Математические
структуры и моделирование
2001, вып. 8, с. 22–27

УДК 517.53:517.947.42

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ В СРЕДНЕМ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ю.Ф. Стругов

In this article proof existence of extremal mappings of circular domain that are quasi-conformal in the mean with free values on another component is presented.

Введение

Введем основные термины и определения. $D,\ D^*$ — ограниченные области в R^n; $x = (x_1, \dots, x_n)$—произвольная точка в R_n; $dist(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами A и B; $diam A$ — диаметр множества A; $m_n(A) = |A|$ — n-мерная мера Лебега множества A; $\Gamma(A, B; D)$ — семейство кривых, соединяющих множества A и B в области D; $M(\Gamma(A, B; D))$ — n-мерный модуль семейства кривых Γ [1, гл.2]; $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ — гомеоморфное отображение области D на область D^*, $f^{-1}(y)$ — обратное отображение области D^* на область D.

В точках дифференцируемости отображения $f(x)$ определены величины: $\nabla f(x) = f'(x)$ – матрица Якоби отображения $f(x)$ в точке x; $J(x, f) = \det f'(x)$ – якобиан отображения $f(x)$;

$$|\nabla f(x)|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2 .$$

Величина

$$H_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(x, f)^n}$$

называется локальной внутренней характеристикой квазиконформности отображения $y = f(x)$ в точке x, где $J(x, f) \neq 0$; здесь обозначено

$$l(x, f) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|.$$

Обозначим $J_j^i(x, f)$ – алгебраическое дополнение элемента $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ определителя $J(x, f)$. Определим функционалы

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{|D|} \int\limits_D H_I(x, f) dx + \frac{1}{|D^*|} \int\limits_{D^*} H_I(y, f^{-1}) dy,$$

E-mail: strugov@univer.omsk.su
Омский государственный университет

$$\mathcal{F}(\nabla f; D, D^*) = a \int\limits_D |\nabla f(x)|^p dx + b \int\limits_D \left(\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{J_j^i(x,f)}{J(x,f)} \right)^2 \right)^{\frac{q}{2}} dx,$$

где $p \geqslant n$, $q \geqslant n$, и коэффициенты

$$a = \frac{|D|^{\frac{p-n}{n}}}{2n^{\frac{p}{n}}|D^*|^{\frac{p}{n}}}, \quad b = \frac{|D^*|^{\frac{q}{n}}}{2n^{\frac{q}{n}}|D|^{\frac{q+n}{n}}}.$$

Обозначим $\mathcal{M}_{p,q}(D, D*)$ класс всех гомеоморфизмов $f : D \to D*$, таких, что $f \in W_n^1(D)$, $f^{-1} \in W_n^1(D*)$, на которых функционал $\mathcal{F}(\nabla f) < \infty$. Класс всех гомеоморфных отображений, на которых $\mathcal{H}_I(f) < \infty$, обозначим $\mathcal{M}_0(D, D^*)$.

Отображения этого класса дифференцируемы почти всюду, прямые и обратные отображения обладают N-свойством, для них справедливы классические формулы замены переменных и правило дифференцирования сложных функций.

1. Теоремы существования

Теорема 1. *Пусть класс отображений $\mathcal{M}_{p,q}(D, D^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{n-1}$, не пуст. Тогда в нем существует отображение $f_0 : D \to D*$ такое, что*

$$\mathcal{F}(\nabla f_0) \leq \mathcal{F}(\nabla f)$$

для всех $f \in \mathcal{M}_{p,q}(D, D^*)$.

Доказательство. Пусть $f_k, k = 1, 2, \ldots$, произвольная последовательность, минимизирующая функционал $\mathcal{F}(\nabla f)$ в классе $\mathcal{M}_{p,q}(D, D^*)$. Тогда последовательность $\mathcal{F}(\nabla f_k)$ ограничена сверху некоторой константой M_1. В силу теоремы 2 [2, с.167] для всех номеров m справедливы неравенства

$$\mathcal{H}_I(f_m) \leq (a^{-1}\mathcal{F}(\nabla f^m))^{\frac{n}{p}} \frac{|D|^{\frac{p-n}{n}}}{|D^*|} + |D|^{-1} a^{\frac{-q}{p+q}} b^{\frac{-p}{p+q}} \mathcal{F}(\nabla f_m) \leq M < \infty,$$

где $M = M(n, p, q, |D|, |D^*|, M_1)$ — некоторая постоянная величина. Известно, что из всякой бесконечной последовательности отображений $f_m : D \to D^*$ с равномерно ограниченным функционалом $\mathcal{H}_I(f_m)$ можно извлечь равномерно внутри D сходящуюся подпоследовательность. При этом предельное отображение либо постоянно, либо является гомеоморфизмом области D на область D^* ([3, следствие 2.3.9, с.71]), принадлежащим классу $\mathcal{M}_0(D, D^*)$. Выберем из минимизирующей последовательности сходящуюся подпоследовательность. Если эта минимизирующая подпоследовательность равномерно в D сходится к гомеоморфизму $f_0 \in \mathcal{M}_0(D, D^*)$, то по теореме 3 [2, с.174]

$$\mathcal{F}(\nabla f_0) \leq \lim_{m \to \infty} \mathcal{F}(\nabla f_m),$$

и теорема в этом случае доказана.

Осталось показать, что минимизирующая последовательность не может сходиться к постоянному отображению. Действительно, пусть $f_m \to c$ при $m \to \infty$.

Так как последовательность отображений ограничена в пространстве $W_n^1(D)$, то ([4, с.94]) для любой непрерывной функции φ финитной в области D

$$\int\limits_D \varphi(x) J(x, f_m) dx \to 0$$

при $m \to \infty$. Пусть $B^n(a, r)$ – шар, замыкание которого содержится в D. Выберем финитную функцию φ такой, что $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ для всех $x \in B^n(a, r)$. Тогда, применяя неравенство Гельдера, получим

$$0 < |B^n(f, r)| < \int\limits_D \varphi(x) dx \leq \left(\int\limits_D \frac{\varphi(x) dx}{J(x, f_m)^{\frac{q}{n}}} \right)^{\frac{n}{n+q}} \left(\int\limits_D \varphi(x) J(x, f_m) dx \right)^{\frac{q}{n+q}}.$$

Из этого неравенства и равенства $\lim_{m\to\infty} \int\limits_D \varphi(x) J(x, f_m) dx = 0$ следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_D \frac{\varphi(x) dx}{J(x, f_m)^{\frac{q}{n}}} = +\infty.$$

Далее, применяя неравенство (5) из теоремы 2 ([2, с.167]), найдем

$$\int\limits_D \frac{\varphi(x) dx}{J(x, f_m)^{\frac{q}{n}}} < \int\limits_D \frac{dx}{J(x, f_m)}^{\frac{q}{n}} \leq \int\limits_D \frac{H_I(x, f_m)^{\frac{q}{n}}}{J(x, f_m)^{\frac{q}{n}}} \leq b_{-1} \mathcal{F}(\nabla f_m).$$

Таким образом, $\mathcal{F}(\nabla f_m) \to \infty$, а это противоречит тому, что f_m– минимизирующая последовательность. Следовательно, предельное отображение не может быть постоянным, и тем самым теорема доказана. ■

Пусть γ – некоторый континуум из области D, а γ^* – континуум из области D^*. Ниже будем предполагать, что в области D^* найдется континуум γ^*, для которого класс отображений $\mathcal{M}_{p,q}(D\backslash\gamma, D^*\backslash\gamma^*) \neq \emptyset$. Зафиксируем области D, D^* и континуум γ. Докажем, что существует континуум γ^* и гомеоморфное отображение $f_0 : D \to D^*$ такое, что

$$\mathcal{F}(\nabla f_0; D\backslash\gamma, D^*\backslash\gamma^*) = \inf_{\gamma^*} \mathcal{F}(\nabla f; D\backslash\gamma, D^*\backslash\gamma^*).$$

Лемма 1. *Пусть $f_m : D\backslash\gamma \to D^*\backslash\gamma_m$ – минимизирующая последовательность. Тогда из нее можно извлечь подпоследовательность, которая сходится равномерно в области D к некоторому непрерывному отображению*

$$f : D\backslash\gamma \to R^n, f \in W_p^1(D\backslash\gamma).$$

Доказательство. [5, лемма 1, с.69] ■

Лемма 2. *Отображение f непостоянно.*

Доказательство. Допустим, что $f = c$. Пусть U и V окрестности континуума γ такие, что $\overline{U} \subset D$, $\overline{V} \subset U$. Тогда $\overline{U} \backslash V$ – компактное множество в области $D\backslash\gamma$, и на нем $f_m \to c$ при $m \to \infty$. Следовательно, $diam \gamma_m \to 0$ при $m \to \infty$, и поэтому меры Лебега $|D^* \backslash \gamma_m| \geq \delta > 0$ для всех номеров m. Отсюда следует, что коэффициенты a, b (стоящие перед интегралами в функционалах $\mathcal{F}(\nabla f_m; D\backslash\gamma, D^*\backslash\gamma_m)$ и зависящие от номеров m) равномерно ограничены сверху и отделены от нуля. Поэтому из равенства

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{D\backslash\gamma} \frac{dx}{J(x, f_m)^{\frac{q}{n}}} = \infty,$$

также как и в доказательстве теоремы 1, вытекает неограниченность последовательности функционалов $\mathcal{F}(f_m; D\backslash\gamma, D_*\backslash\gamma_m)$. Полученное противоречие доказывает лемму. ∎

Лемма 3. $\liminf_{m\to\infty} |D\backslash\gamma_m| = d > 0$.

Доказательство. Так как отображение f непостоянно, поэтому из полунепрерывности интегралов Дирихле будем иметь

$$\liminf_{m\to\infty} \int\limits_{D\backslash\gamma} |\nabla f_m|^p dx \geq \int\limits_{D\backslash\gamma} |\nabla f|^p dx > 0.$$

Отсюда и из ограниченности последовательности функционалов следует ограниченность сверху последовательности коэффициентов $a = a(m)$ перед интегралами Дирихле. Из ограниченности последовательности коэффициентов следует утверждение леммы. ∎

Из топологии известно, что из ограниченной последовательности континуумов γ_m можно выбрать подпоследовательность, которая в метрике Хаусдорфа сходится к некоторому континууму γ^*.

Лемма 4. *Если $x \in D\backslash\gamma$, то $f(x) \in D^*\backslash\gamma^*$, причем $\gamma^* \subset D^*$ и $diam\ \gamma^* > 0$.*

Доказательство. Если $f(x) \in \partial D^*$, то по лемме 2.3.2 [3, с.64] отображение f постоянно, что противоречит лемме 2. Поэтому $f(x) \in D^*$. Если $\partial D^* \bigcap \gamma^{ast} \neq \emptyset$, то найдется $x \in D\backslash\gamma$ такое, что $f(x) \in \partial D^*$, и поэтому отображение постоянно. Полученное противоречие доказывает, что $\gamma^* \subset D^*$. Если $f(x) \in \gamma^*$ и $diam \gamma^* > 0$, то опять по лемме 2.3.2 из [3] получим, что отображение f постоянно. Если γ^* есть точка, то выберем две точки $a, b \in D\backslash\gamma$ такие, что $f(a) \neq f(b)$. Обозначим через E континуум, соединяющий в $D\backslash\gamma$ точку a и γ, F континуум, соединяющий точку b и γ, причем континуумы выбираем непересекающимися. Обозначим $\Gamma(E, F; D\backslash\gamma)$ семейство всевозможных кривых, соединяющих в области $D\backslash\gamma$ континуумы E и F. Пусть Γ^*_m— образ семейства Γ при отображении f_m. Тогда для модулей $M(\Gamma^*_m)$ справедливы оценки

$$M(\Gamma^*_m) \leq \int\limits_{D\backslash\gamma} \rho^n(x) H_I(x, f_m) dx \leq d(E, F)^{-n} \int\limits_{D\backslash\gamma} H_I(x, f_m) dx \leq M < \infty,$$

где $\rho(x) = d(E,F)^{-1}$– допустимая метрика для семейства кривых Γ ([6]). С другой стороны, $\lim_{m\to\infty} M(\Gamma^*_m) = \infty$ [1], так как $d(f_m(E), f_m(F)) \to 0$ при $m \to \infty$. Полученное противоречие доказывает невырожденность континуума γ^*. ■

Лемма 5. *Если $x_1, x_2 \in D\backslash\gamma, x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Доказательство. [5, лемма 4, с.70]. ■

Лемма 6. *Пусть $U \supset \gamma_*, \overline{U} \subset D^*$ – произвольная открытая окрестность континуума γ_*. Тогда из последовательности обратных отображений f_m^{-1} можно выбрать подпоследовательность, которая равномерно в $D^*\backslash\overline{U}$ сходится к некоторому непрерывному отображению $h : D^*\backslash\overline{U} \to R^n, h \in W_n^1(D^*\backslash\overline{U})$, при этом а) отображение h непостоянно; б) если $y \in D^*\backslash\overline{U}$, то $h(y)$– внутренняя точка множества $h(D^*\backslash\overline{U})$; с) Если $y_1, y_2 \in D^*\backslash\overline{U}, y_1 \neq y_2$, то $h(y_1) \neq h(y_2)$.* ■

Доказательство. Семейство обратных отображений, также как и в лемме 1, равномерно ограниченно и локально равностепенно непрерывно. Поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность к непрерывному отображению $h \in W_n^1$. Так как $h(f(x)) = x$ для любого x такого, что $f(x) \in D^*\backslash\overline{U}$, то отображение h непостоянно. Действительно, выражение $h(f(x))-x = (h(f(x)) - f_m^{-1}(f(x))) + (f_m^{-1}(f(x)) - f_m^{-1}(f_m(x)))$, начиная с некоторого номера, определено и стремится к нулю. Утверждения б), с) доказываются аналогично леммам 4-5.■

Лемма 7. *Предельное отображение f есть отображение области $D\backslash\gamma$ на область $D^*\backslash\gamma^*$.*

Доказательство. [5, лемма 6]. ■

Лемма 8. *Отображение f является гомеоморфизмом области $D\backslash\gamma$ на область $D^*\backslash\gamma^*$. Причем $f \in W_p^1(D\backslash\gamma), f^{-1} \in W_n^1(D^*\backslash\gamma^*)$.*

Доказательство. [5, лемма 7]. ■

Лемма 9. *Пусть $f_m : D\backslash\gamma \to D^*\backslash\gamma^*_m$– минимизирующая подпоследовательность из леммы 8. Тогда*

$$\mathcal{F}(\nabla f; D\backslash\gamma, D^*\backslash\gamma^*) \leq \liminf_{m\to\infty} \mathcal{F}(\nabla f_m; D\backslash\gamma, D^*\backslash\gamma^*_m).$$

Доказательство. [7, теорема, с.34], [2, теорема 3, с.174]. ■

Теорема 2. *Существуют континуум $\gamma^* \subset D^*$ и гомеоморфизм $f_0 : D\backslash\gamma \to D^*\backslash\gamma^*$ такие, что*

$$\mathcal{F}(\nabla f_0; D\backslash\gamma, D^*\backslash\gamma^*) = \inf_{\gamma^*} \mathcal{F}(\nabla f; D\backslash\gamma, D^*\backslash\gamma^*).$$

Доказательство. Из лемм 8,9, повторяя рассуждения доказательства теоремы [7], мы получим утверждение теоремы 2. ■

Литература

1. Сычев А.В. *Модули и пространственные квазиконформные отображения.* Новосибирск: Наука, 1983. С.152.
2. Стругов Ю.Ф. *О существовании гомеоморфных решений систем уравнений эллиптического типа* // Групповые и метрические свойства отображений. Межвузовский сборник научных трудов.Новосибирск, 1995. С.164–180.
3. Стругов Ю.Ф. *Квазиконформные в среднем отображения и экстремальные задачи. Ч.1.* – М.,1994.–153 с. Деп. в ВИНИТИ 05.12.94. N.2786 – В 94.
4. Решетняк Ю.Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* Новосибирск: Наука, 1982. с.279.
5. Стругов Ю.Ф., Гарифуллина Е.В. *О компактности семейств квазиконформных в среднем отображений со свободными значениями на границе* // Омский научный вестник. 1999. N.8. С.68-71.
6. Стругов Ю.Ф., Сычев А.В. *Различные классы пространственных отображений, квазиконформных в среднем* // Алгебра и математический анализ. Новосибирск, 1990. С.104-125.
7. Стругов Ю.Ф., Гарифуллина Е.В. *О существовании экстремального отображения кольцевой области со свободными значениями на одной граничной компоненте* // Омский научный вестник. 1999. N.9. С.34-37.