Математические структуры и моделирование
2003, вып. 11, с. 34–38

УДК 517

ТРАЕКТОРНЫЕ КРИВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Н.Чуканов

The method of the local description of the dynamic system trajectory on the base of the connection and the method of the connection forming from Frenet-Serret equations are considered in the paper.

Кривые в расслоениях. Пусть кривая c имеет вид $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Будем искать горизонтальную кривую c в пространстве расслоения, накрывающую c в базе и начинающуюся в заданной точке g_0 слоя $G = p^{-1}(x)$. В локальных координатах прямого произведения (g, x) в пространстве расслоения кривая с должна иметь вид $(g(t),\ x(t))$. Из условия горизонтальности касательного вектора $(dg(t)/dt,\ dx(t)/dt)$ будем иметь для формы связности [1]:

$$\omega = \omega^0 + g(A_\mu dx^\mu)g^{-1}; \tag{1}$$

$$\omega\left(\frac{dg(t)}{dt},\ \frac{dx(t)}{dt}\right) = -\frac{dg(t)}{dt}\ g^{-1}(t) + \frac{dx^\mu(t)}{dt}\ g(t)\ A_\mu(x(t))\ g^{-1}(t) = 0. \tag{2}$$

Обозначая через $B(t) = dx^\mu/dtA_\mu(x)$. Тогда для функции $g(t)$ получим уравнение: $dg/dt - gB = 0$.

Если слой F расслоения – векторное пространство R^m и группа G действует линейно, то элементы ξ алгебры Ли g можно считать матрицами $A_\xi : R^m \to R^m$. Пусть $\eta^1, \ldots, \eta^m$ – координаты в слое R^m. Если $A_\xi = (a_i^j)$, то поле $A_\mu(x)$ имеет матричный вид: $A_\mu(x) = (A_\mu(x))_i^j = a_{i\mu}^j(x)$ – матрица в $R^m : \xi^j = a_i^j \eta^i$.

Таким образом, в векторном расслоении со слоем R^m связность задается (локально) матрицей, зависящей от x и $\mu : a_{j\mu}^i(x); i, j = 1, \ldots, m; \mu = 1, \ldots, n = dimM$, или матричнозначной формой $a_{j\mu}^i\ dx^\mu = A_\mu\ dx^\mu$.

Если само расслоение – касательное расслоение многообразия M (со слоем R^n), то имеет смысл говорить о кручении: $a_{j\mu}^i - a_{\mu j}^i = T_{\mu j}^i = -T_{j\mu}^i$ (тензор в M) и о симметричности связности, если $T_{\mu j}^i = 0$.

E-mail: chukanov@iitam.omsk.net.ru
Омский филиал Института математики СО РАН
Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 01-07-90003)

Параллельный перенос слоя F вдоль пути $c(t)$ в базе является линейным преобразованием. В локальных координатах $x_a^1, \ldots, x_a^n$ области $U_a \subset M$ определяется оператор ковариантного дифференцирования сечений векторного расслоения:

$$\nabla_\mu \psi^i(x) = \frac{\partial \psi^i(x)}{\partial x^\mu} + a_{jm}^i(x)\psi^j(x). \tag{3}$$

Для гладкой кривой $c : x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)), 0 \leq t \leq 1$, линейный оператор параллельного переноса слоя вдоль пути из точки $c(0)$ в точку $c(1)$ формируется хронологической экспонентой [2]: $T\exp\int_0^1 (d/dt - \nabla_{dc/dt})dt$. Выражение $T\exp\int_0^t (A(\tau)d\tau) = B(t)$ удовлетворяет уравнению: $dB/dt = [A(t), B(t)]$, а вектор $\eta(t) = B(t)\eta_0$ удовлетворяет уравнению $d\eta(t)/dt = A(t)\eta(t)$. Полагая $A(t) = d/dt - \nabla_{dc/dt}$ для гладкой кривой $c(t)$, получим оператор параллельного переноса вдоль кривой. Параллельный перенос определятся из уравнения:

$$\nabla_{\frac{dc}{dt}} \eta(t) = \frac{dx^\mu}{dt}\ \nabla_\mu \eta(t) = 0 \tag{4}$$

или:

$$\begin{gathered} \frac{d\eta^i(t)}{dt} + a_{j\mu}^i(t)\ \frac{dx^\mu}{dt}\ \eta^j(t) = 0; \\ d\eta^i(t) = -a_{j\mu}^i(t)\ dx^\mu \eta^j(t). \end{gathered} \tag{5}$$

В этом случае имеем:

$$A(t) = \frac{d}{dt} - \nabla_{\frac{dc}{dt}} = -a_{j\mu}^i(t)\frac{dx^\mu}{dt}. \tag{6}$$

Для динамической системы $\frac{dx}{dt} = f(x)$; $x = (x^1, \ldots, x^n)$; $f = (f^1, \ldots, f^n)$ с вектором начальных условий $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ уравнения (5) могут быть записаны в виде:

$$\frac{df^i}{dx_0^\mu} = -a_{j\mu}^i f^j. \tag{7}$$

Рассмотрим пример динамической системы – линейный гармонический осциллятор:

$$\begin{gathered} \frac{dx_1}{dt} = \omega * x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} = -\omega * x_1, \end{gathered}$$

для которого построим сопровождающий репер в каждой точке многообразия – базы:

$$\begin{gathered} \nu_0 = (-x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5}; x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5}); \\ \nu_1 = (x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5}; x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-0,5}). \end{gathered}$$

Далее, предположим, при $t = 0 : x_2 = 0; x_1 > 0; \nu_0 = (0; 1)$ – касательный вектор; $\nu_1 = (1; 0)$ – нормальный вектор. Для любой точки базы введем параметр θ:

$$\theta = \operatorname{arctg}(x_2 x_1^{-1});\ \ if x_2 \geq 0;$$
$$\theta = \pi + \operatorname{arctg}(x_2 x_1^{-1});\ \ if x_2 < 0.$$

Тогда любым x_1, x_2 можно сопоставить элемент однопараметрической группы $g \in SO(1)$:

$$g(t) = \begin{Vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{Vmatrix}$$

$$g^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{Vmatrix}$$

$$(dg/dt)g^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{Vmatrix}.$$

Компоненты матрицы A_0 (индекс μ соответствует индексам векторов ν_0, ν_1):

$$a_{00}^0 = a_{10}^1 = 0; a_{10}^0 = -a_{00}^1 = -(x_1^2 + x_2^2)^{-0{,}5};$$

матрицы A_1: $a_{01}^0 = a_{11}^1 = 1; a_{11}^0 = a_{01}^1 = 0$. Компоненты тензора кручения $T_{mj}^i = a_{jm}^i - a_{mj}^i$:

$$T_{01}^0 = -T_{10}^0 = a_{01}^0 - a_{10}^0 = 1 + (x_1^2 + x_2^2)^{-0{,}5};$$

$$T_{01}^1 = -T_{10}^1 = a_{01}^1 - a_{10}^1 = 0; T_{00}^0 = T_{11}^0 = T_{00}^1 = T_{11}^1 = 0.$$

Форма связности определяется из соотношений (1), (2).

Построение сопровождающего репера, связанного с кривой. Рассмотрим кривую, задаваемую вектором $x(t) = (x^1(t),\ \dots\ , x^2(t))$, где x^i предполагаются гладкими функциями от t с не обращающимися в нуль одновременно производными. В каждой точке кривой составляем касательный вектор ξ с компонентами $\xi^i(t) = d\xi^i(t)/dt$. Выпишем последовательность векторов: $\xi(t),\ d\xi(t)/dt,\ \dots\ , d^{n-1}\xi(t)/dt^{n-1}$ в точке кривой. Рассмотрим случай, когда эти n векторов будут в каждой точке линейно независимы. Построим p-ю соприкасающуюся плоскость в касательном пространстве R^n, проходящую через точку и построенную на первых p векторах $R^p : R^1 \subset \ldots \subset R^p \subset R^{p+1} \ldots R^{n-1}$. Далее построим ортонормированный сопровождающий репер, связанный с каждой точкой кривой, с ортами $\nu_0, \nu_1,\ \dots\ , \nu_{n-1}$:

$$\nu_0 = \xi/|\xi|; (\nu_1 \in R^2) \wedge (\nu_1 \perp R^1),\ \dots\ , (\nu_p \in R^{p+1}) \wedge (\nu_p \perp R^p),\ \dots\ , (\nu_{n-1} \perp R^{n-1}).$$

Орт ν_0 – касательный к кривой; $\nu_j (j = 1, \ldots, n-1)$ – нормаль к кривой. Для определения ортов $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$ по производным $dx(t)/dt, \ldots, d^{n-1}x(t)/dt^{n-1}$ можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$
\begin{gathered}
[l]\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\nu_0 + \xi\frac{d\nu_0}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\ \nu_0 + \xi\kappa_1\nu_1; \\
\nu_1 = (\xi\kappa_1)^{-1}\left(\frac{d\xi(t)}{dt} - \frac{d\xi}{dt}\ \nu_0\right); \\
\ldots \\
\frac{d^p\xi(t)}{dt^p} = \frac{d(\xi^{[p-1]}\nu_{\xi^{[p-1]}})}{dt} = \\
= \frac{d\xi^{[p-1]}}{dt}\nu_{\xi^{[p-1]}} + \xi^{[p-1]}\frac{d\nu_{\xi^{[p-1]}}}{dt} = \frac{d\xi^{[p-1]}}{dt}\ \nu_{\xi^{[p-1]}} + \xi^{[p-1]}k_p\nu_p; \\
\nu_p = (\xi^{[p-1]}k_p)^{-1}\left(\frac{d^p\xi(t)}{dt^p} - \frac{d\xi^{[p-1]}}{dt}\nu_{\xi^{[p-1]}}\right); \ldots \\
\frac{d^{n-1}\xi(t)}{dt^{n-1}} = \frac{d(\xi^{[n-2]}\nu_{\xi^{[n-2]}})}{dt} = \\
= \frac{d\xi^{[n-2]}}{dt}\nu_{\xi^{[n-2]}} + \xi^{[n-2]}\frac{d\nu_{\xi^{[n-2]}}}{dt} = \frac{d\xi^{[n-2]}}{dt}\ \nu_{\xi^{[n-2]}} + \xi^{[n-2]}k_{n-1}\nu_{n-1}; \\
\nu_{n-1} = (\xi^{[n-2]}k_{n-1})^{-1}\left(\frac{d^{n-1}\xi(t)}{dt^{n-1}} - \frac{d\xi^{[n-2]}}{dt}\nu_{\xi^{[n-2]}}\right).
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Коэффициенты k_p определяются из условия нормирования ортов:

$$
k_p = (\xi^{[p-1]}])^{-1}\ \left|\frac{d^p}{\xi(t)}dt^p - \frac{d\xi^{[p-1]}}{dt}\ \nu_{\xi^{[p-1]}}\right|. \tag{9}
$$

Для производных $d\nu_0/dt, \ldots, d\nu_{n-1}/dt$ ортов сопровождающего репера кривой в евклидовом пространстве R^n запишем соотношения Френе-Серре [3]:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\nu_0}{dt} &= \kappa_1\nu_1; \\
\frac{d\nu_1}{dt} &= -\kappa_1\nu_0 + \kappa_2\nu_2; \\
&\ldots \\
\frac{d\nu_p}{dt} &= -\kappa_p\nu_{p-1} + \kappa_{p+1}\nu_{p+1}; \\
&\ldots \\
\frac{d\nu_{n-1}}{dt} &= -\kappa_{n-1}\nu_{n-2},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $p = 0 \ldots n-1$; если: $(p < 1) \vee (p > n-1)$; то $\kappa_p = 0$
или в матричной форме:

$$
\frac{dN}{dt} = KN, \tag{11}
$$

где матрицы N и K задаются соотношениями:

$$
N = (\nu_0, \nu_1, \ldots \nu_{n-1});
$$

$$K = \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & -\kappa_{n-2} & 0 & \kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 & -\kappa_{n-1} & 0 \end{array} \right\|.$$

Коэффициент κ_j называется j – кривизной кривой в данной точке. Исходя из соотношений Френе-Серре получим способ определения $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ и $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ по индукции:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \left|\frac{d\nu_0}{dt}\right|; \nu_1 = \kappa_1^{-1}\frac{d\nu_0}{dt}; \\ \kappa_2 &= \left|\frac{d\nu_1}{dt} + \kappa_1\nu_0\right|; \nu_2 = \kappa_2^{-1}\left(\frac{d\nu_1}{dt} + \kappa_1\nu_0\right); \\ \dots & \\ \kappa_p &= \left|\frac{d\nu_{p-1}}{dt} + \kappa_{p-1}\nu_{p-2}\right|; \nu_p = \kappa_p^{-1}\left(\frac{d\nu_{p-1}}{dt} + \kappa_{p-1}\nu_{p-2}\right); \\ \dots & \\ \kappa_{n-1} &= \left|\frac{d\nu_{n-2}}{dt} + \kappa_{n-2}\nu_{n-3}\right|; \nu_{n-1} = \kappa_{n-1}^{-1}\left(\frac{d\nu_{n-2}}{dt} + \kappa_{n-2}\nu_{n-3}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Формирование аффинной связности по сопровождающему реперу. Гладкому векторному полю $f(x)$ и вектору $x(0)$ сопоставим кривую c, задаваемую вектором $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ с $x(0) = x(t)|_{t=0}$ и $dx(t)/dt = f(x)$. Перепишем соотношения Френе-Серре в форме разложения до первой степени по dx/dt:

$$\frac{d\nu^i}{dt} = K^i_j\nu^j \approx \sum_{jk}\Gamma^i_{jk}\ \nu^j\frac{dx^k}{dt}, \tag{13}$$

где $\Gamma^i_{jk} = (\partial K^i_j/\partial(dx_k/dt))$. Соотношения Френе-Серре в такой форме позволяют определить аффинную связность локально – с помощью символов Кристоффеля Γ^i_{jk}.

Литература

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: методы и приложения.* М.: Наука, 1986.
2. Шварц А.С. *Квантовая теория поля и топология.* М.: Наука, 1989.
3. Arreaga G., Capovilla R., Guven J. *Frenet-Serret dynamics.* Los Alamos E-paper: hep-th/0105040 (2001).