Математические структуры и моделирование
2002, вып. 9, с. 1–10

УДК 514.132;515.124

ОБ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИХ ТЕТРАЭДРАХ И ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Р.Р. Файзуллин

In this article relationships between ultrametric spaces and spaces of negative curvature are considered.

В данной работе представлено доказательство двух предложений о пространствах отрицательной кривизны.

1. Общие утверждения

Определение 1. Ультраметрическое пространство (УМП) – это метрическое пространство, в котором неравенство треугольника заменяется более сильным неравенством:

$$\rho(A,B) \leq \max(\rho(A,C), \rho(B,C)). \tag{1}$$

Предложение 1. *Метрическое пространство U является ультраметрическим тогда и только тогда, когда каждая тройка его точек при вложении в S_k^2 есть подмножество окружности. Когда три точки не подчиняются ультраметрике, то составленный из них треугольник можно вписать в S_k^2 не для всякого k. Пусть даны три точки в S_k^2 и они изометричны подмножеству УМП. Тогда при любом k они лежат на окружности.* ■

Предложение 2. *Любые четыре точки УМП изометрически вкладываются в S_k^3, образуя при любом k в S_k^3 вписанный в сферу тетраэдр. И обратно, если метрическое пространство U таково, что каждая четверка его точек изометрически вложена в подмножество сферы в S_k^3 при любом $k \leq 0$, то U есть УМП.*

Если же тетраэдр в S_k^3 вписывается в шар, то его вершины вложены из УМП. ■

Предварительно докажем несколько необходимых геометрических фактов о тройках и четверках точек УМП.

Мы будем пользоваться теоремой косинусов и известным свойством углов параллельности в пространстве Лобачевского: $\cos P_k(a) = \operatorname{th}(ka)$ [1].

Найдем соотношения между тройками точек УМП и соответствующие им треугольники. Определим, какие ограничения (1) накладывает на эти треугольники. Рассмотрим четыре типа треугольников, изображенных на рис. 1, а)-г).

E-mail: ramillien@mail.ru
Омский государственный университет

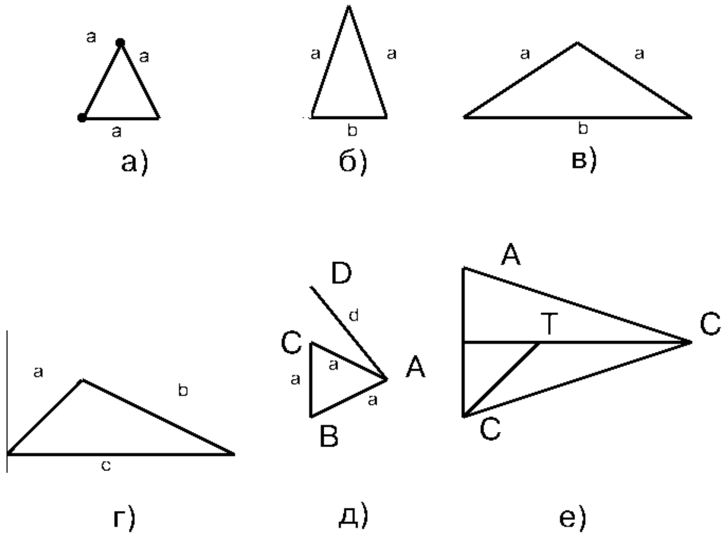

Рис. 1.

Из них ультраметрическому неравенству будут удовлетворять треугольники следующих двух типов:

Тип 1. Равносторонние треугольники: сторона $a = a = a$ (рис.1,а).

Тип 2. Равнобедренные с основанием меньшим, чем боковая сторона: $a > b$ (рис.1,б).

Рассматриваем также два типа треугольников, для которых не выполняется ультраметрическое неравенство:

Тип 3. Равнобедренные с основанием большим, чем боковая сторона: $b > a$ (рис.1,в).

Тип 4. Треугольники с тремя различными сторонами: $c > max(a, b) = b$ (рис.1, г).

Итак, из четырех выделенных типов треугольников допустимыми мы считаем два типа треугольников – 1-й и 2-й. Точно так же найдем типы тетраэдров, которые можно составить из допустимых треугольников.

Проведем построение по шагам, отсеивая тетраэдры, для вершин которых не выполняется неравенство (1).

На первом шаге выбираем тип треугольника ABC. Вспомнив классификацию треугольников, замечаем, что целесообразно рассмотреть два варианта.

Вариант 1.

Первый шаг. Рассматриваем треугольник ABC типа 1, сторона $AD = d$ (рис.1,д).

Второй шаг. Вариант разобьем на подварианты:

1а) $AD > a$. Следовательно, по вышеизложенной классификации $\triangle\ ADC$ 2-го типа, $DA = DC = d$, $DB = DC = d$ из рассмотрения $\triangle DBC$.

1б) $AD = a$, $AD = AC = a$.

Удобно рассмотреть три случая:

1б$_1$) $DC = a$. По (1) $DB \leq$a.

1б$_2$) $DC < a$, значит, или $DB = BC$ или $DC = BC$ (из подчинения вершин $\triangle DBC$ неравенству (1)) .

1б$_3$) $DC > a$ и $\triangle ADC$ 3-го типа, таким образом, случай 1б$_3$) противоречит (1).

1в) $AD < a$, и по подчинению вершин $\triangle ADC$ неравенству (1) выполняется $DC = AC$. А по рассмотрению $\triangle\ DBC$ верно $DB = DC$.

Вариант 2.

Первый шаг. Рассматриваем треугольник ABC типа 2, сторона $a = AB = AC > BC = b$.

Второй шаг. Вариант также разобьем на подварианты:

2а) $AD < a$ из рассмотрения $\triangle\ ADC$, по (1), $DC = a$. Из рассмотрения $\triangle\ ADB$, по (1), $DB = AD$. Вершины тетраэдра $ABCD$ не противоречат (1) и AD с BC в любом отношении.

2б) $AD = a$, по (1), $DC \leq a$ $DB \leq a$ $BC \leq a$. Не ограничивая общности: $DB = DC \geq BC$

2в) $AD > a$. Из (1) для $\triangle\ ADC$ и $\triangle\ ADB$ $AD = DB = DC \geq AB = AC \ \geq\ BC$.

Итак, рассмотрев эти тетраэдры, для вершин которых выполняется неравенство (1), – будем называть ультраметрическими – выделим два типа тетраэдров, полностью описывающие все тетраэдры с вершинами, изометричными точкам УМП.

Тип I: $AD = DC = DB = d \geq a = AB = AC \geq BC = b$.

Тип II: $AD = d \leq DC = DB = AB = AC = a \geq BC = b$. Отношения между AD и BC произвольные.

2. Доказательство предложения 1

Необходимость. Без потери общности будем считать, что $a > b \geq c$. Если окружность для этого треугольника существует, то ее центр – это пересечение срединных перпендикуляров. Мы докажем, что срединные перпендикуляры, проведенные к b и c, не пересекаются. Достаточно будет показать, что они не пересекают биссектрису угла A. Рассмотрим углы параллельности отрезков M_1A, M_2A. Надо сравнить $A/2$ с $P_k(c/2)$. Так как $\mathrm{th}(t)$ монотонно стремится снизу к 1 при $t \to \infty$, то

$$\cos(P_k(c/2)) = th(kc/2) <= th(kb/2) = \cos(P_k(b/2)). \tag{2}$$

То есть при $k \to \infty \quad P_k(c/2) \to +0$.

Следовательно, нужно показать, что $\cos(A_k/2) < \cos(P_k(c/2))$ при больших k. Это будет достаточным, так как из (2) следует, что $P_k(c/2) > P_k(b/2)$. По теореме косинусов:

$$\cos(A_k) = \frac{\cosh(kb)\cosh(kc) - \cosh(ka)}{\sinh(kb)\sinh(kc)}. \tag{3}$$

Так как A, B, C – точки метрического пространства, расстояния между ними подчиняются неравенству треугольника, то $a < b + c$, $\cos(A_k) \to 1$, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = 0$.

Сравним при возрастающем k числа $\cos(A_k/2) = \sqrt{(1 + cos(A_k))/2}$ и $\mathrm{th}(kc/2)$. Покажем, что

$$\sqrt{0.5 + \frac{\cosh(kb)\cosh(kc) - \cosh(ka)}{2 * \sinh(kb)\sinh(kc)}} < \mathrm{th}(\frac{kc}{2}). \tag{4}$$

Очевидно, что обе части неравенства (4) положительны (далее используем символы сравнения – $\bigvee$, $\vee$) и

$$\frac{\sinh kb \sinh kc + \cosh kb \cosh kb - \cosh ka}{2\sinh kb \sinh kc} \vee \frac{\exp(2kc) - 2\exp(kc) + 1}{\exp(2kc) + 2\exp(kc) + 1}, \tag{5}$$

$$\frac{2\exp(kb + kc) + 2\exp(-kb - kc) - 2(\exp(ka) + exp(-ka))}{2(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) - \exp(-kc))} \vee \left(\frac{\exp(kc) - 1}{\exp(kc) + 1}\right)^2. \tag{6}$$

Упростим эти выражения, введя слагаемые:

$$C_1(k) = \frac{\exp(-ak)(\exp(2ck) + 2\exp(ck) + 1)}{(\exp(kc) - \exp(-kc))(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2},$$

$$C_2(k) = \frac{\exp(ak)(2\exp(ck) + 1)}{(\exp(kc) - \exp(-kc))(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2},$$

$$C_3(k) = \frac{\exp(bk)(\exp(ck) + \exp(-ck) - 2)}{(\exp(kc) - \exp(-kc))(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2},$$

$$C_4(k) = \frac{\exp(-bk)(\exp(3ck) - 2\exp(2ck) + \exp(ck) + 4)}{(\exp(kc) - \exp(-kc))(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2},$$

$$C_5(k) = \frac{-\exp(ak + 2ck) + 4\exp(bk + 2ck)}{(\exp(kc) - \exp(-kc))(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2}.$$

Рассмотрим сравнение:

$$C_1(k) + C_2(k) + C_3(k) + C_4(k) + C_5(k) \bigvee 0. \tag{7}$$

При $kc > 0$ функция $\exp(kc) - \exp(-kc) > 0$, т.е. знак неравенства (7) при умножении на $(\exp(kc) - \exp(-kc))$ не изменится.

Получаем

$$(\exp(kc) - \exp(-kc))(C_1(k) + C_2(k) + C_3(k) + C_4(k) + C_5(k)) \bigvee 0. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим поведение слагаемых в формуле (8) при увеличении k, при этом учтем, что $a > b \geq c$. У нас возникают два набора слагаемых.

14) Слагаемые, стремящиеся к 0 при $k \to +\infty$. Это $(C_1(k), C_2(k), C_3(k), C_4(k))$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\exp(-ak)(\exp(2ck) + 2\exp(ck) + 1)}{(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2} = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\exp(ak)(2\exp(ck) + 1)}{(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2} = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\exp(bk)(\exp(ck) + \exp(-ck) - 2)}{(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2} = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\exp(-bk)(\exp(3ck) - 2\exp(2ck) + \exp(ck) + 4)}{(\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2} = 0.$$

Обоснование: $-a+c < -a+2c < b+2c$; $a < a+c < b+2c$; $b-c < b+c < b+2c$; $-b+c < -b+2c < -b+3c < b+2c$;

5) Слагаемое $(\exp(kc) - \exp(-kc))C_5$, которое не стремится к 0 при $k \to +\infty$. Заметим, что $a + 2c > b + 2c$. А $(-\exp(ak + 2ck) + 4\exp(bk + 2ck))/((\exp(kb) - \exp(-kb))(\exp(kc) + 1)^2)$ при возрастании k есть функция, эквивалентная функции $-\exp(ak + 2ck - bk - 2ck) = -\exp(ak - bk)$ и $\lim\limits_{k\to+\infty}[-\exp(ak - bk)] = -\infty$. Это значит, что с некоторого k_0 знак в (7) меньше нуля. Следовательно, когда кривизна пространства менее $-k_0^2$, то срединные перпендикуляры к b и c не могут пересекать идущую между ними прямую – биссектрису угла A. Значит, они тем более не пересекаются между собой. Отсюда следует, что точки A, B, C не лежат на окружности.

Достаточность. Найдем точку M: $|MA| = |MB| = |MC|$. Без ограничения общности считаем, что $|AB| = c \leq |AC| = |BC| = a$ (см. рис.1,e).

Опустим перпендикуляр из C на AB. Точка T произвольна: $T \in CH$. Найдем функцию $f_8(t) = |CT| - |BT|$, где t есть расстояние от T до C. $f_8(t) = t - |BT(t)|$. Используем теорему синусов геометрии Лобачевского для треугольника HCB. Надо показать, что $CH > BH$. Рассмотрим $\triangle ABC$, в нем против большей стороны лежит больший угол.

В треугольнике ABC $\angle ACB$ против основания, а угол $\angle ABC$ против боковой стороны. Вспомним нашу классификацию треугольников. Для 1-го и 2-го типов треугольников это значит, что $\angle ACB \leq \angle ABC$, $\angle HCB = 1/2\angle ACB < \angle ABC$. Видим, что в $\triangle HCB$ сторона CH, лежащая против $\angle ACB$, больше стороны BH, лежащей против $\angle HCB$. Следовательно, $f_8(|CH|) > 0$. В то же время $f_8(t)$, являясь композицией непрерывных функций, принимает на концах промежутка $[0, |CH|]$ разные знаки. По теореме Больцано-Вейерштрасса на $(0, |CH|)$ есть точка t_0 такая, что $f_8(t_0) = 0$. Таким образом, найдена искомая точка M, она лежит на расстоянии t_0 от C. Так как CH срединный перпендикуляр к AB, то расстояния от $\forall T \in CP$ до A и B совпадают. А так как

$f_8(t_0) = 0$, то совпадает расстояние от M до C и B. Таким образом, точки A, B, C принадлежат окружности.

3. Доказательство предложения 2

Рассмотрим функции

$$f(u) = \frac{\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}$$

и

$$\cos(\gamma) = f_1(u, a) = \frac{\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}(a)}{\operatorname{sh}^2(u)}.$$

Необходимость.

Надо доказать, что:

1) Ультраметрические тетраэдры вкладываются в S^3_k при каждом k.

2) Эти тетраэдры – подмножества сфер.

Докажем утверждение 1). Для этого необходимо и достаточно показать, что справедливы следующие утверждения:

а) Сумма углов при каждой вершине $< 2\pi$.

б) Для углов при вершине верно неравенство треугольника: ($\alpha \leq \beta + \gamma$.)

Вычислим косинусы углов (γ_0) для треугольников 1-го типа (d), 2-го типа ($d > b, \gamma < \gamma_1$). Рассмотрим

$$\cos(\gamma_0) = f(u) = \frac{\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}. \tag{9}$$

Так как $\lim\limits_{u \to 0} f(u) = 1/2$, а $u = |d\sqrt{K}|$, $f'(u) > 0$ при $u > 0$, $f((0, +\infty)) = (1/2, 1)$, $f(u) = \cos(\gamma_0)$, значит, $\gamma_0 \in (0, \pi/3)$.

Это вычисление было проведено для равностороннего треугольника.

Для треугольника 2-го типа γ – это угол при вершине, $\cos(\gamma) = f_1(u, a)$,

$$f_1(u, a) = \frac{\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}(a)}{\operatorname{sh}^2(u)}, \tag{10}$$

$f_1(u, a) \geq f(u)$ при $\operatorname{ch}(a) \leq \operatorname{ch}(u)$. Для этого неравенства достаточно того, что основание треугольника b меньше боковой стороны d. Теперь рассмотрим полную производную функции $f_1(u, a)$ по кривизне k

$$f_1'(u, a) = \frac{2\operatorname{ch}(u)(\operatorname{ch}(a) - 1)}{\operatorname{sh}(u) \cdot (\operatorname{ch}(u)^2 - 1)} \cdot d - \frac{sh(a)}{sh^2(u)} \cdot b > 0. \tag{11}$$

Функция $f_1(u(k), a(k))$ возрастает по k при $k > 0$. Мы вспомнили также, что u и a есть функции от k.

Очевидно, что $f_1([a, +\infty), a) = [f(a), 1)$ и $\lim\limits_{k \to +\infty} f_1(u(k), a(k)) = 1$. Следовательно, $cos(\gamma) \in (f(a), 1)$, $\gamma \in (0, arccos(f(a))$, $arccos(f(a)) \in (0, \pi/3)$.

Используем равенство

$$\cos(\gamma_1) = f_3(u, a) = \frac{\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(a) - \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(a)}. \tag{12}$$

Сравним $f_3(u, a)$ с $f(u)$:

$$\frac{\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(a) - \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(a)} \vee \frac{\operatorname{ch}^2(u) - \operatorname{ch}(u)}{\operatorname{sh}^2(u)}. \tag{13}$$

Для решения этой задачи надо исследовать функцию

$$f_4(t) = \frac{\operatorname{ch}(t) - 1}{\operatorname{sh}(t)}. \tag{14}$$

Также, учитывая, что $f_4'(t) = (\operatorname{ch}(t) - 1)/(\operatorname{sh}^2(t)) > 0$ при $t > 0$, по (1) $f_4(a) \leq f_4(u)$. А $f_3(u, a) \leq f(u)$. Угол $\gamma_1 \in (arccos f_4(a), arccos f(a)]$. Получены пределы и отношения для углов треугольников 1 и 2 типов: угол $\gamma_0 \in (0, \pi/3]$. Угол $\gamma \in (0, arccos(f(a)))$, $\gamma_1 \in (arccos f_4(a), arccos f(a)]$. Отсюда следует, что $\gamma_i \in (0, \pi/2)$, $\gamma \in (0, \pi/3)$,

$$0 < \gamma_0 < \gamma < \gamma_1 < \pi/2. \tag{15}$$

Докажем пункт (а). Выберем любую вершину, три ее плоских угла α, β, η подчиняются (15), значит, $\alpha + \beta + \eta < 3\pi/2 < 2\pi$.

Доказательство пункта (б) опирается на проведенную выше классификацию тетраэдров по двум типам.

Тип I. Здесь $d = DA = DC = DB \geq a = AB = AC \geq BC = b$ и $u = \sqrt(|K|)$. Проведем доказательство по вершинам.

Вершина A. Тривиальные неравенства $\angle DAB + \angle BAC \geq \angle DAC = \angle DAB$; $\angle DAC + \angle BAC \geq \angle DAB = \angle DAC$. Сравним $cos(BAC)$ и $cos(DAB)$ по величине. Имеем

$$\cos(BAC) = \frac{\operatorname{ch}(ua)\operatorname{ch}(ua) - \operatorname{ch}(ub)}{\operatorname{sh}(ua)\operatorname{sh}(ua)}, \tag{16}$$

$$\cos(DAB) = \frac{\operatorname{ch}(ud)\operatorname{ch}(ua) - \operatorname{ch}(ud)}{\operatorname{sh}(ud)\operatorname{sh}(ua)}. \tag{17}$$

Рассмотрим цепочку неравенств

$$\frac{\operatorname{ch}^2(ua) - \operatorname{ch}(ub)}{\operatorname{sh}^2(ua)} \geq \frac{\operatorname{ch}^2(ua) - \operatorname{ch}(ua)}{\operatorname{sh}^2(ua)} \geq \frac{\operatorname{ch}(ud)}{\operatorname{sh}(ud)} \frac{\operatorname{ch}(ua) - 1}{\operatorname{sh}(ua)}. \tag{18}$$

Докажем последнее неравенство. После упрощения достаточно исследовать $f_5(t) = \operatorname{ch}(t)/\operatorname{sh}(t)$. При $t > 0$

$$f_5'(t) = \frac{-4\exp(2t)}{(\exp(2t) - 1)^2} < 0. \tag{19}$$

Следовательно, функция $f_5(t)$ убывает при $t > 0$. И $ud \geq ua$, следовательно, $f_5(ud) \leq f_5(ua)$, $\cos(BAC) \geq f_5(ua) \geq \cos(DAB) > 0$, значит, $\angle BAC < \angle DAB < 2\angle DAB$.

Перейдем к вершине D. Очевидны неравенства: $\angle BDA = \angle CDA < \angle CDA + \angle BDC$. Для другого угла можно записать

$$\cos(BDC) = \frac{\mathrm{ch}^(ud) - \mathrm{ch}(ub)}{\mathrm{sh}^2(ud)} > \frac{\mathrm{ch}^2(ud) - \mathrm{ch}(ua)}{\mathrm{sh}^2(ud)} = \cos(BDA). \tag{20}$$

Значит, $\angle BDC < \angle BDA < 2\angle BDA$.

В силу симметрии (углы при B, C одинаковы) осталось рассмотреть B. Докажем, что $\angle CBD > \angle DBA$ и $\angle CBD > \angle ABC$. Для разрешения нижеследующего сравнения (21) используем функцию f_4 :

$$\cos(CBD) = \frac{\mathrm{ch}(ub)\,\mathrm{ch}(ud) - \mathrm{ch}(ud)}{\mathrm{sh}(ub)\,\mathrm{sh}(ud)} \vee \cos(DBA) = f_5(ud) f_4(ua). \tag{21}$$

Очевидно, что $f_4(ub) < f_4(ua)$, так как $ua > ub$ и $f_4'(t) > 0$. Следовательно, $\cos(CBD) < \cos(DBA)$, $\cos(ABC) = f_5(ua)f_4(ub)$, $\cos(CBD) = f_5(ud)f_4(ub)$, $f_5(t)$ монотонно убывает при $t > 0$ и $d > a$. Поэтому $\cos(CBD) < \cos(ABC)$. Таким образом, верны следующие неравенства: $\angle DBA + \angle CBD > \angle CBD > \angle ABC$; $\angle ABC + \angle CBD > \angle DBA$. Надо доказать, что

$$\angle ABC + \angle DBA > \angle CBD. \tag{22}$$

Имеем $\angle ABC + \angle DBA \in (0, \pi)$, $\angle CBD \in (0, \pi/2)$. Отсюда получаем

$$\angle ABC + \angle DBA \geq \angle CBD \Leftrightarrow \cos(ABC + DBA) \leq \cos(CBD). \tag{23}$$

Выражение (23) эквивалентно формуле

$$\cos(ABC)\cos(DBA) - \sin(ABC)\sin(DBA) \vee \cos(CBD).$$

Для сокращения записи введем следующие функции:

$$T_1(u,b,a,d) = \sqrt{\mathrm{sh}^2(ud)\,\mathrm{sh}^2(ub) - \frac{(\mathrm{ch}(ub)-1)^2\,\mathrm{ch}^2(ua)\,\mathrm{sh}^2(ud)}{\mathrm{sh}^2(ua)}},$$

$$T_2(u,b,a,d) = \sqrt{\mathrm{sh}^2(ud)\,\mathrm{sh}^2(ub) - \frac{((\mathrm{ch}(ua)-1))^2\,\mathrm{ch}^2(ud)\,\mathrm{sh}^2(ub)}{\mathrm{sh}^2(ua)}},$$

$$T_r(u,b,a,d) = T_1(u,b,a,d)T_2(u,b,a,d).$$

Неравенство (23) для углов равносильно неравенству

$$(\mathrm{ch}(ub)-1)f_5(ua)f_4(ua)\,\mathrm{ch}(ud) - T_r(u,b,a,d) \leq (\mathrm{ch}(ub)-1)\,\mathrm{ch}(ud). \tag{24}$$

После некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned}(\mathrm{ch}(ub)-1)f_5(ua)f_4(ua)\,\mathrm{ch}(ud) - T_r(u,b,a,d) \leq \\ \leq (\mathrm{ch}(ub)-1)f_5(ua)f_4(ua)\,\mathrm{ch}(ud)\end{aligned} \tag{25}$$

или

$$(\mathrm{ch}(ub)-1)f_5(ua)f_4(ua)\,\mathrm{ch}(ud)=(\mathrm{ch}(ub)-1)f(ua)\,\mathrm{ch}(ud). \tag{26}$$

Так как $ua\in[0,+\infty)$, то $f(ua)\leq 1$ и, значит,

$$\mathrm{ch}(ud)(\mathrm{ch}(ub)-1)f(ua)\leq \mathrm{ch}(ud)(\mathrm{ch}(ub)-1).$$

Неравенство (24) выполняется, значит, неравенство (22) доказано. Первый тип тетраэдров исследован.

Докажем пункт б) для II-го типа тетраэдров, $AD=d; BC=b$. Рассмотрим вершину A. Нетривиальное неравенство: $\angle CAB\vee 2\angle CAD$, причем косинусы этих углов равны

$$\cos(CAB)=\frac{\mathrm{ch}^2(ua)-\mathrm{ch}(ub)}{\mathrm{sh}^2(ua)}, \tag{27}$$

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{ch}^2(ua)-\mathrm{ch}(ub)}{\mathrm{sh}^2(ua)}\geq\frac{\mathrm{ch}^2(ua)-\mathrm{ch}(ua)}{\mathrm{sh}^2(ua)}=\\ =f_4(ua)f_5(ua)\geq f_4(ud)f_5(ua)=\cos(CAD).\end{gathered} \tag{28}$$

Следовательно, $\angle CAB\leq\angle CAD<2\angle CAD$. В случае рассмотрения вершины D доказательство проводится с точностью до переобозначений. Для вершин B, C по аналогии можно показать, что $\angle DBA<2\angle CBD$.

2) Докажем вложение четверки точек в сферу. Для доказательства используем результаты о вписываемости ультраметрических треугольников в окружности.

У тетраэдра I-го типа основание (ABC) вписывается в окружность, ее центр H. Отрезок DH – равноудален от A,B,C. На этом отрезке выберем некоторую точку T. По аналогии с доказательством вписываемости ультраметрического треугольника в окружность достаточно доказать, что $DH>HA$. Проведя AH до пересечения с BC, получим M. Сравнив наложением медианы к BC у $\triangle\ ABC$ и $\triangle DBC$, получим $DM\geq AM$, $\angle DAM\geq\angle MDA>\angle MDA/2=\angle HDA$, следовательно, в $\triangle MAH$ стороны $DH>AH$ – по противолежащим углам. Использовав рассуждения из доказательства вписания ультраметрического треугольника в окружность, получим $\exists\ T_0\in DH$: $|T_0D|=|T_0A|$. Так как T_0 равноудалена от A, B, C, то T_0 – центр искомой сферы.

Рассмотрим тетраэдр II типа $c=CD<DA=DB=AC=AB=d>AB=b$. Отметим точки M_1 и M_2 – середины AB и CD. Получим $M_1M_2=1/kch[(ch(kd))/(ch(kc/2)ch(kb/2))]$. Найдем гладкую функцию для $|DT|-|AT|$ $T\in M_1M_2$. Сравнивая углы в треугольниках $\triangle AM_1D$ $\triangle AM_2D$, получим, что $AM_1<DM_1$, $AM_2>DM_2$ и

$$\begin{gathered}|AT|-|DT|=f_9(t)=\\ =\frac{1}{k}\left(arcch\left(ch[\frac{kb}{2}]ch(C_1-kt)\right)-arcch(ch(kt)ch\left(\frac{kc}{2}\right)\right)\right),\end{gathered} \tag{29}$$

где

$$C_1=arcch\left[\frac{\mathrm{ch}(kt)}{\mathrm{ch}(kb/2)\,\mathrm{ch}(kc/2)}\right].$$

Функция $f_9(t)$ гладкая. На M_1 и M_2 она принимает значения, противоположные по знаку. По теореме Больцано-Вейерштрасса на M_1M_2 найдется точка M_0: $AM_0 = DM_0$. По построению $AM_0 = BM_0$ $DM_0 = CM_0$. Мы получили центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$. Утверждения 1) и 2) доказаны. То есть четверки точек, подчиняющиеся ультраметрическому неравенству треугольника (1), вкладываются в подмножества сфер в S_k^3 при любом $k > 0$.

Достаточность. Из четырех вершин выбираем три. Опустим из центра шара перпендикуляр на проходящую через выбранные три точки плоскость Ф. Пересечением перпендикуляра с плоскостью Ф будет точка Л. От трех выбранных вершин точка Л равноудалена, тем самым они лежат на окружности. Используя предложение 1, получаем: любая тройка вершин из четырех данных вложена в УМП. Отсюда следует, что все четыре точки вложены в УМП.

Литература

1. Лобачевский Н.И. *Геометрические исследования по теории параллельных линий.* М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1945.