если некоторое множество отношений не удовлетворяет локальному ССП, то запрос к базе данных, построенный на их основе, не является адекватным представлением пользовательского запроса. Другими словами, исходное отношение не может быть корректно восстановлено на основании информации из полученного при декомпозиции множества отношений.

Второе требование при осуществлении декомпозиции связано с понятием функциональных зависимостей [5, 6, 9]. Зависимости в $\mathbb{F}$ можно рассматривать как ограничения целостности для отношения R , поэтому при построении декомпозиции необходимо требовать сохранения функциональных зависимостей.

Определение 4. Пусть задана схема отношения R на множестве атрибутов $U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и $\mathbb{F}$ – множество всех функциональных зависимостей на R . Проекцией $\mathbb{F}$ на множество атрибутов $Z \subseteq U$, обозначаемой $\pi_Z(\mathbb{F})$, называется множество зависимостей $X \rightarrow Y$, в $\mathbb{F}^+$, таких, что $X \cup Y \subseteq Z$.

Наиболее интересны проекции множества всех функциональных зависимостей, существующих на первичном отношении, на множество атрибутов отношений, получаемых в результате декомпозиции исходного отношения.

Определение 5. Декомпозиция $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ сохраняет множество зависимостей $\mathbb{F}$ на R , если из множества функциональных зависимостей $\bigcup_{j=1}^k \pi_{R_j}(\mathbb{F})$ логически следуют все зависимости, принадлежащие $\mathbb{F}$.

Свойство декомпозиции сохранять функциональные зависимости является важным критерием правильности построения структуры базы данных. Нарушение этого свойства приводит к возможности ввода противоречивых данных в базу данных.

Свойство сохранения функциональных зависимостей (СФЗ) и свойство соединения без потерь никак не связаны. Декомпозиция ρ может удовлетворять свойству соединения без потерь, не сохраняя множества функциональных зависимостей, и наоборот. Поэтому, помимо проверки ССП, при построении декомпозиции необходимо проверять также и СФЗ. В литературе [6] можно найти алгоритмы для проверки СФЗ.

И, наконец, третье требование: декомпозиция должна находиться в 3НФ. Это условие определяет отсутствие нежелательных (т.е. не от ключа) функциональных зависимостей атрибутов отношения, не входящих в первичный ключ.

Замечание 1. В общем случае полезно выполнение требований более высоких нормальных форм (4НФ, 5НФ). Это позволило бы избежать ошибок, связанных с многозначными зависимостями. Однако этот вопрос не рассматривается в рамках данной статьи.

Подытожим сказанное выше. При построении отображения пользовательского представления данных во внутреннее представление будем требовать выполнения следующих ограничений:

1. Схема базы данных находится в 3НФ.
2. Множество отношений схемы базы данных удовлетворяет ССП.
3. Схема базы данных сохраняет функциональные зависимости.

2. Алгоритм проверки свойства соединения без потерь

Существует несколько алгоритмов проверки ССП [5,6]. Как правило, в литературе такие алгоритмы приведены в виде, используемом для доказательства его корректности. Однако для наибольшей эффективности имеет смысл несколько изменить структуру алгоритма. Предлагается некоторая модификация алгоритма, предложенного Дж. Ульманом.

Алгоритм 1. Пусть задана схема отношения $\mathbb{R}$ на множестве атрибутов $U = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, $\mathbb{F}$ – множество всех функциональных зависимостей на $\mathbb{R}$ и декомпозиция $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$.

Подготовительный этап. Строим таблицу с n столбцами и k строками. Столбец j соответствует атрибуту A_j , а строка i – схеме отношения R_i . На пересечении строки i и столбца j поместим символ «+», если $A_j \in R_i$. В противном случае поместим туда символ «-».

Рабочий цикл. Последовательно «рассматриваем» каждую из зависимостей $\{X \rightarrow Y\} \in \mathbb{F}$. Для зависимости $X \rightarrow Y$ отыскиваем все строки в таблице, где во всех столбцах, соответствующих атрибутам из множества X , находятся символы «+». Для всех найденных строк во всех столбцах, соответствующих атрибутам из множества Y , проставляем символы «+».

Этап проверки. Если после проверки всех зависимостей из $\mathbb{F}$ в таблице появилась строка, полностью состоящая из одних «+», тогда декомпозиция ρ удовлетворяет свойству соединения без потерь. Если за весь рабочий цикл в таблице не модифицировано ни одного значения, то декомпозиция не обладает

таким свойством. Если же строки, состоящей из одних «+» нет, но таблица была изменена, то необходимо повторить рабочий цикл. ■

Существует доказательство того, что алгоритм корректно проверяет свойство соединения без потерь [6, с.167].

Нетрудно показать, что алгоритм выдает верный результат и для проверки локального свойства соединения без потерь.

Данный алгоритм основан на построении замыкания множества атрибутов. Алгоритм полиномиально зависит от мощности множества функциональных зависимостей (ФЗ) и количества атрибутов. Интересны также алгоритмы проверки ССП на основе построения замыканий ФЗ. Несмотря на то что вычислительная трудность таких алгоритмов экспоненциальная, для построения локального замыкания ФЗ они могут быть более эффективны (в силу меньшего количества зависимостей).

3. Алгоритм построения запроса

Как уже было сказано выше, схема базы данных должна удовлетворять ССП. Однако, даже если в целом для схемы базы данных ССП выполнено, то для некоторого подмножества отношений локальное ССП выполнено не всегда. То есть не всегда возможно восстановление всех отношений из их проекций.

Тем не менее именно выполнение локального ССП является основным критерием для формирования запроса в терминах внутреннего представления базы данных. Запрос к реляционной базе можно представить в общем виде [5, 6]. Универсальный реляционный запрос (УРЗ):

$$\pi_X(\sigma_F(R_1 \bowtie R_2 \bowtie \dots \bowtie R_k)), \quad (1)$$

где X – некоторое подмножество атрибутов отношений $R_j, j = \overline{1, k}$, F – логическое выражение над атрибутами.

Наиболее интересен механизм выбора множества отношений $\{R_1, R_2 \dots R_k\}$. Очевидно, что это множество должно содержать все отношения, атрибуты которых имеют соответствие в пользовательском запросе. Однако если соответствующий набор отношений не удовлетворяют локальному ССП, то их естественное соединение может содержать лишние кортежи, то есть кортежи, отсутствующие в предметной области. Следовательно, УРЗ не будет эквивалентен запросу в терминах пользовательского представления. Чтобы избежать подобной проблемы, необходимо определить минимальное множество отношений, включающее все $R_j, j = \overline{1, k}$ и удовлетворяющее локальному ССП.

Возможны два подхода для построения такого множества. Первый заключается в последовательном исключении «лишних» отношений из схемы до минимального числа. Второй подход, наоборот, последовательно добавляет по некоторым правилам к уже существующему множеству отношений новое, «необходимое» отношение до тех пор, пока локальное ССП не будет выполнено. Второй подход более предпочтителен, поскольку на основе имеющихся данных «лучшее» отношение определить проще, чем «худшее». Однако возможен также и комбинированный подход.

Для построения множества отношений, удовлетворяющих локальному ССП (результатирующего множества), предлагается следующий алгоритм:

Алгоритм 2. Пусть $\mathbb{M}$ – множество всех отношений, $\mathbb{X} \subset \mathbb{M}$ – множество отношений, для которых проверяется выполнение локального ССП. Для любого отношения $A \in \mathbb{M}$ введем обозначения: $U(A)$ – множество всех атрибутов A , $PK(A)$ – множество атрибутов из отношения A , входящих в первичный ключ.

Шаг 1. Строим множество $\mathbb{Y} := \{A \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{X} \mid PK(A) \subset \bigcup_{B \in \mathbb{X}} U(B)\}$ (множество всех отношений, не принадлежащих $\mathbb{X}$, первичный ключ которых содержится в объединении всех атрибутов всех отношений из $\mathbb{X}$). Если $\mathbb{Y} \neq \emptyset$, то переходим на шаг 2, иначе – на шаг 5.

Шаг 2. Строим множество $\mathbb{Z} := \{A \in \mathbb{Y} \mid \exists B \in \mathbb{X} : PK(B) \subset U(A)\}$ (множество тех отношений из $\mathbb{Y}$, множество атрибутов которых содержит первичный ключ хотя бы одного отношения из множества $\mathbb{X}$). Если $\mathbb{Z} \neq \emptyset$, то переходим на шаг 3, иначе – на шаг 4.

Шаг 3. Добавляем любое отношение из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{X}$ и удаляем это отношение из $\mathbb{Z}$. Если ССП выполнено для нового множества отношений $\mathbb{X}'$, то требуемое множество построено, **ВЫХОД**. Иначе повторяем шаг 3, до тех пор пока $\mathbb{Z} \neq \emptyset$. Если из $\mathbb{Z}$ удалены все отношения, но ССП не выполнено, то переходим на шаг 1.

Шаг 4. Добавляем любое отношение из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{X}$. Если при этом ССП выполнено для нового множества отношений $\mathbb{X}'$, то требуемое множество построено, **ВЫХОД**. Иначе переходим на шаг 1.

Шаг 5. Строим множество $\mathbb{Y} := \{A \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{X} \mid U(A) \cap \bigcup_{B \in \mathbb{X}} U(B) \neq \emptyset\}$ (множество отношений, не принадлежащих $\mathbb{X}$, хотя бы один атрибут которых содержится во множестве всех атрибутов всех отношений из $\mathbb{X}$). Если $\mathbb{Y} = \emptyset$, то все отношения схемы базы данных не удовлетворяют ССП, декомпозиция построена неправильно, поэтому **ОШИБКА**, **ВЫХОД**. Иначе переходим на шаг 6.

Шаг 6. Строим множество $\mathbb{Z} := \{A \in \mathbb{Y} \mid \exists B \in \mathbb{X} : PK(B) \subset U(A) \setminus PK(A)\}$ (множество отношений из $\mathbb{Y}$, в неключевые атрибуты которых включается первичный ключ хотя бы одного отношения из $\mathbb{X}$). Если $\mathbb{Z} = \emptyset$, то добавляем в $\mathbb{X}$ любое отношение из $\mathbb{Y}$, иначе – добавляем любое отношение из $\mathbb{Z}$. Проверяем ССП для нового множества отношений $\mathbb{X}$. Если ССП выполнено, то требуемое множество построено, **ВЫХОД**. Иначе – переход на шаг 1. ■

Структурно данный алгоритм может быть записан так:

```
while (не выполнено ССП( $\mathbb{X}$ )) do
   $\mathbb{Y} := \{A \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{X} \mid PK(A) \subset \bigcup_{B \in \mathbb{X}} U(B)\}$ 
  if  $\mathbb{Y} \neq \emptyset$  then
     $\mathbb{Z} := \{A \in \mathbb{Y} \mid \exists B \in \mathbb{X} : PK(B) \subset U(A)\}$ 
    if  $\mathbb{Z} \neq \emptyset$  then
```

```

    while (не выполнено ССП( $\mathbb{X}$ ) &  $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ ) do
         $\mathbb{X} := \mathbb{X} \cup \{A\}, A \in \mathbb{Z}$ 
         $\mathbb{Z} := \mathbb{Z} \setminus \{A\}$ 
    end while
else
     $\mathbb{X} := \mathbb{X} \cup \{A\}, A \in \mathbb{Y}$ 
end if
else
     $\mathbb{Y} := \{A \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{X} \mid U(A) \cap \bigcup_{B \in \mathbb{X}} U(B) \neq \emptyset\}$ 
    if  $\mathbb{Y} \neq \emptyset$  then
         $\mathbb{Z} := \{A \in \mathbb{Y} \mid \exists B \in \mathbb{X} : PK(B) \subset U(A) \setminus PK(A)\}$ 
        if  $\mathbb{Z} \neq \emptyset$  then
             $\mathbb{X} := \mathbb{X} \cup \{A\}, A \in \mathbb{Z}$ 
        else
             $\mathbb{X} := \mathbb{X} \cup \{A\}, A \in \mathbb{Y}$ 
        end if
    else
        ОШИБКА (ССП не выполнено для всех отношений)
    end if
end if
end while

```

Замечание 1. Термин «любой» здесь означает выбор произвольного отношения (например первого по порядку). Тем не менее осмысленный выбор более «удачного» отношения может значительно уменьшить время поиска.

Замечание 2. Для проверки локального ССП на каждом шаге алгоритма может быть использован алгоритм 2.

Замечание 3. На шаге 1 алгоритма идет отбор тех отношений, добавление которых не приведет к потере информации. Потери информации не может быть, поскольку добавляются условия соединения с отношениями, атрибуты первичного ключа которых уже содержатся во множестве выбранных атрибутов.

Замечание 4. На шаге 2 на выбранные отношения накладывается дополнительное условие, позволяющее в некоторых случаях избежать аномалий проецирования соединения, когда множество всех отношений не удовлетворяет пятой нормальной форме (5НФ). Следствием аномалий проецирования соединений является появление ложных записей в результате запроса, которых нет в предметной области. За примером можно обратиться к [5]. Информационные модели, в которых имеются нарушения 4НФ и 5НФ, встречаются относительно редко, поэтому обычно проектировщики заканчивают процесс нормализации, дойдя до 3НФ. Следовательно, в реальной базе данных возможно появление подобных аномалий, и желательно избегать их.

Замечание 5. На шаге 5 алгоритма выбираются только те отношения, добавление которых к $\mathcal{X}$ может повлиять на выполнение ССП. Добавление отношений, не удовлетворяющих этому условию, не поможет выполнению ССП (это хорошо видно при рассмотрении алгоритма проверки ССП).

Замечание 6. На шаге 6 отбрасываются те отношения, добавление которых может привести к потере информации при соединении отношений. Это отношения, первичный ключ которых заведомо не включается во множество атрибутов отношений множества $\mathcal{X}$ (иначе мы бы не были на шаге 6), но содержит первичный ключ одного из отношений в $\mathcal{X}$. Такие отношения представляют собой разрешение связи «многие ко многим» в реляционной модели и содержат информацию о связи двух объектов в предметной области. При этом если об одном из объектов нет информации в базе данных, то при соединении этих отношений происходит потеря информации.

Множество отношений, полученных в результате работы алгоритма, удовлетворяет локальному ССП, тем самым решает вышеописанную проблему при построении УРЗ. Для завершения формирования отображения необходимо определить правила построения множества X и логического выражения F из (1). В данной работе были рассмотрены только простейшие случаи, когда атрибуты пользовательской модели данных имеют однозначное соответствие в модели данных базы данных. В этом случае построение X и F на основе пользовательского запроса достаточно очевидно. Все атрибуты пользовательской модели однозначно преобразуются в атрибуты модели базы данных, таким образом формируется множество X . Аналогично формируется логическое выражение. Рассмотрение более сложных случаев имеет важное значение, однако это выходит за рамки данной статьи. Для более сложного примера можно обратиться к [3].

На основе разработанных алгоритмов был создан инструментарий, представляющий интерфейс пользователя для доступа к сетевой базе данных. Была протестирована корректная работа алгоритма преобразования пользовательского запроса. Для тестирования программного обеспечения использовалась схема базы данных «Аэропорт» [7], в которой представлена информация о действующих рейсах, обслуживающих их самолетах, пассажирах, а также сведений о регистрации и продажи билетов. Тестирование проводилось для платформ Borland BDE (Paradox 7.0) и Oracle8i.

Заключение

В данной работе был рассмотрен механизм автоматического преобразования запросов, сформулированных в рамках пользовательского представления данных, в реальные запросы к базам данных. Данный механизм является начальным этапом формализации операций преобразования моделей данных. Также разработанный алгоритм, позволяя облегчить реализацию пользовательских интерфейсов к реляционным базам данных, имеет ценное практическое применение.

Для дальнейшего развития средств автоматического преобразования моде-

лей данных важна формализация исходной (внутренней) и целевой (пользовательской) моделей данных. Такая формализация должна включать в себя описание схемы модели в наиболее общем виде, определение ограничений целостности и области допустимых значений. Дальнейшим этапом в развитии является описание и классификация операций преобразования моделей, их строгое обоснование.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигалов Влад. *Как нам обустроить поиск в Сети?* // Открытые Системы. 2000. №12. <http://www.osp.ru/os/2000/12/053.htm>
2. Калиниченко Л.А. *Методы и средства интеграции неоднородных баз данных*. М.: Наука, 1983. С.423.
3. Зыкин С.В. *Формирование пользовательского представления реляционной базы данных с помощью отображений*. // Программирование. 1999. №3, С.70–80.
4. Зыкин С.В. *Межмодельные отображения в базах данных*. Омск: ОмГУ, 2000. <http://newasp.omskreg.ru/db/index.html>
5. Мейер Д. *Теория реляционных баз данных*. М. : Мир, 1987. С.608
6. Ульман Дж. *Основы систем баз данных*. М. : Финансы и статистика, 1983. С.334.
7. Зыкин С.В. *Базы данных*. // Методические указания и практические задания для студентов математического факультета. Омск : ОмГУ, 1999. С.23.
8. Дейт К. *Введение в системы баз данных, 6-е издание*. К.; М.; СПб.: Издательский дом «Вильямс», 2000. С.782
9. Кузнецов С.Д. *Введение в системы управления базами данных* // СУБД. 1995. №1,2,3,4, 1996. №1,2,3,4,5

Математические структуры и моделирование

Вып. 11

Сборник научных трудов

Редактор Е.В. Брусницына

Подготовлено к печати ООО «Издательство Наследие. Диалог-Сибирь»

Лицензия ЛР № 071680 от 04.06.98.

Подписано в печать 25.06.2003.

ОП. Формат 60 × 84 1/8. Печ.л. 23,5. Уч.-изд.л. 21,0.

Тираж 140 экз.

Отпечатано в Полиграфическом центре КАН

644050, г. Омск, пр. Мира, 32, ком.11, тел. (381-2) 65-47-31

Лицензия ПЛД № 58-47 от 21.04.97 г.