*Математические структуры и моделирование*
2002, вып. 10, с. 26–36

УДК 621.317

# ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО АППРОКСИМАЦИОННЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ В ЗАДАЧЕ БОЛЬЦА

**В.Е. Рольщиков**

In this article the question of existence one-parameter family's decisions of Eller's equation in Bolza problem for nonsmooth functional is studied.

## Введение

В работе для функционалов с негладкими терминальной и подынтегральной функциями определяются аппроксимационные экстремали из класса абсолютно непрерывных функций. При некоторых условиях они образуют однопараметрическое семейство. В гладком случае при наличии экстремали исследуется сходимость к ней аппроксимационных экстремалей при стремлении параметра к нулю.

Рассмотрим задачу

$$J[x(\cdot)] = \ell(x(t_0), x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\nu(dt) \ \to \inf \ , \tag{1}$$

где $\nu$ - мера Лебега на $\mathbb{R}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in [t_0, t_1]$. Будем предполагать, что функции $x(t)$, среди которых ищется минимум функционала $J$, принадлежат классу $AC_n([t_0, t_1])$ – абсолютно непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций. Пусть функция $L$ ограничена на любом ограниченном множестве и измерима по $(t, x, \dot{x})$ относительно $\sigma$-алгебры [7] $\mathbf{B}_* = \mathbf{B}[t_0, t_1] \times \mathbf{B}[\mathbb{R}^n] \times \mathbf{B}[\mathbb{R}^n]$ - минимальной $\sigma$-алгебры, содержащей любые множества $P$ вида $P = D \times D_1 \times D_2$, где $D \in \mathbf{B}[t_0, t_1]$, $D_1 \in \mathbf{B}[\mathbb{R}^n]$, $D_2 \in \mathbf{B}[\mathbb{R}^n]$, а $\mathbf{B}[M]$ - борелевская $\sigma$-алгебра множества $M$. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in AC_n([t_0, t_1])$ отображение

$$g(t) = L(t, x(t), \dot{x}(t))$$

будет измеримым по Лебегу на $[t_0, t_1]$ [5].

Обозначим $z = (x, \dot{x}) = (x_1, ..., x_n, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$, $\mu$ – мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Как известно [4], если функции $\ell(z)$, $L(t, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial L}{\partial z_i}, \ \frac{\partial \ell}{\partial z_i}, \ i \in \overline{1, 2n}$$

© 2002 В.Е. Рольщиков
E-mail: ver@econ.cgu.chel.ru
Челябинский государственный университет

по совокупности переменных то функционал $J$ дифференцируем по любому направлению $q(\cdot)$: $q(t) = (h(t), \dot{h}(t))$, $h(\cdot) \in C^1_n([t_0, t_1])$. Его производная задается равенством

$$\acute{J}[x(\cdot), q(\cdot)] = \left\langle \frac{\partial \ell}{\partial x(t_0)}, h(t_0) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \ell}{\partial x(t_1)}, h(t_1) \right\rangle +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial L(t, x(t), \dot{x}(t))}{\partial z}, q(t) \right\rangle dt.$$

В случае, когда функции $\ell$ и $L$ не являются дифференцируемыми, введем понятие аппроксимационной производной функционала $J[x(\cdot)]$ по направлению $q(\cdot)$, аналогичное введенному в [2], [3]. Для каждого фиксированного $t \in [t_0, t_1]$ обозначим

$$a_i(z; r, p; L)(t) = \frac{1}{d_r} \int B_r s_i L(t, z(t) + s) p(r; s) \mu(ds), \ i = \overline{1, 2n}, \tag{2}$$

где $B_r = \overline{B}^{2n}_r(0)$ $\forall y \in \mathbb{R}^{2n}$ $B^{2n}_r(y) = \{z \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|z - y\| < r\}$, $\overline{M}$ – замыкание множества $M$;

$$d_r = \int\limits_{B_r} s_i^2 p(r; s) \mu(ds);$$

функция веса $p: \ (0, \infty) \times \mathbb{R}^{2n} \to [0, \infty)$ такова, что $p(r; s) = 0$ $\forall s \notin B_r$,

$$\int\limits_{B_r} p(r; s) \mu(ds) = 1, \ p(r; s) = p^*(r; \|s\|),$$

а $p(r; \cdot)$ интегрируемая с квадратом по мере $\mu$. Множество всех таких функций $p$ обозначим $G$. Вектор

$$a(z; r, p; L)(t) = (a_1(z; r, p; L)(t), ..., a_{2n}(z; r, p; L)(t))$$

при фиксированном $t$ является вектором аппроксимационного градиента функции $L$ в точке $z$ [2]. Обозначим

$$\left\{ \begin{array}{l} a^1(z; r, p : l)(t) = (a_1(z; r, p; L)(t), ..., a_n(z; r, p; L)(t)), \\ a^2(z; r, p : l)(t) = (a_{n+1}(z; r, p; L)(t), ..., a_{2n}(z; r, p; L)(t)). \end{array} \right. \tag{3}$$

Определим вектор аппроксимационного градиента терминальной части $\ell$ функционала $J$. Обозначим

$$y = (x_1(t_0), ..., x_n(t_0), x_1(t_1), ..., x_n(t_1)),$$

$$a_i(y; r, p; \ell) = \frac{1}{d_r} \int\limits_{B_r} s_i \ell(y + s) p(r; s) \mu(ds), \ i \in \overline{1, 2n} \ .$$

Соответственно определяются векторы $a^{(i)}(y; r, p; \ell)$, $i = 1, 2$ (см.(2)).

## 1. Аппроксимационные экстремали

**Определение 1.** Назовем функцию

$$J_a(z(\cdot); r, p; q(\cdot)) = \left\langle a^{(1)}(y; r, p; \ell), h(t_0) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle a^{(2)}(y; r, p; \ell), h(t_1) \right\rangle + \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle a(z; r, p; L)(t), q(t) \rangle \, \nu(dt)$$

аппроксимационной производной функционала $J$ в точке $z(\cdot)$ по направлению $q(\cdot)$.

**Определение 2.** Назовем функцию $x_r(\cdot) \in AC_n([t_0, t_1])$ аппроксимационной экстремалью функционала $J$ при выбранных $r > 0$, $p \in G$, если для любой функции $q(\cdot) = (h(\cdot), \dot{h}(\cdot))$, $h(\cdot) \in C_n^1([t_0, t_1])$ выполняется равенство

$$J_a(z_r(\cdot); r, p; q(\cdot)) = 0,$$

где $z_r(\cdot) = (x_r(\cdot), \dot{x}_r(\cdot))$.

**Теорема 1.** *Пусть $x_r(\cdot)$ – аппроксимационная экстремаль функционала $J$, тогда $x_r(\cdot)$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера*

$$a_i(z; r, p; L)(t) - \frac{d}{dt}(a_{n+i}(z; r, p; L)(t)) = 0, \ i \in \overline{1, n}, \tag{4}$$

*и условиям трансверсальности*

$$a_i(y_r; r, p; \ell) = a_{n+i}(z_r; r, p; L)(t_0), \ i \in \overline{1, n}, \tag{5}$$

$$a_{n+i}(y_r; r, p; \ell) = -a_{n+i}(z_r; r, p; L)(t_1), \ i \in \overline{1, n}. \tag{6}$$

*Здесь $y_r = (x_r(t_0), x_r(t_1))$.* ■

Справедливость теоремы следует из леммы Дюбуа-Реймона [1] и независимости вариаций $h_i(t_0)$, $h_i(t_1)$, $i \in \overline{1, n}$.

## 2. Условия сходимости

Условия существования решений системы уравнений (4) при выполнении условий трансверсальности (5) и (6) и тем более условия сходимости этих решений при $r \to 0$, $r > 0$ являются жесткими даже для достаточно гладких функций $L$ и $\ell$. Далее рассматривается один из возможных случаев, когда удается установить сходимость к решению системы уравнений Эйлера аппроксимационных экстремалей $x_r(\cdot)$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial z_{n+i}}, \ i \in \overline{1, n}, \tag{7}$$

удовлетворяющего условиям трансверсальности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(t_0, z(t_0))}{\partial z_{n+i}} = \dfrac{\partial \ell(y)}{\partial y_i} \\[2ex] \dfrac{\partial L(t_1, z(t_1))}{\partial z_{n+i}} = \dfrac{\partial \ell(y)}{\partial y_{n+i}}. \end{cases} \tag{8}$$

Для упрощения записи рассмотрим случай $n = 1$, для произвольного $n > 1$ выводы будут аналогичны. Преобразуем уравнения (7) и (8). Пусть $z_1(t) = x(t)$, $z_2(t) = \dot{x}(t)$, $z = (z_1, z_2)$ и $z^{(0)} = z(t_0)$, $z^{(1)} = z(t_1)$. Будем далее полагать, что функции

$$\frac{\partial^2 L(t,z)}{\partial z_1 \partial z_2},\ \frac{\partial^2 L(t,z)}{\partial z_2^2}$$

определены и непрерывны

$$\frac{\partial^2 L(t,z)}{\partial z_2^2} > 0\ .$$

Пусть также определены и непрерывны

$$\frac{\partial \ell(z_1^{(0)}, z_1^{(1)})}{\partial z_1^{(0)}},\ \frac{\partial \ell(z_1^{(0)}, z_1^{(1)})}{\partial z_1^{(1)}}.$$

Тогда уравнение (7) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -D_1(t,z) z_2 + D_2(t,z). \end{cases} \tag{9}$$

Здесь

$$D_1(t,z) = \frac{\partial^2 L(t,z)}{\partial z_1 \partial z_2} \Bigg/ \frac{\partial^2 L(t,z)}{\partial^2 z_2},\ D_2(t,z) = \frac{\partial L(t,z)}{\partial z_1} \Bigg/ \frac{\partial^2 L(t,z)}{\partial^2 z_2}.$$

Условия трансверсальности (8) запишутся в виде

$$\begin{cases} g_1^*(z^{(0)}, z^{(1)}) = 0 \\ g_2^*(z^{(0)}, z^{(1)}) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь

$$g_1^*(z^{(0)}, z^{(1)}) = \frac{\partial L(t_0, z(t_0))}{\partial z_2} - \frac{\partial \ell(z_1^{(0)}, z_1^{(1)})}{\partial z_1^{(0)}},$$

$$g_2^*(z^{(0)}, z^{(1)}) = \frac{\partial L(t_1, z(t_1))}{\partial z_2} + \frac{\partial \ell(z_1^{(0)}, z_1^{(1)})}{\partial z_1^{(1)}}\ .$$

Соответствующие системы дифференциальных уравнений для аппроксимационных экстремалей $z_r(t) = (x_r(t), \dot{x}_r(t))$ будут иметь вид

$$\begin{cases} \dot{z}_{r1} = z_{r2} \\ \dot{z}_{r2} = -A_1(z_r; r, p; L)(t) z_{r2} + A_2(z_r; r, p; L)(t). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь

$$A_1(z_r; r, p; L)(t) = \frac{\partial a_2(z_r; r, p; L)(t)}{\partial z_1} \Bigg/ \frac{\partial a_2(z_r; r, p; L)(t)}{\partial z_2}\ ,$$

$$A_2(z_r; r, p; L)(t) = a_1(z_r; r, p; L)(t) \Bigg/ \frac{\partial a_2(z_r; r, p; L)(t)}{\partial z_2}\ .$$

Отметим, что функции $A_i(z_r; r, p; L)(t)$, $i = 1,2$ непрерывны по $(z, r)$ на $\mathbb{R}^2 \times (r^*; 0]$ для некоторого $r^* > 0$ и непрерывно дифференцируемы по $z$ [3].

Обозначим $z_r^{(0)} = z_r(t_0)$, $z_r^{(1)} = z_r(t_1)$, тогда условия трансверсальности (5), (6) можем записать следующим образом

$$\begin{cases} g_1(r, z_r^{(0)}, z_r^{(1)}) = 0 \\ g_2(r, z_r^{(0)}, z_r^{(1)}) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Функции $g_i(r, z_r^{(0)}, z_r^{(1)})$, $i = 1,2$ определяются равенствами

$$g_1(r, z_r^{(0)}, z_r^{(1)}) = a_2(z_r; r, p; L)(t_0) - a_1((z_r^{(0)}, z_r^{(1)}); r, p; \ell),$$

$$g_2(r, z_r^{(0)}, z_r^{(1)}) = a_2(z_r; r, p; L)(t_1) + a_2((z_r^{(0)}, z_r^{(1)}); r, p; \ell).$$

Пусть $p_* \in G$. Обозначим $G_1(p_*)$ – множество функций $p \in G$ таких, что

$$p(r; s) = \frac{1}{r^2} p_*(1; \frac{s}{r}),\ s \in \mathbb{R}^2.$$

Как было установлено в [3] в случае $p \in G_1(p_*)$, $p_* \in G$ функции $A_i(z; r, p; L)(t)$, $g_i(r, z_r^{(0)}, z_r^{(1)}$, $i = 1,2$ непрерывны по $r$ на $(0; r^*]$ для некоторого $r^* > 0$, а при $r \to 0$ $(r > 0)$ сходится к $D_i(t, z)$, $g_i^*(z_1^{(0)}, z_1^{(1)})$, $i = 1,2$ соответственно. Положим,

$$g_i(0, z^{(0)}, z^{(1)}) = g_i^*(z_1^{(0)}, z_1^{(1)}),\ i = 1,2.$$

В этом случае при фиксированной функции $p^*(1; s)$ на единичном шаре $B_1$ уравнение (11) и условия (12) зависят от одного параметра $r$. Вопрос о существовании и сходимости аппроксимационных экстремалей $z_r(\cdot)$ будем решать исходя из условий существования однопараметрического семейства решений краевой задачи (9), (10) [8, 126]. Обозначим $J_c$ – якобиан

$$J_c = \det \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^*(z^{(0)}, z^{(1)})}{\partial z_1^{(0)}} & \frac{\partial g_1^*(z^{(0)}, z^{(1)})}{\partial z_2^{(0)}} \\ \frac{\partial g_2^*(z^{(0)}, z^{(1)})}{\partial z_1^{(0)}} & \frac{\partial g_2^*(z^{(0)}, z^{(1)})}{\partial z_2^{(0)}} \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^*(z^{(0)}, z^{(1)})}{\partial z_1^{(1)}} & \frac{\partial g_1^*(z^{(0)}, z^{(1)})}{\partial z_2^{(1)}} \\ \frac{\partial g_2^*(z^{(0)}, z^{(1)})}{\partial z_1^{(1)}} & \frac{\partial g_2^*(z^{(0)}, z^{(1)})}{\partial z_2^{(1)}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_1^{(1)}(t_1) & h_1^{(2)}(t_1) \\ h_2^{(1)}(t_1) & h_2^{(2)}(t_1) \end{pmatrix} \right]. \tag{13}$$

Здесь $h^{(1)}(t) = (h_1^{(1)}(t), h_2^{(1)}(t))$,и $h^{(2)}(t) = (h_1^{(2)}(t), h_2^{(2)}(t))$ решения системы уравнений в вариациях

$$\begin{cases} \dot{h}_1 - h_2 = 0 \\ h_1 \left[ \frac{\partial^2 L(t, z(t))}{\partial z_1^2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 L(t, z(t))}{\partial z_1 \partial z_2} \right) \right] - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial^2 L(t, z(t))}{\partial z_2^2} h_2 \right] = 0 \end{cases} \tag{14}$$

с начальными условиями $h^{(1)}(t_0) = (1; 0)$, $h^{(2)}(t_0) = (0; 1)$ соответственно.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются следующие условия:*

*1) существует и единственно $z(t) = (x(t), \dot{x}(t))$ – решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям (10);*

*2) функции $D_i(t, z)$, $g_i^*(z^{(0)}, z^{(1)})$, $i = 1, 2$ непрерывно дифференцируемы по $z$ и $z^{(0)}, z^{(1)}$ соответственно;*

*3) существуют единственные на $[t_0, t_1]$ решения $h^{(1)}(t)$,и $h^{(2)}(t)$ системы уравнений в вариациях (14);*

*4) отличен от нуля якобиан $J_c$ (13).*

*Тогда существует на $[t_0; t_1]$ однопараметрическое семейство решений $z_r(t)$ системы (11), удовлетворяющих краевым условиям (12), непрерывное по $r$ и такое, что*

$$\lim_{r\downarrow 0} z_r(t) = z(t) \ \forall t \in [t_0; t_1].$$

■

Отметим, что условия 2) теоремы требует существования непрерывных производных от функции $L$ до третьего порядка, а от функции $\ell$ до второго порядка. Это необходимо для существования якобиана. Доказательство теоремы о существовании однопараметрического семейства решений в [8] основано на том, что для однозначного решения системы (11) достаточно задать начальные условия $z_r^{(0)}$. Если полученное решение удовлетворяет краевым условиям, то выполняются равенства (12). Если из этих равенств можно найти вектор $z_r^{(0)}$, то решение системы (11) $z_r(t, z_r^{(0)})$ будет удовлетворять краевым условиям (12). Таким образом, вопрос о существовании решения краевой задачи (11), (12) сводится к вопросу о существовании неявной функции $r \to z_r^{(0)}$. В книге [6] приводятся условия существования неявной функции, в которых вместо якобиана используется обобщенный якобиан. Непрерывная зависимость решения системы (11) от начального условия $z^{(0)}$ и правых частей уравнений (11) на основании следствия 1 теоремы 1 [9, с.68] будет иметь место в случае непрерывной зависимости $D_i(t, z)$ и $A_i(z; r, p; L)(t)$, $i = 1, 2$ от $(t, z)$ и $(t, z, r)$ соответственно. Используя эти утверждения, можно ослабить условия на степень гладкости функций $L$ и $\ell$.

Доопределим функции $A_i(z; r, p; L)(t)$ и $g_i(r, z_r^{(0)}, z_r^{(1)})$ $i = 1, 2$. Для любого отрицательного $r$ положим

$$A_i(z; r, p; L)(t) = D_i(t, z),$$

$$g_i(r, z_r^{(0)}, z_r^{(1)}) = g_i^*(z_1^{(0)}, z_1^{(1)}), i = 1, 2.$$

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, следуя [6], обозначим: $f^0(x; v)$ – обобщенная производная по направлению

$$f^0(x; v) = \lim_{y\to x} \sup_{t\downarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \ ;$$

$\partial f(x)$ - обобщенный градиент функции $f$ в точке $x$, то есть множество всех линейных непрерывных функционалов $\zeta$ таких, что

$$f^0(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \ \forall v \in \mathbb{R}^n \ .$$

Нам понадобятся следующие определения из [6].

**Определение 4.** Функция $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ регулярна в точке $x \in \mathbb{R}^k$, если:

1) для каждого $v \in \mathbb{R}^k$ существует производная по направлению $\acute{f}(x, v)$;
2) для всех $v \in \mathbb{R}^k$ $\acute{f}(x, v) = f^0(x; v)$.

**Определение 5.** Пусть $X = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Тогда частным обобщенным градиентом по $x_1$ функции $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$, где $x_1 \in \mathbb{R}^k$, $x_2 \in \mathbb{R}^m$, называется обобщенный градиент функции $f(\cdot, x_2)$, он обозначается $\partial_{x_1} f(x_1, x_2)$.

Аналогично определяется $\partial_{x_2} f(x_1, x_2)$.

Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = (f^{(1)}, ..., f^{(m)})$, а функции $f^{(i)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию Липшица в окрестности точки $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим $\Omega_F$ – множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых $F$ недифференцируема.

**Определение 6.** Обобщенным якобианом $\partial F(x)$ функции $F$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка всех $m \times n$ матриц $Z$ , являющихся пределами всевозможных последовательностей $JF(x^{(i)})$ при $x^{(i)} \to x$ ($JF(x^{*(i)}$ - якобиан функции $F$ в точке $x^{(i)}$ ее дифференцируемости), т.е.

$$\partial F(x) = \mathrm{co}\{\lim JF(x^{(i)}) : \ x^{(i)} \to x, \ x^{(i)} \notin \Omega_F\}.$$

Справедливо соотношение

$$\partial F(x) \subseteq \partial(f^{(1)}(x) \times ... \times f^{(m)}(x)),$$

где правая часть включения обозначает множество всех матриц, $i$-я строка которой принадлежит $\partial(f^{(i)}(x))$ $i = \overline{1, m}$.

Будем обозначать $\forall Q \subseteq \mathbb{R}^n$ $\Gamma(Q)$ граница множества $Q$, $S^{(n)} = \Gamma(B_1^{(n)})$.

В доказательстве теоремы о существовании однопараметрического семейства решений уравнений Эйлера (11), удовлетворяющих краевым условиям (12), используется теорема о неявной функции. Приведем три вспомогательных утверждения, которые используются при доказательстве этой теоремы.

**Лемма 1.** *Существуют числа $r > 0$ и $\delta > 0$ такие,что для любого вектора $v \in S^{(m)}$ найдется такой вектор $w \in S^{(m)}$, что для всех $y \in (y_0 + B_r^{(m)})$, $x \in (x_0 + B_r^{(n)})$ и $M \in \partial_y H(x, y)$ выполняется неравенство*

$$\langle w, Mv \rangle \geq \delta \ .$$

■

См. ( [6, 233])

**Лемма 2.** *Если $y$ и $z$ лежат в $y_0 + \overline{B}_r^{(m)}$, то для любого $x \in (x_0 + B_r^{(n)})$ выполняется неравенство*

$$|H(x, y) - H(x, z)| \geq \delta |y - z| \ . \tag{15}$$

■

См. ( [6, 234])

В силу непрерывности отображения $H$ по $(x, y)$ справедливо утверждение.

**Лемма 3.** *Существует* $\alpha \in (0, r]$ *такое, что для любого* $x \in (x_0 + B_\alpha^{(n)})$ *справедливы включения*

$$H(x, y_0) + \frac{r\delta}{k_x} B_1^{(m)} \subset H(x, y_0 + B_r^{(m)}),$$

$$H(x_0, y_0) \in H(x, y_0) + \frac{r\delta}{k_x} B_1^{(m)} \ ,$$

*где* $k_x \geq 2$.

**Доказательство.** Так как отображение $H$ непрерывно по $(x, y)$ , то существует $k \geq 0$ и $\beta > 0$ такие, что для любого $x \in x_0 + B_\beta^{(m)}$ выполняется включение

$$H(x_0, y_0) + \frac{r\delta}{k} B_1^{(m)} \subset H(x, y_0 + B_r^{(m)}) \ . \tag{16}$$

Докажем (16) от противного. $\beta > 0$ $k \geq 0$ $x \in (x_0 + B_\beta^{(m)})$, $z_* :$

$$z_* \in (H(x_0, y_0) + \frac{r\delta}{k} B_1^{(m)}), \ z_* \notin H(x, y_0 + B_r^{(m)}) \ . \tag{17}$$

Выберем последовательности $k^{(i)} \to \infty$, $\beta_i \to 0$, и пусть в (17) им соответствует $x_i$. Тогда имеет место сходимость

$$x_i \to x_0, \ z^{(i)} \to H(x_0, y_0), \ \text{где } z^{(i)} = z_{x_i} \ .$$

В силу непрерывности функции $(x, y) \mapsto H(x, y)$ многозначное отображение $x \mapsto H(x, y_0 + B_r^{(m)})$ непрерывно в метрике Хаусдорфа, следовательно, учитывая (17), получаем

$$\lim_{i \to \infty} z^{(i)} = H(x_0, y_0) \in \Gamma(H(x_0, y_0 + B_r^{(m)})).$$

Последнее включение противоречит тому, что непрерывная функция $y \to H(x_0, y)$ отображает открытое множество $y_0 + B_r^{(m)})$ в открытое. Полученное противоречие доказывает включение (16).

Выберем теперь $\alpha \in (0, \beta]$ таким, чтобы для любого $x \in (x_0 + B_\alpha^n)$

$$H(x, y_0) \in (H(x_0, y_0) + \frac{r\delta}{3k} B_1^{(m)}).$$

Тогда для всех этих $x$ справедливы включения

$$H(x_0, y_0) \in (H(x, y_0) + \frac{r\delta}{2k} B_1^{(m)}) \subset (H(x_0, y_0) + \frac{r\delta}{2k} B_1^{(m)}) \subset H(x, y_0 + rB_1^{(m)}).$$

■

**Теорема 3.** *Пусть $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ непрерывна по совокупности переменных в некоторой окрестности $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ точки $(x_0, y_0)$. Для любого фиксированного $x \in \{p \in \mathbb{R}^n | \ \exists y \in \mathbb{R}^m \ (p, y) \in W\}$ $H(x, \cdot)$ липшецевая функция по $y \in \{z \in \mathbb{R}^m | \ (x, z) \in W\}$ и отображение $(x, y) \mapsto \partial_y H(x, y)$ полунепрерывно сверху по включению. Пусть*

$$H(x_0, y_0) = 0$$

*и $\partial_y H(x_0, y_0)$ имеет максимальный ранг. Тогда существует $U$ окрестность точки $x_0$ и $V$ окрестность точки $y_0$ такие, что для любого $x \in U$ существует $y_x \in V$:*

$$H(x, y_x) = 0.$$

*При этом функция $x \mapsto y_x$ непрерывна по $x$ на множестве $U$.*

**Доказательство.** Выберем произвольные $x \in (x_0 + B^n_\alpha)$, $z_x \in (H(x, y_0) + \frac{r\delta}{2k} B_1^{(m)})$. Пусть точка $y_x$ доставляет минимум функции

$$\psi_x(y) = |z_x - H(x, y)|^2$$

на замкнутом шаре $y_0 + \overline{B}_r^{(m)}$. Покажем, что $y_x$ принадлежит внутренности этого множества, т.е. $y_x \in (y_0 + \overline{B}_r^{(m)})$. Доказывать будем от противного. Пусть $y_x \in (y_0 + S_r^{(m)})$, тогда, используя неравенство треугольника и учитывая оптимальность $y_x$, получим

$$\frac{r\delta}{2k} > |z_x - H(x, y_0)| \geq |H(x, y_x) - H(x, y_0)| \geq$$

$$r|y_x - y_0| - |z_x - H(x, y_x)| \geq \delta r - |z_x - H(x, y_0)| >$$

$$> \delta r - \frac{r\delta}{2k} = \frac{r\delta(2k-1)}{2k} \ .$$

Полученное неравенство

$$\frac{r\delta}{2k} > \frac{r\delta(2k-1)}{2k}$$

противоречит тому, что $k \geq 2$. Так как $\psi_x(y)$ достигает минимума в точке $y_*$, то по [6, 72]

$$0 \in \partial\psi_x(y_x) = 2(z_x - H(x, y_x))\partial_y H(x, y_x).$$

По лемме 1 все матрицы $M \in \partial_y H(x, y_x)$ невырожденны, следовательно,

$$H(x, y_*) = z_x. \tag{18}$$

Таким образом, для любого $x \in (x_0 + B^n_\alpha)$ для каждого $z_*$ :

$$z_* \in (H(x, y_0) + \frac{r\delta}{2k} B_1^{(m)})$$

определено единственное (в силу (15)) $y_x \in (y_0 + B_r^{(m)})$ такое, что выполняется (18). Следовательно, определена обратная функция $g_x(z) = y_x$. Определим функцию $x \mapsto \varphi(x)$ соотношением

$$\varphi(x) = g_x(0) \ .$$

Это возможно, т.к. $H(x_0, y_0) = 0 \in (H(x, y_0) + \frac{r\delta}{2k} B_1^{(m)})$, т. е. в качестве $z_*$ можно взять 0. Покажем, что функция $\varphi$ непрерывна по $x$ на $x_0 + B_\alpha^{(n)}$. Предположим противное. Тогда существуют $x^* \in (x_0 + B_\alpha^{(n)})$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \ |x_\delta - x^*| < \delta \ : \ |g_{x^*}(0) - g_{x_\delta}(0)| > \varepsilon \ .$$

Выберем последовательность $\delta_i \ : \ \forall i \ \delta_i > 0, \delta_i \to 0 \ i \to \infty$. Тогда последовательность $x^{(i)} = x_{\delta_i}$ сходится $x^*$. Далее, последовательность $y_i = g_{x_i)}(0)$ содержится в компакте $y_0 + B_r^{(m)}$. Выберем из последовательности $y_i$ сходящуюся, оставив за ней ту же нумерацию. Пусть

$$y^* = \lim_{i \to \infty} y_i \ ,$$

тогда

$$|g_{x^*}(0) - y^*| \geq \varepsilon.$$

В то же время

$$H(x^*, g_{x^*}(0)) = 0 = H(x^*, y^*) = \lim_{i \to \infty} H(x_i, y_i) \ ,$$

что противоречит (15). Полученное противоречие доказывает непрерывность функции $\varphi$. Для завершения доказательства теоремы достаточно взять $U = (x_0 + B_\alpha^{(n)}), \ V = (y_0 + B_r^{(m)})$.

Обозначим $f(t, z) = (f^{(1)}(t, z), f^{(2)}(t, z))$ - вектор правых частей системы (9),

$$f^{(1)}(t, z) = z_2, \ f^{(2)}(t, z) = -D_1(t, z) z_2 + D_2(t, z).$$

■

Отметим, что при фиксированном $x$ многозначное отображение $y \mapsto \partial_y H(x, y)$ является полунепрерывным сверху по включению, а множество $\partial_y H(x, y)$ – выпуклым и замкнутым. Данная теорема отличается от теоремы в [6, 235] только заменой липшецевости функции $x \mapsto y_x$ на непрерывность.

Из теоремы о неявной функции получаем справедливость следующего утверждения об однопараметрическом семействе аппроксимационных решений задачи Больца (1).

**Теорема 4.** *Пусть выполняются следующие условия :*

*1) существует единственное на $[t_0, t_1]$ решение $z(t)$ системы (9), удовлетворяющее краевым условиям (10);*

*2) обобщенный якобиан $\partial_z f(t, z(t))$ почти всюду на $[t_0, t_1]$ состоит из единственной точки;*

*3) функция* $H(r,z) = g(r,z,z(t_1,z,r))$ $\partial_z H(r,z)$ *удовлетворяют условиям теоремы 3 в точке* $(0,z^{(0)})$.

*Тогда существует однопараметрическое семейство* $z(t,z^*(r),r)$ *решений системы (11), удовлетворяющее краевым условиям (12), такое, что*

$$z(t,z^*(0),0) = z(t),\ z^*(0) = z^{(0)}.$$

■

Отметим, что при выполнении условия 2) существует сильная производная функции $F(u) = z(t,u)$ по $u$ . Здесь $z(t,u)$ решение системы (9) с начальным условием $z(t_0,u) = u$. $Y(t) = [y^{(1)}(t)\ y^{(2)}(t)]$ - матричное решение линеаризованной вдоль решения $z(t,u)$ системы (9) [6], а именно

$$\dot{y}^{(i)}(t) = \partial_z f(t,z(t,u))y^{(i)}(t),$$

$$y_1^{(1)}(t-0) = 1,\ y_2^{(1)}(t-0) = 0;\ y_1^{(2)}(t-0) = 0,\ y_2^{(2)}(t-0) = 1.$$

Особо отметим, что условия дифференцируемости в теореме 2 правых частей системы (9) и краевых условий (10) заменены в теореме условиями липшецевости, гарантирующими только обобщенную дифференцируемость.

## Литература


1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1981.
2. Батухтин В.Д., Майборода Л.А. *Разрывные экстремальные задачи.* Санкт-Петербург: Гиппократ, 1995.
3. Батухтин В.Д., Рольщиков В.Е. *К решению разрывных вариационных задач* // Вестник Челяб. унив. Сер.3, матем. и мех. 1994. Вып.1. С.163-171.
4. Гирсанов Л.В. *Лекции по математической теории экстремальных задач.* М.: Из-во МГУ, 1970.
5. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1977.
6. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1988.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1989.
8. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. *Чувствительность систем управления.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1981.
9. Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1985.