Математические структуры и моделирование
2003, вып. 11, с. 28–33

УДК 517

ОПИСАНИЕ ГЛАДКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СПИСКОВ ХАРАКТЕРИСТИК ОСОБЫХ ТОЧЕК

В.А. Стадников, С.Н. Чуканов

The method of the global description of dynamic systems on the base of the performances lists of DS singular points, invariant to maps of DS state vector is considered in the paper

Формальное описание гладких нелинейных динамических систем в форме Σ:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1}$$

где $x \in M \in R^n; f \in R^n$, имеет недостаток, заключающийся в том, что при отображении вектора состояния

$$y = U(x); x = U^{-1}(y) \tag{2}$$

изменяется описание динамической системы. Найдем характеристики системы Σ , не зависящие от отображения $y = U(x)$, если это отображение является гладким и монотонным.

Отметим, что описание динамической системы (1) задает векторное поле:

$$\xi = \sum_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Напомним основные определения топологии особых точек векторных полей. Точка x_0 называется особой точкой векторного поля, если $f(x_0) = 0$; изолированной особой точкой, если $f(x) \neq 0$ в малой окрестности точки x_0; невырожденной (гиперболической) особой точкой, если $\det(f_x) \neq 0$ в точке x_0. Степенью $deg\ U$ гладкого отображения по отношению к правильному значению точки y называется сумма $deg\ U = \sum_i \mathrm{sgn}[\det(U(x_i))]$ по точкам отображения, удовлетворяющим условию $U(x_i) = y$. Заданием единичного векторного поля $n = f/|f|$ на многообразии $M \in R^n$ (при условии $f \neq 0$) определено отображение Гаусса

E-mail: chukanov@iitam.omsk.net.ru
Омский филиал Института математики СО РАН
Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 01-07-90003)

$n\ : M\ \rightarrow\ S^{n-1}$. Индексом изолированной особой точки x_0 векторного поля является степень отображения Гаусса: $ind_{x_0}(f) = deg(f|_{x=x_0})$ [2,4].

Для системы, заданной соотношением (1) с вектором состояния x, соотношение с вектором состояния $y = U(x)$ можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\ \frac{dy}{dt} = f(U^{-1}(y)) \tag{4}$$

или в виде:

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial(U^{-1}(y))}{\partial y}\right)^{-1} f(U^{-1}(y)), \tag{5}$$

то есть векторное поле f(x) отображается в векторное поле:

$$F(y) = \left(\frac{\partial(U^{-1}(y))}{\partial y}\right)^{-1} f(U^{-1}(y)). \tag{6}$$

В окрестности особой точки x_0 векторного поля f можно записать выражение для ростка первой степени:

$$f(x) \approx f_x\ (x - x_0), \tag{7}$$

то есть поведение системы описывается приближенным соотношением:

$$\frac{dx}{dt} \approx f_x\ (x - x_0). \tag{8}$$

Для отображения $y = U(x)$ в окрестности особой точки x_0 справедливо соотношение:

$$y(x) - y(x_0) \approx U_x\ (x - x_0), \tag{9}$$

и с учетом (6):

$$\frac{dy}{dt} \approx U_x\ f_x\ U_x^{-1}\ (y - U(x_0)). \tag{10}$$

Если $f_x \neq 0$ (выполняется для невырожденных особых точек) и $U_x \neq 0$ (выполняется при строгой монотонности U) в окрестности x_0, то особой точкой системы (10) является $y_0 = U(x_0)$. Если эта особая точка является изолированной и невырожденной, то y_0 является особой точкой и для системы (5).

В частном случае, если система (1) является линейной Σ:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{11}$$

и преобразовании (2) также является линейным:

$$y = Tx, \tag{12}$$

то соотношение (10) примет вид:

$$\frac{dy}{dt} = (TAT^{-1})y. \tag{13}$$

Инвариантами по отношению к отображению U являются собственные значения λ_i матрицы $U_x f_x U_x^{-1}$; в случае линейной системы – собственные значения матрицы $T\ A\ T^{-1}$. Для якобиана f_x можно сформировать симметрические функции от собственных значений $\sigma_i(\lambda_1, \ \dots \ , \lambda_n)$:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 1; \\ \sigma_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n; \\ \sigma_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + ... + \lambda_{n-1}\lambda_n; \\ &\dots \\ \sigma_n &= \lambda_1\lambda_2...\lambda_n. \end{aligned} \tag{14}$$

а также их усредненные оценки:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \sigma_1 n^{-1}; \\ \bar{\lambda}_2 &= (\sigma_2 (n!)^{-1}(n-2)!2!)^{1/2}; \\ &\dots \\ \bar{\lambda}_i &= (\sigma_i (n!)^{-1}(n-i)!i!)^{1/i}; \\ &\dots \\ \bar{\lambda}_n &= (\sigma_n)^{1/n}. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, список собственных значений якобианов векторных полей в особых точках, а также симметрические функции от собственных значений и усредненные оценки симметрических функций являются характеристиками, инвариантными по отношению к преобразованию вектора состояния системы.

Другими характеристиками – инвариантными по отношению к преобразованию вектора состояния системы – является список индексов особых точек векторных полей. Число собственных значений якобиана f_x в особых точках векторных полей с отрицательными вещественными частями называется индексом Морса (Morse index) в этих точках. Якобианы f_x^1 и f_x^2 сопряжены, если они имеют одинаковый индекс; для сопряженных якобианов существует такая матрица h, что:

$$f_x^2 = h\ f_x^1 h^{-1}.$$

Выбором матрицы h можно добиться того, что f_x будет сопряжена с одной из матриц $L_i (0 \le i \le n)$, которые являются матрицами с диагональными единичными элементами и первыми i элементов которых – отрицательные [3]. Следовательно, в особых точках системам Σ с индексом i можно сопоставить линейные системы

$$\Sigma_L : \frac{dx}{dt} = L_i\ x,$$

формальное решение которых можно представить в виде: $x = A\ x_0$; где матрица A размерности $(n \times n)$ соответствует отображению $x|_{t=0} \to x|_{t>0}$.

Матрица A топологически сопряжена с одной из матриц вида:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \pm e^{-1} & & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm e^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pm e^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pm e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \pm e & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \pm e \end{array} \right\|$$

В этих матрицах i – диагональных компонент имеют абсолютное значение $e^{-1} < 1$; $n - i$ – диагональных компонент имеют абсолютное значение $e > 1$; при четном количестве отрицательных компонент на диагонали матрицы ориентация отображения сохраняется (детерминант положителен); при нечетном – ориентация отображения обращается (детерминант отрицателен).

Пусть на многообразии $M \in R^n$ определено векторное поле f и единичное векторное поле $n = f/|f|(f \neq 0)$, то есть определено отображение Гаусса $n : M \to S^{n-1}$. Если ∂M – граница M, то определена степень векторного поля n на ∂M: $deg\ n|_{\partial M}$ [1]:

$$deg\ n|_{\partial M} = (V^n)^{-1} \int\limits_{\partial M} \varepsilon_{ijk\dots}\ \varepsilon^{abc\dots}\ n^a\ (\partial n^b/\partial x^j)\ (\partial n^c/\partial x^k)\dots\ d^{n-1}\partial M_i,$$

где: $V_n = \int\limits_{\partial M} \varepsilon_i^a \nu^a\ d^{n-1}\partial M_i$; ν – единичный вектор, нормальный к $d^{n-1}\partial M$; $d^{n-1}\partial M_i$ – проекция нормали к ∂M на i-е направление.

Если векторное поле f на многообразии $M \in R^n$ имеет m изолированных особых точек $x_1, \dots, x_m$, не принадлежащих границе ∂M, и векторное поле на ∂M направлено наружу, то $deg\ n|_{\partial M} = \sum_i\ ind_{x_i}(f)$ (лемма Хопфа). Степень векторного поля $n = f/|f|$ на $\partial M (deg\ n|_{\partial M})$ инвариантна по отношению к отображению: $y = U(x)$.

Рассмотрим пример динамической системы, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2\ (x_2^2 - 1);$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1\ (x_1^2 - 1).$$

Якобиан векторного поля этой динамической системы равен:

$$f_x = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 3x_2^2 - 1 \\ -3x_1^2 + 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Список собственных значений якобиана и список индексов векторных полей в особых точках:

i	$(x_1;x_2)$	λ_1	λ_2	σ_1	σ_2	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$ind(f_i)$
1	$(0;0)$	1	-1	0	1	$0,5$	1	-1
2	$(1;1)$	-2	2	0	4	2	2	-1
3	$(1;-1)$	-2	2	0	4	2	2	-1
4	$(-1;1)$	-2	2	0	4	2	2	-1
5	$(-1;-1)$	-2	2	0	4	2	2	-1

Если выбрать сферу с радиусом $R = 2$ (все особые точки находятся внутри сферы), то степень векторного поля на сфере, равная сумме индексов векторного поля внутри сферы, равна -5.

Отображение: $y_1 = 2x_1 + x_2$; $y_2 = x_1 - 2x_2$ с якобианом:

$$U_x = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$$

$$U_x^{-1} = \begin{Vmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & -0,4 \end{Vmatrix},$$

откуда:

$$U_x \; f_x \; U_x^{-1}(y) =$$

$$= \begin{Vmatrix} -1,2(0,4y_1+0,2y_2)^2+1,2x_2^2 & -0,6(0,4y_1+0,2y_2)^2-2,4(0,2y_1-0,4y_2)^2+1 \\ 2,4(0,4y_1+0,2y_2)^2+0,6(0,2y_1-0,4y2)2-1 & 1,2(0,4y_1+0,2y_2)^2-1,2(0,2y_1-0,4y_2)^2 \end{Vmatrix}.$$

Система после отображения может быть описана соотношениями:

$$\frac{dy_1}{dt} = 2(0,2y_1-0,4y_2)((0,2y_1-0,4y_2)^2-1)-(0,4y_1+0,2y_2)((0,4y_1+0,2y_2)^2-1);$$
$$\frac{dy_2}{dt} = (0,2y_1-0,4y_2)((0,2y_1-0,4y_2)^2-1)+2(0,4y_1+0,2y_2)((0,4y_1+0,2y_2)^2-1).$$

Список собственных значений якобиана и список индексов векторных полей в особых точках:

i	$(y_1;y_2)$	λ_1	λ_2	σ_1	σ_2	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$ind(F_i)$
1	$(0;0)$	1	-1	0	1	$0,5$	1	-1
2	$(0,6;-0,2)$	-2	2	0	4	2	2	-1
3	$(0,6;0,2)$	-2	2	0	4	2	2	-1
4	$(-0,6;-0,2)$	-2	2	0	4	2	2	-1
5	$(-0,6;0,2)$	-2	2	0	4	2	2	-1

Если выбрать сферу с радиусом $R = 1$ (все особые точки находятся внутри сферы), то степень векторного поля на сфере, равная сумме индексов векторного поля внутри сферы, равна -5. Таким образом, список собственных значений якобианов векторных полей в особых точках, список индексов векторных полей в особых точках, а также сумма индексов векторного поля на сфере, содержащей все особые точки, не изменяются при отображении $y_1 = 2x_1 + x_2; y_2 = x_1 - 2x_2$; и являются инвариантными характеристиками, не зависящими от выбора описания вектора состояния.

Литература

1. Раджамаран Р. *Солитоны и инстантоны в КТП.* М.: Мир, 1985.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: методы и приложения.* М.: Наука, 1986.
3. Палис Ж., Ди Мелу В. *Геометрическая теория динамических систем.* М.: Мир, 1986.
4. Хирш М. *Дифференциальная топология.* М., 1979.