Математические структуры и моделирование
2002, вып. 9, с. 1–4

УДК 541.124+517.95

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В РЕАКТОРЕ С КИПЯЩИМ СЛОЕМ КАТАЛИЗАТОРА

Р.К. Романовский, И.Д. Макарова, С.Е. Макаров

The article considers the boundary value problem, simulating the process in chemical reactor with the boiling layer of catalyst. The conditions of existence of stationary solutions are established.

При математическом моделировании реакторов идеального вытеснения возникают краевые задачи для гиперболических систем [1–5]. В частности, процесс в реакторе с кипящим слоем катализатора при реакции первого порядка (скорость реакции линейно зависит от концентрации реагирующего вещества) моделируется [2,3] краевой задачей для почти линейной гиперболической системы на плоскости

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} + \dfrac{\partial C}{\partial x} = \alpha(1-C), \\ \beta\dfrac{\partial \theta}{\partial t} + \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \gamma(1-C)e^{\theta} - \delta(\theta-\theta_r), \\ \dfrac{\partial \theta_r}{\partial t} - \dfrac{\partial \theta_r}{\partial x} = \delta(\theta-\theta_r), \quad (x,t)\in\Pi, \\ (\theta-\theta_r)_{x=0} = 0, \quad C|_{x=0} = 0, \quad \theta_r|_{x=1} = \theta_0, \\ (C,\theta,\theta_r)_{t=0} \quad \text{заданы.} \end{cases} \tag{1}$$

Здесь Π – полуполоса $(0,1)\times(0,\infty)$, C – концентрация реагирующего вещества, θ, θ_r – температуры в реакторе и холодильнике, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\theta_0$ – константы, из них первые четыре положительны. Предполагаются выполненными условия согласования нулевого и первого порядков в точках $(0,0), (1,0)$.

Корректная разрешимость краевых задач такого класса в различных функциональных пространствах обсуждалась в ряде работ [5–9]. В данной работе исследуются условия существования стационарных решений задачи (1). Попутно предложена процедура построения стационарных решений. Полученные результаты существенно дополняют результаты из [1] для задачи (1).

E-mail: makarov@math.omsu.omskreg.ru
Омский государственный технический университет
Омский государственный университет

Подставляя в (1) $C = u_0(x)$, $\theta = u_1(x)$, $\theta_r = u_2(x)$, получим: $u_0 = 1 - e^{-\alpha x}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du_1}{dx} = \gamma e^{u_1 - \alpha x} - \delta(u_1 - u_2), \\ \dfrac{du_2}{dx} = -\delta(u_1 - u_2), \quad x \in (0,1), \\ u_1(0) = u_2(0), \quad u_2(1) = \theta_0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Введем параметр $\Delta = \alpha + \delta/\gamma e^{\theta_0}$.

Теорема 1. *Для разрешимости краевой задачи (2) и тем самым для существования хотя бы одного стационарного решения краевой задачи (1) необходимо выполнение неравенства*

$$\rho = \frac{\alpha}{\gamma e^{\theta_0}} + e^{-\alpha} > 1 \tag{3}$$

и достаточно выполнение неравенств

$$\alpha > \gamma e^{\theta_0} > 1, \quad \frac{\alpha + \ln \Delta}{\alpha + \delta} > \frac{e^\delta - 1}{\delta}, \quad \rho \le 1 + \delta\Big(1 - \frac{1}{\gamma e^{\theta_0}}\Big). \tag{4}$$

Заметим, что из первого неравенства (4) следует, в частности, (3), $\Delta > 1$, *а также второе неравенство (4) при достаточно малых* $\delta > 0$.

Доказательство. 1. Из (2) легко получить

$$e^{-(u_1 - u_2)} \frac{d(u_1 - u_2)}{dx} = \gamma e^{u_2 - \alpha x} \ge \gamma e^{\theta_0 - \alpha x}.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[0,1]$, получим

$$1 - e^{u_2(1) - u_1(1)} \ge \gamma e^{\theta_0} \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

Для выполнения этого неравенства необходимо, чтобы правая часть была меньше 1, что эквивалентно (3).

Отметим, что из (2) следуют соотношения

$$\varepsilon = e^{u_1(0) - \theta_0} > 1, \quad T = u_1(1) - u_2(1) > 0, \quad u_1 - u_2 \in [0, T]. \tag{5}$$

2. Выполняя в (2) замену $(u_1, u_2) \to (u, v)$ по формулам

$$u = u_1 - u_2, \quad v = \gamma e^{u_1 - \alpha x}, \tag{6}$$

получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = v, \quad \dfrac{dv}{dx} = v(v - \delta u - \alpha), \quad v > 0, \\ u(0) = 0, \quad v(1) = \gamma e^{\theta_0 - \alpha + T}, \end{array} \right. \tag{7}$$

где T – постоянная (5). Очевидно, краевая задача (7) эквивалентна, с учетом (6), задаче (2). Далее нетрудно убедиться, что (7) эквивалентна краевой задаче на $[0, T]$ с неизвестными $v(u), x(u), T$:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{du} = v - \delta u - \alpha, \quad \dfrac{dx}{du} = \dfrac{1}{v}, \quad v > 0, \\ v(T) = \gamma e^{\theta_0 - \alpha + T}, \quad x(0) = 0, \quad x(T) = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Задача (8) представляет собой подкласс задач со свободной границей. Покажем, что при условиях (4) эта задача разрешима.

Первое неравенство (5) в обозначениях (6) имеет вид

$$\varepsilon = \frac{v(0)}{\gamma e^{\theta_0}} > 1. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$v(u) = \delta u + \alpha + \delta + \gamma e^{\theta_0} (\varepsilon - \Delta) e^u \tag{10}$$

удовлетворяет первому уравнению (8) и начальному условию (9). С учетом (10) первое краевое условие (8) принимает вид

$$\delta T + \alpha + \delta = \gamma e^{\theta_0} (\Delta + e^{-\alpha} - \varepsilon) e^T. \tag{11}$$

Наложим на начальную константу (9) дополнительное требование $\Delta < \varepsilon < \Delta + e^{-\alpha}$. Тогда $v > 0$ и уравнение (11) имеет точно один положительный корень T. Подставляя (10) во второе уравнение (8), интегрируя по отрезку $[0, u]$ и учитывая второе краевое условие (8), получим

$$x(u) = \int\limits_0^u \frac{ds}{v(s)}, \quad u \in [0, T]. \tag{12}$$

Из выполненного построения следует: при каждом $\varepsilon \in (\Delta, \Delta + e^{-\alpha})$ тройка $T, v(u), x(u)$, где $T = T(\varepsilon)$ – положительный корень уравнения (11), $v(u), x(u)$ – функции (10), (12), удовлетворяет всем соотношениям (8), кроме, быть может, третьего краевого условия. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать: существует $\varepsilon \in (\Delta, \Delta + e^{-\alpha})$, при котором выполняется и это условие.

С учетом (12) третье краевое условие принимает вид

$$J(\varepsilon) = \int\limits_0^{T(\varepsilon)} \frac{ds}{v(s, \varepsilon)} = 1, \tag{13}$$

где $v(u, \varepsilon)$ – функция (10). Так как функция $J(\varepsilon)$ непрерывна на $[\Delta, \Delta + e^{-\alpha})$, достаточно показать: при условиях (4) имеют место неравенства

$$J(\Delta) > 1, \quad \lim_{\varepsilon \uparrow \Delta + e^{-\alpha}} J(\varepsilon) < 1. \tag{14}$$

Имеем
$$J(\Delta) = \int\limits_0^{T(\Delta)} \frac{ds}{\delta s + \alpha + \delta} = \frac{1}{\delta} \ln\Big(1 + \frac{\delta}{\alpha + \delta} T(\Delta)\Big). \tag{15}$$
Из второго неравенства (4) следует
$$1 + \frac{\delta}{\alpha + \delta} T_0 > e^{\delta}, \quad T_0 = \alpha + \ln \Delta. \tag{16}$$
Число $T(\Delta)$ – корень уравнения (11) при $\varepsilon = \Delta$, число T_0 – корень уравнения, получаемое из него отбрасыванием первого слагаемого, откуда следует $T(\Delta) > T_0$. С учетом этого из (15), (16) следует первое неравенство (14). Далее, так как $T(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \uparrow \Delta + e^{-\alpha}$, то
$$\lim_{\varepsilon \uparrow \Delta + e^{-\alpha}} J(\varepsilon) = \int\limits_0^{\infty} \frac{ds}{v(s, \Delta + e^{-\alpha})} < \frac{e^{\alpha}}{\gamma e^{\theta_0}} \int\limits_0^{\infty} \frac{ds}{e^s + \Delta e^{\alpha}} = \frac{\alpha + \ln(e^{-\alpha} + \Delta)}{\alpha + \delta}. \tag{17}$$
Из последнего неравенства (4) легко получить: $\ln(e^{-\alpha} + \Delta) \le \ln(1 + \delta) \le \delta$. Отсюда и из (17) следует второе неравенство (14). Теорема доказана. ■

Отметим, что изложенное доказательство содержит процедуру построения решения краевой задачи (8). Параметры $\varepsilon, T(\varepsilon)$ могут быть найдены численно из системы уравнений (11), (13), затем функции $v(u), x(u)$ находятся по формулам (10), (12).

Литература

1. Зеленяк Т.И. *О стационарных решениях смешанных задач, возникающих при изучении некоторых химических процессов* // Дифференц. уравнения. 1966. Т.2, N.2. С.205–213.
2. Шеплев В.С., Мещеряков В.Д. *Математическое моделирование реакторов с кипящим слоем катализатора* // В кн.: Математическое моделирование химических реакторов. Новосибирск: Наука. Сиб. Отд. 1984. С.44–65.
3. Иванов Е.А. *Управление процессом в реакторе с псевдоожиженным слоем* // Там же. С.116–127.
4. Акрамов Т.А. *Качественный и численный анализ модели реактора с противотоком компонентов* //Математическое моделирование каталитических реакторов. Новосибирск: Наука. 1989. С.195–214.
5. Лаврентьев М.М.(мл.), Люлько Н.А. *Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач* // Сиб. матем. журнал. 1997. Т.38, N.1. С.109–124.
6. Аболиня В.Э., Мышкис А.Д. *Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости* // Мат. сб. 1960. Т.50, N.4. С.423–442.
7. Годунов С.К. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1979.
8. Елтышева Н.А. *К вопросу об устойчивости стационарных решений некоторых гиперболических систем* // Докл. АН СССР. 1986. Т.289, N.1. С.30-32.
9. Воробьева Е.В., Романовский Р.К. *Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости* // Сиб. матем. журнал. 2000. Т.41, N.3. С.531–540.