Математические структуры и моделирование
2002, вып. 10, с. 45–52

УДК 517

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ КОЛЛАПСА НА ПЛОСКОСТИ

Н.Ф. Богаченко, Р.Т. Файзуллин

For collaps mass points cloud it is suggested the ring density characteristic which describes «in» shock wave formation.

В рамках предлагаемого нами подхода при решении ряда прикладных проблем использовалась так называемая гравитационная аналогия, понимаемая как выявление естественной структуры данных в привнесенной динамике. Примерами подобных задач является проблема поиска экстремума функции [3], задача кластерного анализа [2], задача Штейнера [1] и др.

Использование гравитационных аналогий позволяет рассмотреть интересующую нас проблему в динамике, которая не требует каких-либо дополнительных предположений, кроме закона тяготения, рассматриваемого иногда как просто геометрическое свойство. Это дает возможность выделить «неявные» кластеры, которые формируются в течение некоторого временного интервала. Если для статической модели образование кластеров можно интерпретировать как случайное событие, то устойчивость таких структур во времени говорит об определенных закономерностях в динамике системы и зависит от начальной конфигурации.

В данной работе рассматривается задача наиболее естественная для данного подхода – моделирование начальной стадии коллапса гравитирующей системы частиц. Интерес к этой проблеме инициирован задачами астрофизики и космологии [8].

Цель работы заключалась в создании инструмента для исследования формирования самоорганизующихся структур на начальной стадии коллапса. Была сделана попытка определения характерных параметров задачи.

Соответствующий выбор функции, оценивающей плотность системы материальных точек внутри области взаимодействия, позволяет сделать вывод о том, что во взаимном расположении частиц наблюдается некоторая упорядоченность или кластеризация. Для плоской модели было показано, что в ходе гравитационного взаимодействия частиц, случайным образом распределенных внутри заданной области (круга), формируются кольцеобразные структуры, устойчивые в течение некоторого временного интервала.

E-mail: zhihalkina@math.omsu.omskreg.ru, faizulin@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Моделирование начальной стадии коллапса осуществлялось при помощи пакета прикладных программ, написанного на языке C^{++}. Пакет включает в себя реализацию численного метода решения системы ОДУ, описывающей движение частиц в гравитационном поле или так называемую задачу N тел [6].

В области G пространства $\mathbb{R}^k$ задается N материальных точек $\vec{r}_j$ $(j = 1, \dots, N)$, которые составляют динамическую систему частиц, взаимодействующих с силой, имеющей обратно пропорциональную зависимость от степени расстояния, в данном случае это *гравитационные силы*. Тем самым динамика системы определяется законом тяготения. Стандартно берется равномерное распределение в области G с использованием датчика случайных чисел.

Строится модель взаимодействия частиц без столкновений в гравитационном поле [3, 6]. «Состояние» произвольной точечной частицы массы m характеризуется $2k$ координатами: $\vec{r} = \{r_1, ..., r_k\}$, $\vec{v} = \{v_1, ..., v_k\}$. Рассматривая N материальных точек, согласно законам движения Ньютона получаем [6, 9]:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_i(t) = \vec{v}_i(t), \\ \dot{\vec{v}}_i(t) = -\gamma \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{m_j(\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t))}{\|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)\|^k}, \\ \vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i_0}, \quad \vec{v}_i(0) = \vec{v}_{i_0}, \\ t \geq 0, \ 1 \leq i \leq N, \end{cases} \tag{1}$$

здесь γ – гравитационная постоянная.

Так как координаты и скорости частиц определяются в чередующиеся моменты времени, то при переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностной аппроксимации производных для данной системы наиболее подходит разностная схема «с перешагиванием» [6]. В дальнейшем эта схема, характеризующаяся более высоким порядком аппроксимации, заменяется на явную, но в уравнение расчета координат материальных точек добавляется еще одно слагаемое из разложения в ряд Тейлора функции $v(t)$ и берется среднее значение скорости за последние два шага по времени: $(\vec{v}_i^{\,n} + \vec{v}_i^{\,n+1})/2$ [3].

Начальные скорости частиц равны нулю, и это условие сохраняется на каждом шаге, тем самым скорости не накапливаются. Гравитационная постоянная $\gamma = 1$.

Заметим, что для исследования гравитационных процессов в трехмерном пространстве потребуется более $N^{3/2}$ материальных точек, тогда как в плоском случае мы ограничиваемся числом взаимодействующих частиц, равным N. На самом деле для выявления статистически значимых результатов в трехмерном случае необходимо задействовать еще большее количество пробных частиц. В связи с этим на первом этапе предлагается моделировать начальную стадию коллапса на плоскости, тем самым k полагаем равным 2.

Учитывая данные ограничения, формулы для расчета координат взаимодействующих частиц принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \vec{a}_i^{\,n} = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \dfrac{m_j^{\,n}(\vec{r}_j^{\,n} - \vec{r}_i^{\,n})}{\|\vec{r}_j^{\,n} - \vec{r}_i^{\,n}\|^2} \ , \\ \vec{r}_i^{\,n+1} = \vec{r}_i^{\,n} + t^2\vec{a}_i^{\,n} + \frac{1}{2}t^2\vec{a}_i^{\,n-1}, \\ \vec{r}_i^{\,0} = \vec{r}_{i_0}, \quad \vec{a}_i^{\,0} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где t – величина постоянного шага по времени, $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ – ускорение.

Далее необходимо описать некоторые *настраиваемые параметры*.

В представленной модели каждая материальная точка может взаимодействовать с любой другой: в системе из N частиц в общем случае происходит $N(N-1)/2$ взаимодействий. Возвращаясь к физическим аналогиям, согласно [6, с.188–191], каждая частица $\vec{r_i}$ будет эффективно взаимодействовать с теми, которые попадают в шар некоторого радиуса R с центром в точке $\vec{r_i}$ [5]. Величина R называется дебаевским радиусом.

В представленной модели также определяется дебаевский радиус, точнее, более технический элемент – радиус взаимодействия, позволяющий сократить общее число взаимодействий. Величина радиуса взаимодействия является настраиваемым параметром и либо задается на основе некоторых эвристических соображений, либо зависит от размерности пространства и числа взаимодействующих материальных точек [5, 6].

В разностной схеме, описывающей динамику системы гравитирующих частиц, шаг по времени t следует выбирать достаточно малым, чтобы для всех $\vec{v}_i$ выполнялось условие: $t \ll R/\|\vec{v}_i\|$.

Таким образом, в представленной модели имеется возможность варьировать количество материальных точек, радиус области взаимодействия G, представляющей собой круг, шаг по времени, радиус, в пределах которого на частицу оказывают воздействие соседи. Кроме того, существует два сорта материальных точек, массы которых различны. Процентное содержание «тяжелых» частиц также является настраиваемым параметром.

С некоторым интервалом во времени производится расчет плотности материальных точек. При этом строится два вида графиков, выражающих зависимость плотности внутри кольца от внешнего радиуса кольца и плотности внутри сектора от номера сектора. Формулы для вычисления плотности имеют следующий вид:

$$\text{Плотность внутри кольца} =$$
$$= \frac{\text{Масса внутри кольца}}{\text{Масса всех частиц}} : \frac{\text{Площадь кольца}}{\text{Площадь круга}} =$$
$$= \frac{\text{Масса внутри кольца}}{\text{Масса всех частиц}} : \frac{R_2^2 - R_1^2}{R^2},$$

где R – радиус окружности, R_1, R_2 - внутренний и внешний радиусы кольца.

$$\text{Плотность внутри сектора} =$$
$$= \frac{\text{Масса внутри сектора}}{\text{Масса всех частиц}} : \frac{\text{Площадь сектора}}{\text{Площадь круга}} =$$
$$= \frac{\text{Масса внутри сектора}}{\text{Масса всех частиц}} : \frac{1}{\text{Число секторов}}.$$

Отметим, что рассматривается относительная плотность, так как важна не численная величина, а характер зависимости. Число колец и секторов, в которых производятся расчеты, – настраиваемый параметр модели.

Чтобы проследить динамику гравитирующей системы частиц на более поздних этапах взаимодействия, данная модель требует внесения поправок и уточнений. Возможно гашение центробежных скоростей за пределами области взаимодействия, чтобы удержать частицы вблизи формирующегося ядра.

Как показало компьютерное моделирование, при малом шаге по времени внутри области G формируются различные структуры, некоторые из которых могут быть сравнительно устойчивы во времени. Оказывается, что, выбрав соответствующим образом оценочную функцию, а именно относительную плотность частиц внутри кольца, можно проследить вид и динамику таких структур.

Пусть внутри заданной области в гравитационном взаимодействии участвует некоторое число равномассовых частиц.

Рассмотрим динамику изменения плотности для различных наборов данных (R – радиус окружности, N – число частиц, k, s – количество колец и секторов, t – шаг по времени).

Для достаточно разряженной среды ($R \sim 0,2-0,3$, $N \sim 500-3000$) распределение частиц внутри круга при движении к центру масс представляет собой набор концентрических колец, в которых происходит концентрация масс и радиус которых изменяется во времени дискретно. При этом радиус нового кольца может быть больше, чем радиус на предыдущем шаге. Это хорошо видно на графиках зависимости плотности в кольце от его радиуса в различные моменты времени. Кривая имеет несколько «горбов», растущих в течение некоторого временного интервала, а затем меняющих свое местоположение (см. рис. 1, 2). Иными словами, внутри области можно выделить своеобразную волну, которая распространяется от границы окружности к ее центру или в обратном направлении.

Плотность материальных точек в секторах во многом определяется их начальным распределением. На первых шагах гравитационного взаимодействия наблюдается лишь незначительное перераспределение частиц от сектора к сектору, при этом резких скачков плотности или перегруппировки частиц не происходит (см. рис. 3).

Производились расчеты для одинаковых начальных данных, но с различным шагом по времени. При этом образование колец наблюдается на одном и том же расстоянии от центра. Увеличение шага по времени приводит лишь к более быстрому формированию подобных структур (см. рис. 4, рис. 5).

Можно выделить временные интервалы, в течение которых наряду с ростом плотности в одном кольце значение плотности в соседнем не изменяется. Эта так называемая «блокировка» плотности происходит при относительно небольшом шаге по времени (см. рис. 6).

Процесс формирования концентрических колец тем ярче выражен, чем меньше количество частиц внутри круга (естественно, число частиц ограничено снизу некоторой величиной, при которой еще можно говорить о статистических

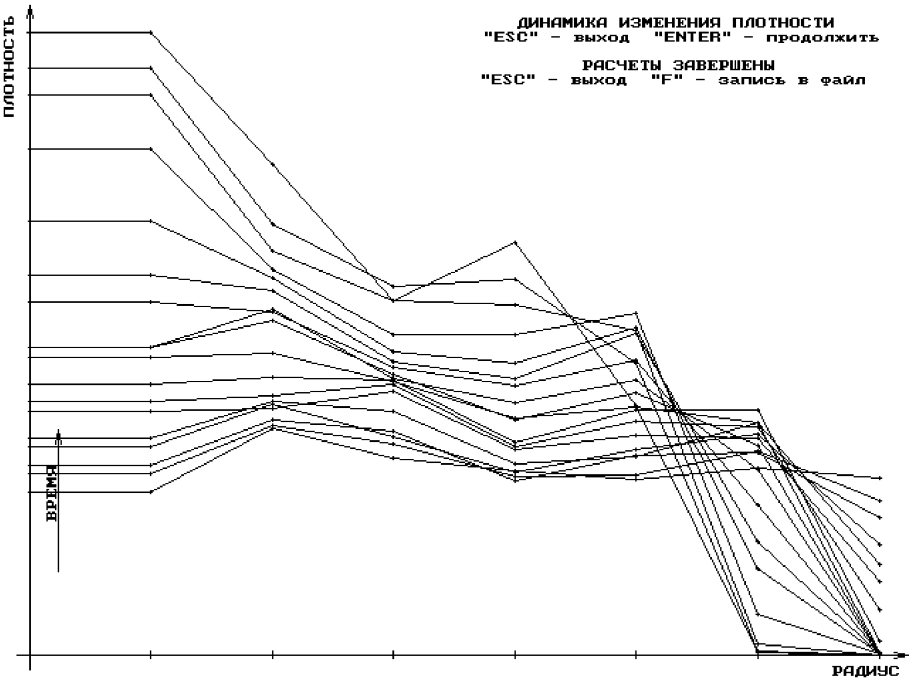

Рис. 1. Динамика изменения плотности по кольцам ($N = 1000$)

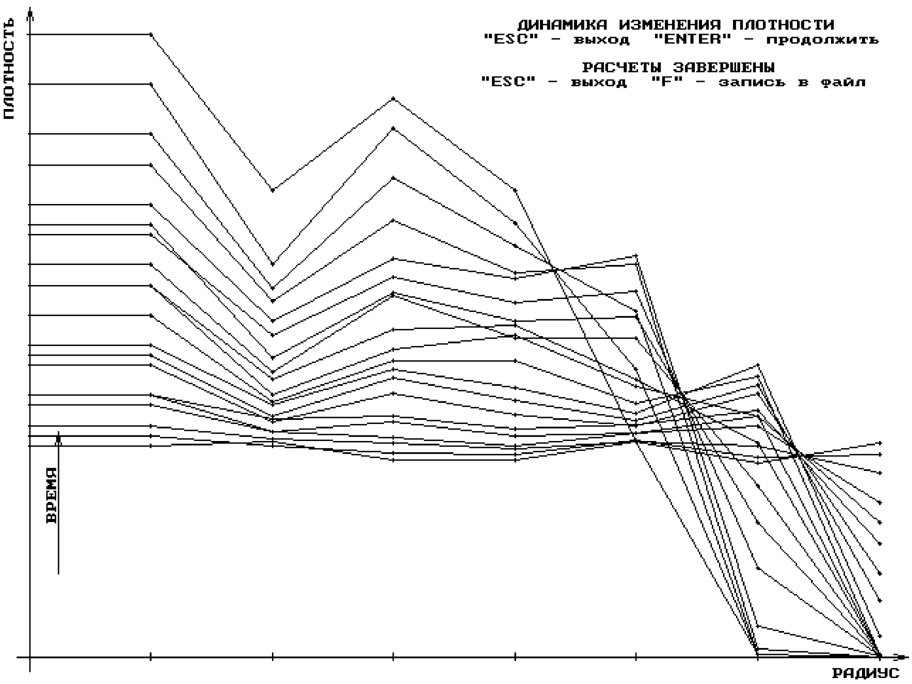

Рис. 2. Динамика изменения плотности по кольцам ($N = 1000$)

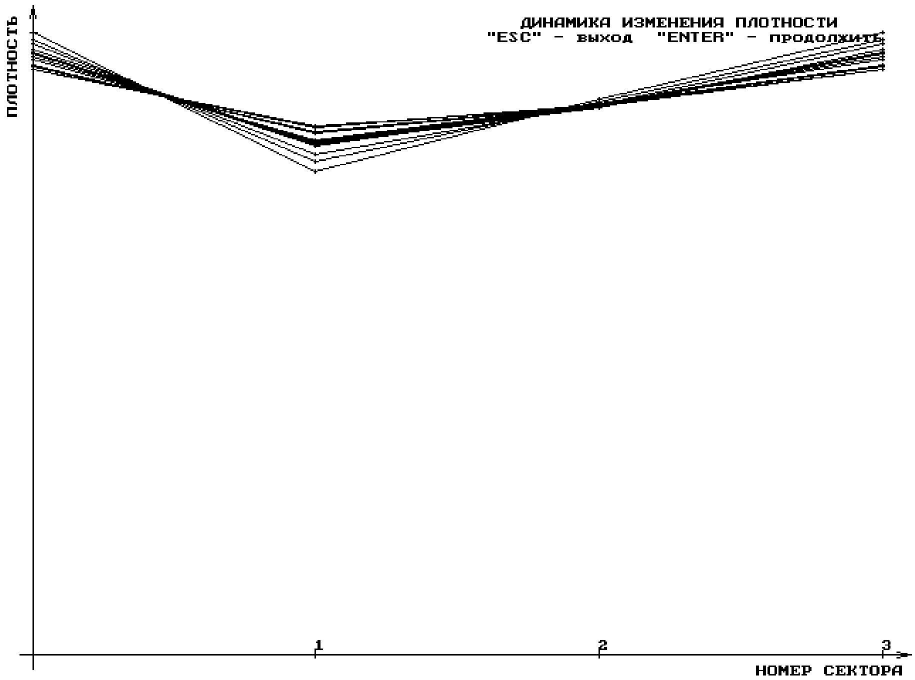

Рис. 3. Динамика изменения плотности по секторам ($N = 1000$)

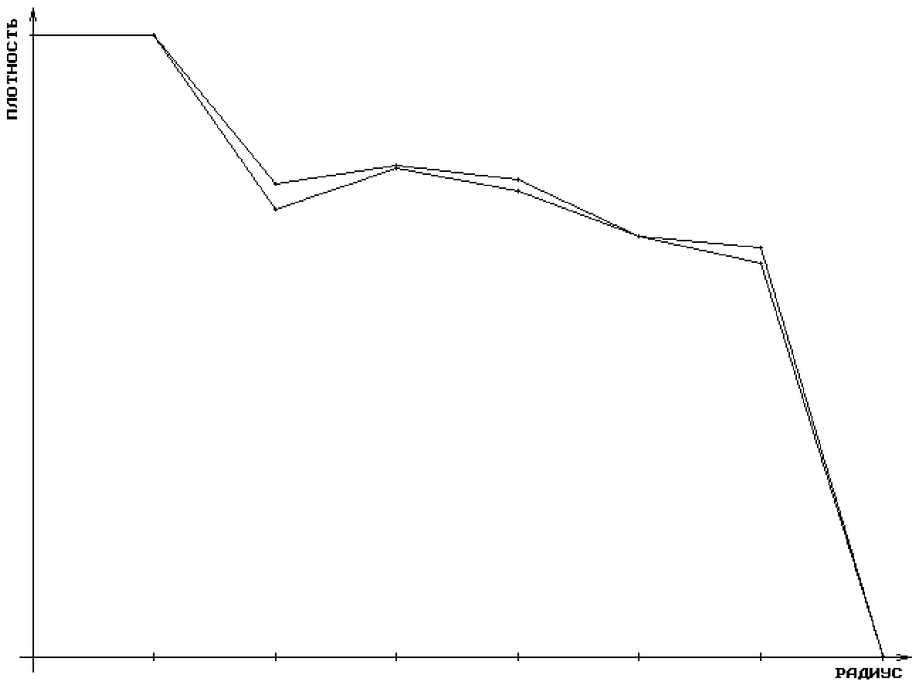

Рис. 4. Сравнение графиков плотности, полученных при различных шагах по времени ($t_1 = 0.001$, $t_2 = 0.0005$, $N = 1000$)

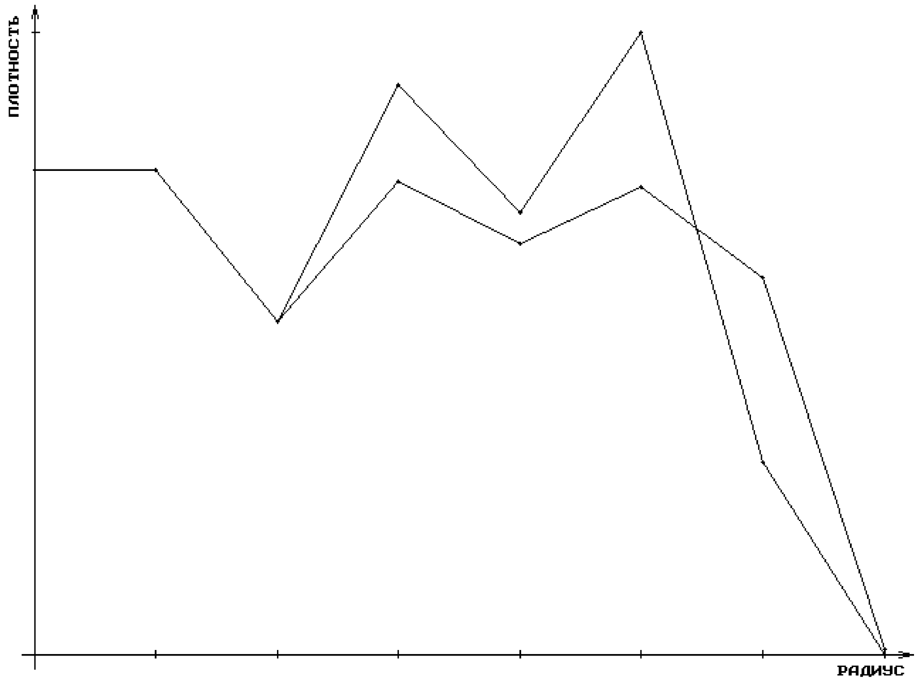

Рис. 5. Сравнение графиков плотности, полученных при различных шагах по времени ($t_1 = 0.001$, $t_2 = 0.0005$, $N = 500$)

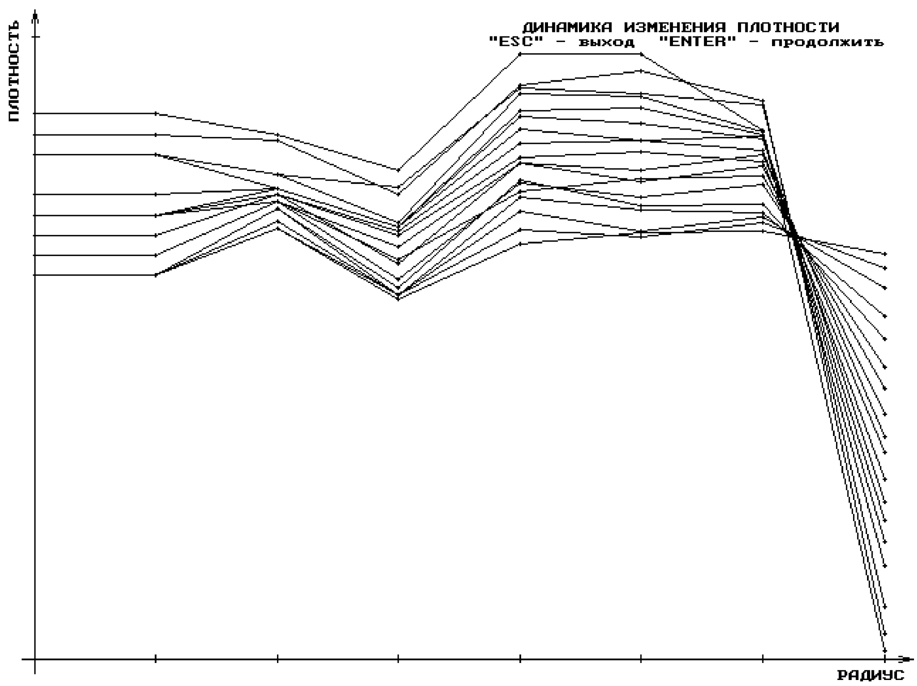

Рис. 6. «Блокировка» плотности ($N = 1000$, $t = 0.0007$)

свойствах системы). С ростом N мы приближаемся к непрерывному случаю, когда плотность материальных точек внутри окружности в каждый момент времени близка к константе.

Таким образом, в разряженной среде мы наблюдаем формирование некоторой самоорганизующейся[1] кольцевидной структуры, в которой переход от одного макросостояния к другому характеризуется скачкообразным изменением распределения плотности внутри рассматриваемой области.

Представляет интерес случай, когда в гравитационном взаимодействии участвует несколько сортов частиц, массы которых различны. Мы меняли процентное содержание более тяжелых частиц, оставляя суммарную массу системы неизменной. Как показали эксперименты, траектория движения «легкой» частицы к центру системы далека от прямолинейной, тогда как в случае системы равномассовых частиц траектория близка к прямой. Это объясняется тем, что помимо суммарной гравитационной силы на «легкую» частицу действует значимая сила притяжения со стороны «тяжелых» соседей. Частица с меньшей массой попадает в «зону влияния» то одной, то другой «тяжелой» частицы, тем самым отклоняясь от начального направления движения. Этот процесс можно интерпретировать как борьбу за влияние на «легкие» частицы и описать системой ОДУ [4].

Литература

1. Богаченко Н.Ф., Файзуллин Р.Т. *Механические аналогии в задаче Штейнера* // Математические структуры и моделирование. 2002. Омск: ОмГУ. Вып. 9. С.80-87.
2. Жихалкина Н.Ф. *Динамический подход к задаче кластеризации* // Математические структуры и моделирование. 2000. Омск: ОмГУ. Вып. 5. С.133-139.
3. Жихалкина Н.Ф., Кисель И.В., Назаренко М.А., Файзуллин Р.Т. *Гравитационный метод безусловной глобальной оптимизации* // ОИЯИ Р5-97-255, Дубна, 1997. 14 с.
4. Жихалкина Н.Ф., Файзуллин Р.Т. *Число связей как управляющий параметр структуры* // Тезисы докладов МНТК. Динамика систем, механизмов и машин. ОмГТУ. Омск. 1995. С.59-60.
5. Жихалкина Н. Ф., Файзуллин Р. Т. *Гравитационные аналогии в задаче оптимизации* // Математические структуры и моделирование. 1998. Омск: ОмГУ. Вып. 2. С.60-76.
6. Поттер П. *Вычислительные методы в физике.* М.: Мир, 1975. С.162-193.
7. Хакен Г. *Информация и самоорганизация.* М.: Мир, 1991.
8. *Численное моделирование в астрофизике.* М.: Мир, 1988.
9. Ehrenfest P. *In what way does it become manifest in the fundamental lows of phisics that spase has three dimentions* // Proceed Amsterdam Academy. V.20. 1918. P.20.

[1] Система называется самоорганизующейся, если она без специфического воздействия извне обретает какую-то пространственную, временную или функциональную структуру [7].