Математические структуры и моделирование
2001, вып. 8, с. 15–17

УДК 513.813

ЛОРЕНЦЕВА ФУНКЦИЯ РАССТОЯНИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.Н. Романов

In this article we will study the behaviour of Lorentzian distance function on cylindrical spaces, and will consider the reasons, bringing about origin of infinite importances of this function.

Целью данной работы является изучение поведения лоренцевой функции расстояния на пространствах, являющихся цилиндрами. А именно будут рассмотрены два примера лоренцевых многообразий и проведено исследование того, как ведёт себя определённая на них лоренцева функция расстояния. Все определения и обозначения соответствуют принятым в работе [1].

Пример 1. Пусть $(M,g)-$ пространство-время, где $M = \mathbb{R}^1 \times S^1-$ цилиндр, а метрика задаётся равенством:

$$ds^2 = -d\theta dt + f(-dt^2 + d\theta^2)$$

$$\|g\| = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{\theta t} \\ g_{t\theta} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & f \end{pmatrix},$$

где $\theta \in [0, 2\pi)$ – угловая координата; t – «вертикальная» координата времени, а $f = f(t) \geq 0$ – гладкая функция, зависящая от одного аргумента (от времени t), со следующими свойствами: $f = 0$ при $t = 0$ и $f \to +\infty$ при $t \to \pm\infty$. Данное пространство-время является хронологическим, так как в нём нет замкнутых времениподобных кривых,однако оно не является причинным: кривая $\gamma(\theta) = (0, \theta)$ представляет собой замкнутую причинную (изотропную) кривую. Метрика имеет некоторую «особенность» при $t = 0-$ она-то и создаёт замкнутую изотропную кривую, то есть имеет место нарушение причинности. В областях $\{t < 0\}$ и $\{t > 0\}$ замкнутых причинных кривых нет.

Покажем, что данное пространство-время допускает бесконечные значения лоренцевой функции расстояния. Возьмём точки $a = (-1, 0)$ и $b = (1, 0)$ и посчитаем лоренцеву длину какой-нибудь причинной кривой $\gamma[t, \theta(t)]$, их соединяющей, учитывая, что касательный вектор этой кривой в базисе пространства T_xM имеет координаты: $\dot{\gamma} = [1, \dot{\theta}]$:

$$L(\gamma) = \int_{-1}^{1} \sqrt{-g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{-(g_{tt} + 2\dot{\theta} g_{t\theta} + \dot{\theta}^2 g_{\theta\theta})} dt =$$

E-mail: romanow@univer.omsk.su
Омский государственный университет

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{-(-f - \dot{\theta} + \dot{\theta}^2 f)}dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{(-f)\dot{\theta}^2 + \dot{\theta} + f}\,dt$$

Рассматривая последнее подкоренное выражение $P = (-f)\dot{\theta}^2 + \dot{\theta} + f$ как квадратный трёхчлен от $\dot{\theta}$, можно найти его максимум:

$$P_{max} = f + \frac{1}{4f} \quad \text{при} \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2f}$$

Заметим, что кривой γ_{ab} с касательным вектором $\dot{\gamma} = [1, \dot{\theta} = 1/2f]$ существовать не может, так как $f = 0$ при $t = 0$. Однако $\dot{\theta}$ может принимать значения, сколь угодно близкие к значению $\dot{\theta} = 1/2f$. Поэтому, учитывая определение лоренцева расстояния, получаем следующее:

$$d(a, b) = sup\ L(\gamma_{ab}) = \int_{-1}^{1} \sqrt{P_{max}}dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{f + \frac{1}{4f}}dt \geq \int_{-1}^{1} \sqrt{0 + \frac{1}{4f}}dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{f}}dt$$

Используя разложение функции f в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$, покажем, что последний интеграл является расходящимся.

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2} + f'''(0)\frac{t^3}{6} + ...$$

Используя свойства функции f, получаем:

$$f(t) = f''(0)\frac{t^2}{2} + f'''(0)\frac{t^3}{6} + ...$$

Для того, чтобы показать,что интеграл $\int_{-1}^{1} 1/\sqrt{f}dt$ расходится, составим отношение:

$$\frac{t^\alpha}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}f''(0)t^{2-2\alpha} + \frac{1}{6}f'''(0)t^{3-2\alpha} + ...}}$$

Для сходимости интеграла необходимо выполнение неравенства: $\alpha < 1$. Однако в этом случае при $t \to 0$ получаем:

$$\frac{t^\alpha}{\sqrt{f}} \longrightarrow \infty$$

Таким образом, интеграл $\int_{-1}^{1} 1/\sqrt{f}dt$ является расходящимся, и поэтому лоренцевы длины причинных кривых, идущих из a в b, неограниченны. Отсюда следует, что лоренцево расстояние между точками a и b равно бесконечности:

$$d(p, s) = \sup\ L(\gamma_{ps}) = \infty$$

■

Пример 2. Рассмотрим пространство-время (M, g), где

$$M = \mathbb{R} \times S^1 \times S^1 = \{(t, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$(t, y, z) = (t, y, z + 1) \text{ и } (t, y, z) = (t, y + 1, z + a).$$

Число $a-$ иррациональное. Лоренцева метрика задаётся следующим образом:

$$ds^2 = -dtdy + (ch\, t - 1)^2(-dt^2 + dy^2) + dz^2$$

Данное пространство-время содержит захваченные причинные кривые, то есть имеет место явление захвата. В то же время оно является причинным, то есть в нём нет замкнутых причинных кривых (см. [2, с.217]). Однако поведение метрики вблизи области $\{t = 0\}$ приводит к возникновению бесконечных значений лоренцевой функции расстояния.

Для доказательства этого возьмём точки $a = (-1, 0, 0)$ и $b = (1, 0, 0)$ и рассмотрим причинные кривые, лежащие в гиперповерхности $\{z = 0\}$. Так как $z = 0$, то для вычисления длин таких причинных кривых используется уже рассмотренная ранее метрика:

$$ds^2 = -dtdy + f(-dt^2 + dy^2)$$

Здесь функция $f = (ch\, t - 1)^2\,(\geq 0)$ обладает всеми свойствами, описанными в предыдущем примере: $f = 0$ при $t = 0$ и $f \to +\infty$ при $t \to \pm\infty$.

Таким образом, справедлив предыдущий результат: лоренцевы длины причинных кривых, идущих из a в b, неограниченны и лоренцево расстояние между точками a и b равно бесконечности:

$$d(p, s) = \sup\ L(\gamma_{ps}) = \infty$$

Данное пространство-время не является устойчиво причинным, то есть малые изменения метрики могут приводить к замкнутым причинным кривым.

■

Используя технику построения лоренцевых многообразий, основанную на применении искривлённого лоренцева произведения (см. [1]), подобные пространства, допускающие бесконечные лоренцевы расстояния, можно получать достаточно легко. Во всех них причиной бесконечности расстояния будет как раз особый вид функции f и, соответственно, особое поведение метрики в определённых областях пространства-времени.

Литература

1. Бим Дж., Эрлих П. *Глобальная лоренцева геометрия.* М.: Мир, 1985.
2. Хокинг С., Эллис Дж. *Крупномасштабная структура пространства-времени.* М.: Мир, 1977.