

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «ПОЛИТИЧЕСКАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ – СТЕПЕНЬ АДАПТАЦИИ»

А.А. Лаптев

This article is about analytical qualitative investigation the system of differential equations. This system describes the behaviour of the political and economic society systems. States of the equilibrium are explored. Phase-plane portraits are plotted.

1. Модель «политическая дифференциация – степень адаптации»

В результате последних исследований на основе формализации социологической теории построена математическая модель глобальных социальных процессов [2, 3]. В данной работе представлено исследование системы дифференциальных уравнений (1), которые описывают поведение политической и экономической системы (модель «политическая дифференциация–степень адаптации»).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dG}{dt} = k_{GG}(e^{\delta\mathcal{P}-\delta_1}-1)G + (l_GE - k_{GE}E^2) - k_{GK}(K+D)G, \\ \frac{dE}{dt} = k_{EE}(e^{\delta\mathcal{P}-\delta_1}-1)E - (l_EG - k_{EG}G^2) - k_{EK}(K+D)E, \\ G|_{t=0} = G_0, \quad E|_{t=0} = E_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь G и E переменные, характеризующие развитие соответствующих систем: G – политическая дифференциация, E – степень адаптации к окружающей природной среде (экономика). Величины $\mathcal{P}$, K и D – параметры, зафиксированные на некотором уровне; k_{GG} , δ , δ_1 , l_G , k_{GE} , k_{GK} , k_{EE} , l_E , k_{EG} , k_{EK} – положительные коэффициенты; G_0 , E_0 – начальные условия.

Для упрощения исследования предположим, что $k_{GG} = k_{EE}$ и $k_{GK} = k_{EK}$. Введем обозначения: $A(\mathcal{P}) = k_{GG}(e^{\delta\mathcal{P}-\delta_1}-1) - k_{GK}(K+D)$, $k_1 = k_{GE}$, $k_2 = k_{EG}$, $l_1 = l_G$, $l_2 = l_E$, $x = G$, $y = E$, $\bar{x} = G_0$, $\bar{y} = E_0$. Тогда система (1) примет

следующий вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + l_1y - k_1y^2, \\ \frac{dy}{dt} = Ay - l_2x + k_2x^2, \\ x|_{t=0} = \bar{x}, y|_{t=0} = \bar{y}. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, мы получили систему из двух дифференциальных уравнений с параметром A , который может принимать любые значения. На начальные данные $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не накладываем никаких ограничений.

2. Качественное исследование модели «политическая дифференциация–степень адаптации»

Рассмотрим систему (2). Предполагаем, что l_1, k_1, l_2, k_2 — положительные коэффициенты, а A — знакопеременный параметр.

Проследим за изменением качественной картины решения системы (2) в зависимости от параметра A . Для этого изучим возможные состояния равновесия и направления, по которым траектории могут стремиться к ним. Качественное исследование будем проводить, следуя монографии [1].

2.1. Исследование состояний равновесия

Найдем особые точки. В конечной части плоскости — это точки пересечения двух парабол ($A \neq 0$)

$$Ax + l_1y - k_1y^2 = 0, \quad Ay - l_2x + k_2x^2 = 0. \quad (3)$$

Для исследования состояния равновесия (x_0, y_0) рассмотрим величины

$$P(x, y) = Ax + l_1y - k_1y^2, \quad Q(x, y) = Ay - l_2x + k_2x^2, \\ \Delta = \Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

$$\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0). \quad (5)$$

Характер состояния равновесия определяется знаком величин Δ , σ и $\sigma^2 - 4\Delta$.

Учитывая, что в точках равновесия $P(x_0, y_0) = 0$ и $Q(x_0, y_0) = 0$, получаем следующие выражения для Δ , $\sigma^2 - 4\Delta$ и σ .

$$\Delta = A^2 + (2k_1y_0 - l_1)(2k_2x_0 - l_2), \\ \sigma^2 - 4\Delta = -4(2k_1y_0 - l_1)(2k_2x_0 - l_2), \quad (6)$$

$$\sigma = 2A. \quad (7)$$

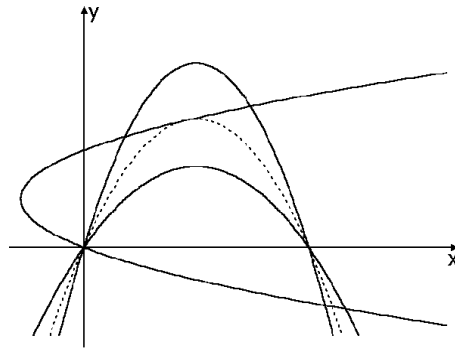


Рис. 1. Параболы (3)

Исключая из (6) l_1 и l_2 , получаем

$$\begin{aligned}\Delta &= k_1 k_2 x_0 y_0 - k_1 A \frac{y_0^2}{x_0} + k_2 A \frac{x_0^2}{y_0}, \\ \sigma^2 - 4\Delta &= -4k_1 k_2 x_0 y_0 + 4k_1 A \frac{y_0^2}{x_0} - 4k_2 A \frac{x_0^2}{y_0} + 4A^2.\end{aligned}\quad (8)$$

Или, исключая в (6) k_1 и k_2 ,

$$\begin{aligned}\Delta &= -3A^2 - 2l_1 A \frac{y_0}{x_0} + 2l_2 A \frac{x_0}{y_0} + l_1 l_2, \\ \sigma^2 - 4\Delta &= 16A^2 + 8l_1 A \frac{y_0}{x_0} - 8l_2 A \frac{x_0}{y_0} - 4l_1 l_2.\end{aligned}\quad (9)$$

Рассмотрим точку равновесия $(0, 0)$. В этой точке $\Delta = A^2 + l_1 l_2 > 0$, $\sigma^2 - 4\Delta = -4l_1 l_2 < 0$, $\sigma = 2A$. Следовательно, **точка** $(0, 0)$ – простой (т.к. $\Delta \neq 0$) фокус, устойчивый, когда $A < 0$, и неустойчивый, когда $A > 0$ [1, с.68-72]. Случай $A = 0$ разобран далее (см. стр. 156).

Из критерия Бендиксона¹ следует, что на плоскости x, y при $A \neq 0$ не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий, так как $P'_x + Q'_y = \sigma = 2A$ (см. (7)).

А. Исследуем систему (2) при $A > 0$.

В этом случае имеем два, или три, или четыре состояния равновесия. Их количество зависит от положения парабол (3), которые пересекаются в 2-х, 3-х или 4-х точках (рис.1).

А.1. Пусть имеется 4 состояния равновесия (рис.2, слева). Точка $(0, 0)$ – неустойчивый фокус.

В точке M_1 : $x_0 > l_2/k_2 > 0$, $y_0 < 0$, $\Delta < 0$ (см.(8)). Следовательно, точка M_1 – седло [1, с.72].

Для точки M_2 : $x_0 > l_2/2k_2 > 0$, $y_0 > l_1/k_1$, $\Delta > 0$, $\sigma^2 - 4 < 0$ (см.(6)). Следовательно, точка M_2 – неустойчивый фокус [1, с.72].

В точке M_3 : $0 < x_0 < l_2/2k_2$, $y_0 > l_1/k_1 > 0$, $\sigma^2 - 4 > 0$ (см.(6)). Следовательно, точка M_3 – седло или узел [1, с.71-72].

¹**Критерий Бендиксона.** Если в некоторой односвязной области выражение $P'_x + Q'_y$ не меняет знака и не равно нулю тождественно, то в этой области не существует замкнутых контуров, составленных из траекторий [1, с.120].

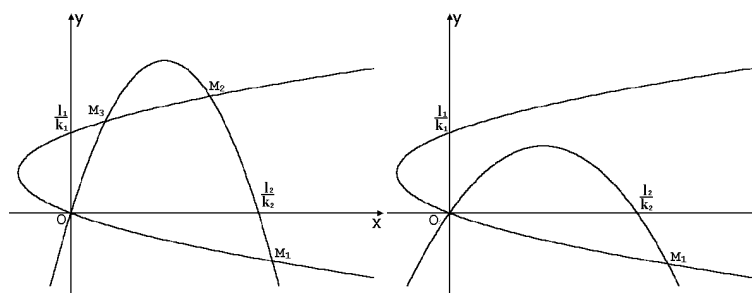


Рис. 2. Параболы (3)

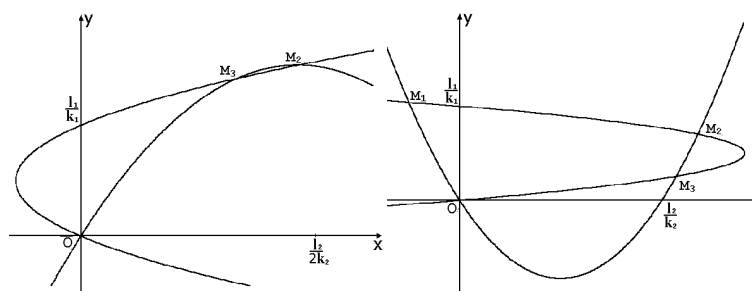


Рис. 3. Параболы (3)

Для определения типа состояния равновесия M_3 воспользуемся теоремой Пуанкаре².

Ниже докажем (стр.158), что на экваторе сферы Пуанкаре лежит один узел. Поэтому $N' = 1$ и $C' = 0$. В конечной части плоскости имеем два фокуса и седло (точки O , M_2 и M_1). Следовательно, точка M_3 может быть только седлом.

А.II. Если в точке M_2 : $0 < x_0 < l_2/2k_2$ (рис.3, слева), то точка $(0, 0)$ – неустойчивый фокус, а точка M_1 – седло. Точки M_2 и M_3 узлы или седла, т.к. $\sigma^2 - 4\Delta > 0$ (см.(6)). Из теоремы Пуанкаре следует, что M_2 и M_3 неустойчивый узел и седло соответственно.

Итак, если в конечной части фазовой плоскости четыре состояния равновесия, то два из них (M_1 и M_3) – седла, одно ($O(0, 0)$) – неустойчивый фокус и одно (M_2) – неустойчивый фокус или узел.

А.III. Рассмотрим случай, когда имеются два состояния равновесия (рис.2, справа).

Точка $(0, 0)$ – неустойчивый фокус. В точке M_1 : $x_0 > l_2/k_2 > 0$, $y_0 < 0$, $\Delta < 0$. Следовательно, точка M_1 – седло [1, с.72].

Поэтому, если в конечной части фазовой плоскости два состояния равновесия, то одно из них (M_1) – седло, а другое ($O(0, 0)$) – неустойчивый фокус.

²**Теорема Пуанкаре.** Если N , N_f и C – соответственно число узлов, фокусов и седел в конечной части фазовой плоскости, а N' и C' – число узлов и седел, лежащих на экваторе сферы Пуанкаре (считая точки, расположенные на концах диаметра, за одну точку (рис. 9.12)), то имеет место соотношение $N + N_f + N' = C + C' + 1$ [1, с.124].

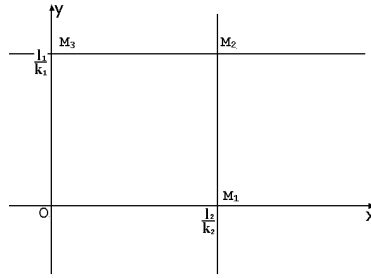


Рис. 4. Две пары параллельных прямых

В. Если $A < 0$, то исследование системы (2) проводится аналогично (рис.3, справа). При $A < 0$ положения равновесия (фокусы и узел) устойчивы, так как $\sigma = 2A < 0$ [1, с.68-72].

С. Исследуем систему (2) при $A = 0$.

В этом случае параболы (3) вырождаются в две пары параллельных прямых (рис.4)

$$x = 0, \quad x = \frac{l_2}{k_2}, \quad y = 0, \quad y = \frac{l_1}{k_1}.$$

Система (2) при $A = 0$ имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = l_1 y - k_1 y^2, \\ \frac{dy}{dt} = -l_2 x + k_2 x^2. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, имеем консервативную (гамильтонову) систему (10) с аналитическим интегралом [1, с.136]

$$H(x, y) = \frac{l_1}{2} y^2 - \frac{k_1}{3} y^3 + \frac{l_2}{2} x^2 - \frac{k_2}{3} x^3,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = l_1 y - k_1 y^2 = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = l_2 x - k_2 x^2 = -\frac{dy}{dt}.$$

В консервативной системе возможны только простые состояния равновесия типа центра или седла; замкнутые траектории не являются изолированными, а заполняют целые области [1, с.136].

В точках M_1 и M_3 : $\Delta = -l_1 l_2 < 0$ (см.(8)). Следовательно, точки M_1 и M_3 – седла. А точки M_2 и $O(0, 0)$ – центры (рис.4).

Д. Рассмотрим случай, когда в особой точке $\Delta = 0$.

Если $\Delta = 0$, то (см.(6))

$$A^2 + (2k_1 y_0 - l_1)(2k_2 x_0 - l_2) = 0. \quad (11)$$

Точки, удовлетворяющие уравнению (11), располагаются в полуполосах: $\{0 < x_0 < l_2/2k_2, \quad y_0 > l_1/2k_1\}$ и $\{0 < y_0 < l_1/2k_1, \quad x_0 > l_2/2k_2\}$ (рис.5, слева). Таким образом, это может быть только точка M_3 (рис.2-3). В этой точке

$$\frac{2k_2 x_0 - l_2}{A} = \frac{-A}{2k_1 y_0 - l_1}. \quad (12)$$

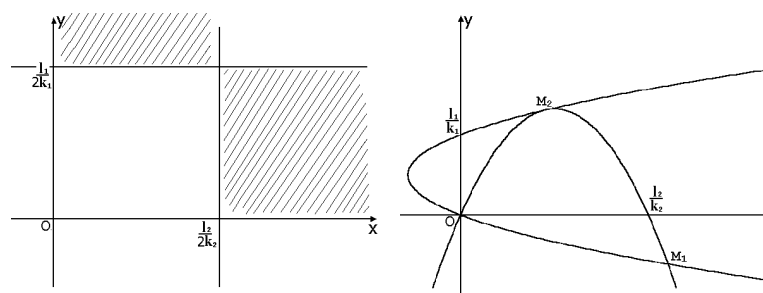


Рис. 5. Параболы (3)

Левая и правая часть равенства (12) – угловые коэффициенты касательных к параболам (3). Следовательно, касательные параллельны, а точки касания лежат в интервале: $0 < x_0 < l_2/2k_2$ (при $A \geq 0$; случай $A \leq 0$ рассматривается аналогично). Поэтому (рис.2-3) эти касательные совпадают, т.е. в данном случае параболы касаются (в точке M_2), и имеются три точки равновесия в конечной части плоскости (рис.5, справа).

Точка $(0, 0)$ – неустойчивый фокус. В M_1 : $x_0 > l_2/k_2 > 0$, $y_0 < 0$, $\Delta < 0$. Следовательно, точка M_1 – седло [1, с.72].

Точка M_2 – сложное состояние равновесия ($\Delta = 0$), которое, по-видимому, является седло-узлом [1, с.90-92].

2.2. Исследование бесконечно удаленных точек

Проведем исследование «бесконечно удаленных» частей плоскости с помощью сферы Пуанкаре [1, с.112-115]. Это сфера единичного радиуса, касающаяся плоскости x, y в начале координат. Каждой точке x плоскости ставится в соответствие две точки сферы, лежащие на прямой, проходящей через центр сферы и точку x . На экватор (большой круг, параллельный плоскости x, y) отображаются бесконечно удаленные точки. При этом интегральные кривые плоскости переходят в соответственные кривые сферы, а седла, узлы и фокусы сохраняют тот же вид.

Преобразование $x = 1/z$, $y = u/z$ позволяет изучить особые точки на экваторе сферы Пуанкаре, за исключением концов оси y (рис.6).

Исследуемая система (2) содержит в правой части многочлены одинаковой степени: $P(x, y) = Ax + l_1y - k_1y^2$ и $Q(x, y) = Ax - l_2x + k_2x^2$. Координаты особых точек на экваторе находим из уравнения

$$Q_n(1, u) - uP_n(1, u) = 0,$$

где Q_n и P_n – члены наивысшей степени в Q и P . Получаем: $k_2 + k_1u^3 = 0$. Следовательно, координаты особых точек

$$u^3 = -\frac{k_2}{k_1}.$$

По критерию Пуанкаре³ находим, что найденная точка – узел.

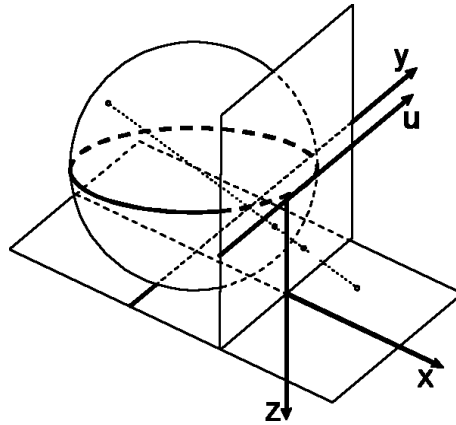


Рис. 6. Сфера Пуанкаре

Для исследования «концов оси y » полагаем $x = v/z$, $y = 1/z$ и рассматриваем точку $(0, 0)$. Получаем

$$\frac{dz}{dv} = \frac{-Az^2 - k_2v^2z + l_2vz^2}{-k_1 + l_1z - k_2v^3 + l_2v^2z}.$$

Точка $(0, 0)$ не является особой. Следовательно, «концы оси y » не могут быть особыми точками.

Таким образом, мы выяснили, что на экваторе сферы Пуанкаре имеются две диаметрально противоположные точки – два узла.

3. Фазовые портреты и исследование системы на наличие бифуркаций

Проследим за сменой фазовых портретов в зависимости от изменения параметра A системы (2). Коэффициенты l_1 , l_2 , k_1 и k_2 зафиксированы. Фазовые портреты на рисунках 7–10 построены⁴ при $l_1 = 1$, $l_2 = 1.5$, $k_1 = 1.3$ и $k_2 = 1.1$. Сплошные линии на рис. 7–10 – траектории решений (положительное направление указано стрелками). Короткие штриховые линии показывают векторное

³**Критерий Пуанкаре.** Пусть Q и P одинаковой степени. Простая особая точка $z = 0$, $u = u_0$ будет седлом, если при изменении u от $u_0 - \varepsilon$ до $u_0 + \varepsilon$ выражение

$$\frac{Q_n(1, u)}{P_n(1, u)} - u$$

переходит от отрицательных значений к положительным, и узлом, если указанное выражение переходит от положительных значений к отрицательным [1, с.115].

⁴Для численного решения использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Вычисления и построение графиков выполнены с помощью пакета "DynaSys" (<http://www.sci.wsu.edu/idea/DSDoc/>). Результаты совпадают с решениями, полученными с помощью других пакетов программ. Для проверки результатов мы использовали пакет "DESIR", созданный в Ростовском государственном университете (<http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/MME/>), и пакет "ODE", созданный в Московском энергетическом институте (<http://www.exponenta.ru/soft/others/ode/ode.asp>).

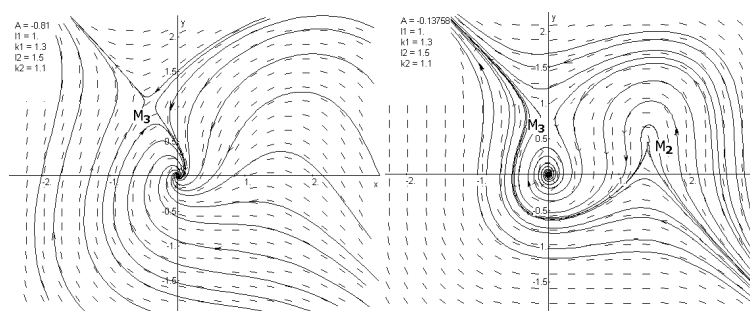


Рис. 7. $A=-0,81$ и $A=-0,13758$

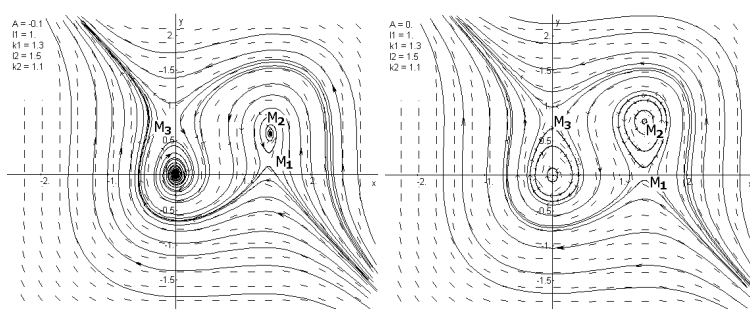


Рис. 8. $A=-0,1$ и $A=0$

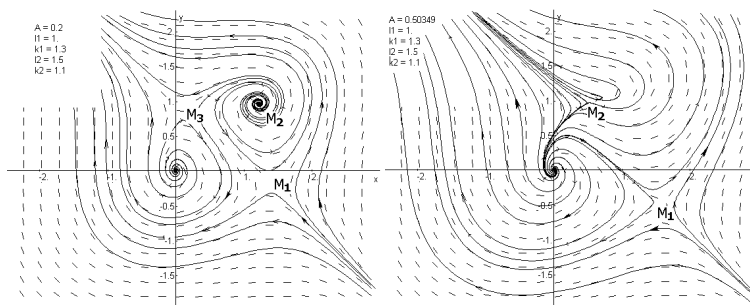


Рис. 9. $A=0,2$ и $A=0,5035$

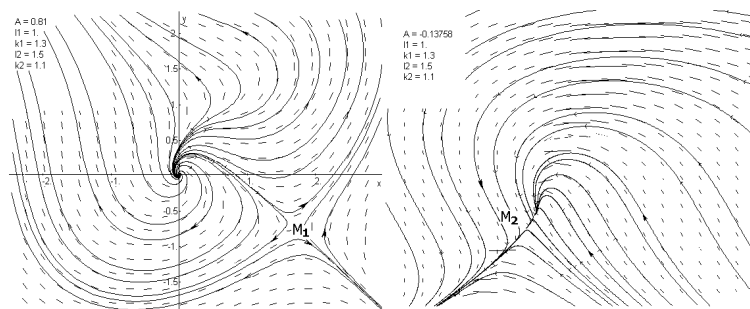
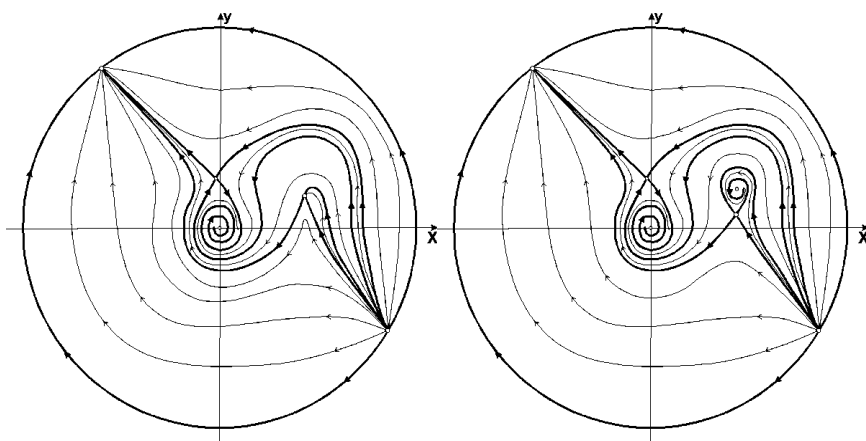


Рис. 10. $A=0,81$ и $A=-0,13758$

Рис. 11. $A = -0,13758$ и $A = -0,1$

поле решений.

При больших по модулю отрицательных значениях параметра A в конечной части плоскости два состояния равновесия: т.О – устойчивый фокус ($A < 0$) и т.М₃ – седло (рис.7, слева). При увеличении A появляется третья особая точка М₂ – седло-узел⁵ (рис.7, справа и увеличенный фрагмент на рис.10, справа), которая распадается на седло М₁ и устойчивый ($A < 0$) узел М₂. При дальнейшем увеличении A узел становится устойчивым фокусом М₂ (рис.8, слева).

При $A = 0$ устойчивые фокусы (т.О и т.М₂) становятся центрами (случай С на стр.156). Вокруг этих точек расположены циклы (рис.8, справа).

При дальнейшем увеличении A фокусы (т.О и т.М₂) становятся неустойчивыми, т.к. $A > 0$ (рис.9, слева). Этот случай соответствует пункту А.І, который разобран на стр.154. Далее фокус М₂ переходит в неустойчивый узел (пункт А.ІІ, стр.155), который сливается с седлом М₃ (рис.9, справа), превращаясь в седло-узел (пункт D на стр.156). При увеличении A седло-узел распадается, и в конечной части плоскости остаются две точки равновесия (пункт А.ІІІ, стр.155): т.О – неустойчивый фокус и т.М₁ – седло (рис.10, слева). При дальнейшем увеличении параметра A характер решения на меняется.

Таким образом, мы исследовали изменение качественного поведения фазовых портретов при изменении параметра вдоль числовой оси и установили, что имеются бифуркационные значения параметра⁶:

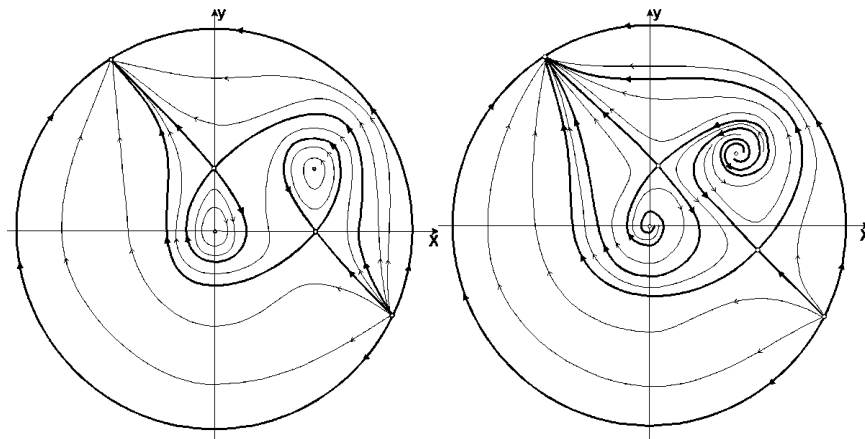
1) при переходе через точку $A = 0$ происходит смена устойчивости фокусов (т.О и т.М₂) без рождения предельного цикла (бифуркационному значению параметра соответствует консервативная система) [1, с.198].

2) при появлении седла-узла и его распадения на седло и узел (и наоборот, слияние узла и седла в седло-узел, который исчезает) при прохождении параметра A через те значения, при которых $\Delta = 0$ (пункт А.ІІ, стр.155) [1, с.193-194].

На рис. 11-12 представлены изображения фазовых портретов на полусфере

⁵В этой точке $\Delta = 0$, см. стр.156.

⁶Это значения параметра, соответствующие негрубой системе, при переходе через которые происходит смена качественной картины фазовых портретов [1, с.192].

Рис. 12. $A=0$ и $A=0,2$

Пуанкаре. Внешняя окружность на рисунках – экватор сферы Пуанкаре, на который отображаются бесконечно удаленные точки. Линиями изображены траектории решений. Стрелки показывают движение по траекториям в направлении, соответствующем положительному течению времени. Жирными линиями указаны сепаратрисы седел. Рисунки дают полное представление о характере поведения решений во всей плоскости и в окрестности точек равновесия.

Итак, мы установили количество состояний равновесия исследуемой системы, их тип и расположение на плоскости. Исследовано поведение решений на бесконечности. Выписаны условия на коэффициенты и параметры, которые характеризуют смену качественной картины решения. Построены фазовые портреты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. М.: Наука, 1976. 496 с.
2. Гуц А.К., Коробицын В.В., Лаптев А.А., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. *Социальные системы: формализация и компьютерное моделирование*. Учебное пособие. Омск: Омск. гос. ун-т, 2000. 160 с.
3. *Математическое моделирование глобальных социальных процессов*: Отчет о НИР(закл.) / Руководитель А.А.Лаптев; №ГР 01.2.00101750; Инв. №02200201162. – Омск, ОмГУ, 2001. 24с.