Математические структуры и моделирование
2002, вып. 10, с. 13–18

УДК 519.4

СВОЙСТВО КОЭНА-МАКОЛЕЯ АЛГЕБРЫ КОНКОМИТАНТОВ 2×2 МАТРИЦ

С.Г. Кузьмин

Algebras of concomitants of 2 by 2 matrices over any infinite field are described. It is proved that they are free modules over parameter subalgebras.

Пусть A – аффинное многообразие,B – конечномерная алгебра и G – алгебраическая группа, действующая на A и B рационально. Другими словами, морфизм действия G на A и B задается полиномиальными функциями относительно аффинных координат на многообразиях A, B и G. Через f обозначим произвольное полиномиальное отображение $A \to B$.

Определение 1. Алгеброй конкомитантов многообразия A со значениями в алгебре B относительно действия G называется множество

$$C(A, B, G) = \{f : A \to B \mid f(a^g) = f^g(a), \forall g \in G, a \in A\}.$$

Легко видеть, что это действительно алгебра с операциями, индуцированными операциями алгебры B.

Обозначим через $M_{n,m} = M(n, K) \times \ldots \times M(n, K)$ пространство m экземпляров $n \times n$- матриц над бесконечным полем K произвольной характеристики p. Общая линейная группа $GL(n, K)$ действует сопряжением на $M_{n,m}$ по правилу:

$$(Y_1, \ldots, Y_m)^g = (gY_1g^{-1}, \ldots, gY_mg^{-1}), \forall g \in GL(n, K), Y_i \in M(n, K)(i = 1, \ldots, m).$$

Обозначим через $K_{n,m}$ координатное кольцо аффинного многообразия $M_{n,m}$, а через $R_{n,m}$ подалгебру инвариантов, состоящую из всех полиномов $f \in K_{n,m}$ таких, что

$$\forall g \in GL(n, K), \forall X \in M_{n,m} : f(X^g) = f(X).$$

Обозначим алгебру $C(M_{n,m}, M(n, K), GL(n, K))$ через $T_{n,m}$ и назовем ее алгеброй конкомитантов m $n \times n$- матриц.

Известно, что $T_{n,m}$ порождается как алгебра над $R_{n,m}$ общими матрицами $X_1 \ldots X_m$, т.е $T_{n,m} = R_{n,m}[X_1, \ldots, X_m]$. Под общей матрицей X_i понимается матрица, составленная из координатных функций i- ой матричной компоненты многообразия $M_{n,m}$. В случае $\operatorname{char} K = 0$ это было доказано в [1], и в общем случае в [2,3]. В данной статье рассматриваются только 2×2 матрицы.

E-mail: s_kuzmin@omgpu.omsk.edu
Омский государственный педагогический университет

Пусть $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$ градуированное конечнопорожденное кольцо, $M = \oplus_{i\geq 0} M_i$ градуированный модуль над R, т.е $R_i M_j \subseteq M_{i+j}, \forall i, j$. Например, $T_{2,m}$ является градуированным $R_{2,m}$-модулем. Пусть F – однородное подкольцо в R, порожденное системой параметров, т.е. системой однородных и алгебраически независимых элементов таких, что $F \subset R$ – целое расширение.

Определение 2. R-модуль M называется модулем Коэна-Маколея (сокращенно KM модулем), если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

1) M – свободный модуль над каким-то F;

2) M – свободный модуль над любым F;

3) $M/Mr_1 + \ldots + Mr_s$ – конечномерное векторное пространство, где $r_1, \ldots, r_s$ – максимальная регулярная последовательность в M.

Напомним, что последовательность

$$\mathcal{R} = \{r_1, \ldots, r_s\}; r_i \in R, 1 \leq i \leq s$$

называется регулярной в M, если каждый r_i не является делителем нуля в факторе $M/(\sum_{j=1}^{i-1} Mr_j)$. Регулярная последовательность максимальна, если она не является собственным подмножеством никакой другой регулярной последовательности. Данное выше определение отличается от стандартного (см., например, [4]), но в действительности эквивалентно последнему.

Замечание 1. M – KM модуль тогда и только тогда, когда $M/Mr_1 + \ldots + Mr_t$ – KM модуль для всех t, $1 \leq t \leq s$ [4].

Если $\mathrm{char} K = 0$, то $T_{2,m}$ является KM модулем [5]. Более того, в этой статье явно указан базис $T_{2,m}$ как свободного модуля над подкольцом, порожденным элементами

$$\mathrm{tr}(X_i); \det(X_i);$$

$$p_k = \sum_{i+j=k, i<j} tr(X_i X_j), 1 \leq i \leq m, 3 \leq k \leq 2m-1.$$

Ниже мы докажем, что $T_{2,m}$ – KM модуль над тем же подкольцом и в случае бесконечного поля любой характеристики. Мы доказываем существование такого базиса, но в отличие от [5] не приводим его явно, так как это достаточно сложная комбинаторная проблема. Кроме того, вычисления в $R_{2,4}$ ([6]) и в $R_{2,5}$ ([7]) показывают, что случай $p > 0$ (как и случай $p = 0$) существенно отличается от случая $p = 2$. Поэтому есть все основания ожидать, что такой же эффект имеет место и для конкомитантов.

Нам потребуются некоторые сведения из теории модулей с хорошей фильтрацией (сокращенно модуль с ХФ). Приведем их. Начнем с определения. Пусть G – связная редуктивная алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем K, B – борелевская подгруппа в G, T – максимальный тор в B, $X(T)$ – группа характеров T. Для произвольного $\lambda \in X(T)$ обозначим через K_λ – одномерный B- модуль, на котором T действует посредством λ, т.е. $x^t = \lambda(t)x, t \in T, x \in K_\lambda$.

Определение 3. Конечномерный G- модуль V будем называть модулем с ХФ, если в V имеется такая цепь подмодулей $0 = V_0 \subset \ldots \subset V_m = V$, что каждый фактор изоморфен индуцированному модулю $\mathrm{Ind}_B^G(K_\lambda)$. Перечислим некоторые факты из теории модулей с ХФ [8–10].

1. Если V и W – модули с ХФ, то $V \otimes W$ – модуль с ХФ.

2. Если
$$0 \to V \to W \to S \to 0$$
точная последовательность G-модулей с ХФ, тогда последовательность инвариантных подпространств
$$0 \to V^G \to W^G \to S^G \to 0$$
также точна.

3. Если W есть G-модуль с ХФ и V его подмодуль с ХФ, тогда W/V также G- модуль с ХФ.

Доказательство нашей теоремы организовано следующим образом. Выбирается некоторая регулярная последовательность в $K_{2,m}$, состоящая из инвариантов в $R_{2,m}$, которая остается регулярной в $T_{2,m}$. Далее, фактор $T_{2,m}$ по идеалу, порожденному элементами этой регулярной последовательности, вкладывается в алгебру конкомитантов $A_{2,m} = C(V^m, M(2,K), SL(2,K))$, где V – двумерное векторное пространство, рассматриваемое как естественный $SL(2,K)$- модуль. Затем доказывается, что $A_{2,m}$ – КМ модуль над $K[V^m]^{SL(2,K)}$. Остается заметить, что существует оператор Рейнолдса для этой пары вложенных многообразий и по теореме Хохстера-Игана ([4], теорема 6.4.5) и Замечанию 1 мы получаем требуемое.

Это доказательство является некоторой модификацией доказательства, приведенного в [11], поэтому здесь будут использоваться некоторые промежуточные результаты последней статьи.

Алгебру всех полиномиальных функций можно отождествить с алгеброй $K_{2,m} \otimes M(2,K)$ по правилу $f \mapsto \sum_{i,j=1}^{i,j=2} f_{ij} \otimes e_{ij}$, где f_{ij} функции, задающие отображение f, а e_{ij} матричные единицы . Легко проверить, что данное отображение определяет изоморфизм $T_{2,m} \cong (K_{2,m} \otimes M(2,K))^{SL(2,K)}$, где $SL(2,K)$ действует на $K_{2,m} \otimes M(2,K)$ диагонально, т.е. на $K_{2,m}$ это левый сдвиг аргумента, а на $M(2,K)$ – сопряжение.

Обозначим $K_{2,m} \otimes M(2,K)$ через D_m. Рассмотрим элементы $r_1 = \mathrm{tr}(X_1), r_2 = \det(X_1), \ldots, r_{2m-1} = \mathrm{tr}(X_m), r_{2m} = \det(X_m)$ из $K_{2,m}$ и определим модули $J_k = \sum_{1 \le i \le k} r_i D_m$ и идеалы $I_k = \sum_{1 \le i \le k} r_i K_{2,m}, 1 \le k \le 2m$. Очевидно $J_k = I_k \otimes M_2$. Докажем, что выбранная последовательность элементов регулярна в $T_{2,m}$. В [11] было доказано, что все I_k простые идеалы в $K_{2,m}$. Кроме того (см. там же), I_k – модули с ХФ и ${I_k}^{SL(2,K)} = \sum_{1 \le i \le k} r_i R_{2,m}, 1 \le k \le 2m$. Рассмотрим элемент $d \in D_m, d = \sum f_{ks} \otimes e_{ks}$, тогда $r_{i+1} d = \sum (r_{i+1} f_{ks}) \otimes e_{ks}$, и если $r_{i+1} d \equiv 0 (\mathrm{mod} J_k)$, то, учитывая, что r_{i+1} не делитель нуля по модулю идеала I_i, получаем $d \equiv$

$0(\mathrm{mod} J_i)$. Теперь докажем, что все J_k это $SL(2,K)$ модули с ХФ,$1 \le k \le 2m$. Действительно, имеем фильтрацию $0 = J_0 \subseteq J_1 \subseteq \ldots \subset J_{k-1} \subseteq J_k$ с факторами

$$J_{i+1}/J_i = I_{i+1} \otimes M(2,K)/I_i \otimes M(2,K) = (I_{i+1}/I_i) \otimes M(2,K).$$

Учитывая, что все I_j, $SL(2,K)$ являются модулями с ХФ, $1 \le j \le 2m$, а также то, что $M(2,K)$ $SL(2,K)$ – модуль с ХФ, получаем, что и J_k – $SL(2,K)$ модуль с ХФ,$1 \le k \le 2m$. Далее, поскольку все J_k – модули с ХФ имеем $J_k/J_{k-1} = I_k/I_{k-1} \otimes M(2,K) = \bar{r_k}(D_m/J_{k-1})$, где $\bar{r_k} = r_k + J_{k-1}$. Так как r_k инвариант, то $(J_k/J_{k-1})^{SL(2,K)} = \bar{r_k}(D_m/J_{k-1})^{SL(2,K)} = \bar{r_k}(D_m)^{SL(2,K)}/(J_{k-1})^{SL(2,K)}$. Следовательно, по индукции

$$J_k^{SL(2,K)} = r_k T_{2,m} + J_{k-1} = \sum_{l=1}^{k} r_l T_{2,m} \ , 1 \le k \le 2m.$$

Обозначим через $S = \{X \in sl(2,K) \mid \det(x) = 0\}$. Теперь все готово для доказательства теоремы.

Теорема 1. *$T_{2,m}$ – КМ модуль над $R_{2,m}$, над бесконечным полем любой характеристики.*

Доказательство. В силу всего сказанного выше имеем

$$\bar{T}_{2,m} = (D_m/J_{2m})^{SL(2,K)} = ((K_{2,m}/I_{2m}) \otimes M(2,K))^{SL(2,K)}.$$

Определим сюръективный морфизм аффинных многообразий $\phi : V = K^2 \to \ S$ следующим образом

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -v_1v_2 & v_1^2 \\ -v_2^2 & v_1v_2 \end{pmatrix} \in S.$$

Легко проверить, что это $SL(2,K)$- эквивариантный морфизм. В частности, имеем вложение $SL(2,K)$- модулей $K[S^m] = K_{2,m}/I_{2,m} \to K[V^m]$ определенное на матричных координатах по правилу $x(i) \mapsto y_1(i)y_2(i)$,
$x_1(i) \mapsto y_1(i)^2, x_2(i) \mapsto y_2(i)^2$, где

$$X_i = \begin{pmatrix} -x(i) & x_1(i) \\ x_2(i) & x(i) \end{pmatrix}, Y_i = \begin{pmatrix} y_1(i) \\ y_2(i) \end{pmatrix}, 1 \le i \le m,$$

матричные и векторные координаты на многообразиях S^m и V^m соответственно. Это вложение продолжается до вложения $SL(2,K)$- модулей $(K_{2,m}/I_{2,m}) \otimes M(2,K) \to K[V^m] \otimes M(2,K)$. Обозначим через L образ $K[S^m]$ в $K[V^m]$. Рассмотрим алгебру инвариантов

$$(L \otimes M(2,K))^{SL(2,K)} \subseteq (K[V^m] \otimes M(2,K))^{SL(2,K)}$$

и докажем сначала, что $(K[V^m] \otimes M(2,K))^{SL(2,K)}$ – КМ модуль над $K[V^m]^{SL(2,K)}$. Заметим, что $M(2,K) \cong V^* \otimes V$ как $SL(2,K)$- модули. Поэтому $K[V^m] \otimes M(2,K) \cong K[V^m] \otimes V^* \otimes V$ как $SL(2,K)$- модули. Кроме того,

$$((K[V^m] \otimes V^* \otimes V))^{SL(2,K)} = (K[V^m] \otimes K[V^* \oplus V]_{\deg(1,1)})^{SL(2,K)} =$$

$$= (K[V^{m+1} \oplus V^*]_{\deg(*,\dots *,1,1)})^{SL(2,K)}.$$

Известно [12], что $(K[V^{m+1} \oplus V^*])^{SL(2,K)}$ алгебра с порождающими (μ, u_k), $[u_i, u_j]]$, где $u_s, \mu, 1 \le s \le m+1$ векторные координатные функции на V^{m+1} и V^* соответственно, а

$$(\mu, u_k) = \mu_1 u_k^1 + \mu_2 u_k^2, [u_i, u_j] = \det \begin{pmatrix} u_i^1 & u_j^1 \\ u_i^2 & u_j^2 \end{pmatrix}, 1 \le i, j, k \le m+1$$

и определяющими соотношениями:

1. $[u_i, u_j](\mu, u_s) - [u_s, u_j](\mu, u_i) - [u_i, u_s](\mu, u_j) = 0$
2. $\sum_{(i_1,i_2,i_3), i_1<i_2} \operatorname{sign}(i_1, i_2, i_3)[u_{i_1}, u_{i_2}][u_{i_3}, u_j] = 0$,
   где $\operatorname{sign}(i_1, i_2, i_3) = 1$, если подстановка (i_1, i_2, i_3) четная и $\operatorname{sign}(i_1, i_2, i_3) = -1$ в противном случае.

Поэтому

$$U = (K[V^{m+1} \oplus V^*]_{\deg(*,\dots *,1,1)})^{SL(2,K)}$$

как $K[V^m]^{SL(2,K)}$-модуль порождается $(\mu, u_{m+1}), [u_i, u_{m+1}](\mu, u_j)$. Рассмотрим фактор модуль $U/(\mu, u_{m+1})K[V^m]^{SL(2,K)}$ и непосредственной проверкой убедимся, что он является свободным $K[V^m]^{SL(2,K)}$ -модулем со свободными порождающими $[u_i, u_{m+1}](\mu, u_j), i < j$. Более точно, по модулю $(\mu, u_{m+1})K[V^m]^{SL(2,K)}$, т.е. по модулю дополнительного соотношения $(\mu, u_{m+1}) = 0$, соотношения 1-2 редуцируются в пустые, если их переписать в порождающих $[u_i, u_{m+1}](\mu, u_j), i < j$. Таким образом, модуль

$$U = (K[V^{m+1} \oplus V^*]_{\deg(*,\dots *,1,1)})^{SL(2,K)}$$

как расширение свободного при помощи свободного будет тоже свободным, т.е. КМ модулем над $K[V^m]^{SL(2,K)}$.

Определим линейное отображение $\rho : K[V^m] \to L$, которое любой моном $u = \prod_{1 \le i \le m} y_1(i)^{\alpha(i)} y_2(i)^{\beta(i)}$ отображает в нуль тогда и только тогда, когда $u \notin L$ и оставляет таким как есть в противном случае. В [11] доказано, что ρ – оператор Рейнолдса для пары $(K[V^m], L)$ и индуцирует оператор Рейнолдса для пары $(K[V^m]^{SL(2,K)}, L^{SL(2,K)})$.

Рассмотрим отображение $\bar{\rho} : \rho \otimes M(2,K) \to L \otimes M(2,K)$ по правилу $\bar{\rho}(f \otimes m) = \rho(f) \otimes m$. Очевидно, что $\bar{\rho}$ – оператор Рейнолдса для пары $(K[V^m] \otimes M(2,K), L \otimes M(2,K))$ и индуцирует оператор Рейнолдса для пары $(K[V^m] \otimes M(2,K))^{SL(2,K)}, (L \otimes M(2,K))^{SL(2,K)})$. По теореме 6.4.5 из ([4]) получаем, что $(L \otimes M(2,K))^{SL(2,K)})$ – КМ модуль, а значит, таковым является и $T_{2,m}$. Теорема доказана. ∎

В заключение автор выражает глубокую благодарность профессору А.Н.Зубкову за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. Procesi S. *Rings with Polynomial Identities* Marcel Dekker, Inc. New York, 1973.
2. Donkin S. *Invariant functions on matrices*// Math.Proc.Cambridge Phil.Soc. 1992. V.113, N.23. P.23-43.
3. Зубков А.Н. *Об одном обобщении теоремы Размыслова-Прочези.*// Алгебра и логика, 1996. Т.35, N.4. С.433-457.
4. Bruns W. and Herzog J. *Cohen-Macaulay rings* Cambrige Stadies in Advenced Mathematics 39, Cambridge Univ. Press,Cambrige, 1993.
5. Teranishi Y. *Explicit description of trace rings of 2 by 2 matrices*// Nagoay Math.J. 1991. V.121. P.149-159.
6. Domokos M., Kuz'min S.G., Zubkov A.N. *Rings of matrix invarians in positive characteristic*// Pure Appl. Algebra. 2002. N.176. P.61-80.
7. Кузьмин С.Г. *Коэн-Маколеево представление алгебры инвариантов* 2×2 *матриц*/ Математика и информатика: наука и образование. Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Выпуск 1. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. С.36-40.
8. Зубков А.Н. *Матричные инварианты над бесконечным полем конечной характеристики*// Сиб.мат.журн. 1993. Т.34, N.6. С.68-74.
9. Donkin S. *The Normality of Conjugacy Classes of Matrices*// Inv. Math. 1990. V.101. P.717-736.
10. Donkin S. *A filtration for rational modules*// Math.Z. 1981. V.177. P.1-8.
11. Kuz'min S.G., Zubkov A.N.*Rings of invariants* 2×2 *matrices in positive characteristic*// Linear Alg. and Aplications, to appear.
12. C de Concini., Procesi S. *A characteristic free approach to invariant theory*// Adv. in Math. 1976. V.21. N.3. P.330-354