Математические структуры и моделирование
2001, вып. 8, с. 40–43

УДК 517.938

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ПОТОКОВ

Б.К. Нартов

The new method of the optimization of the Smooth dynamic Systems of initial characteristics is discribed.

Представляемый метод оптимизации вектора начальных характеристик динамической системы был предложен нами в работе [1] для конкретной задачи оптимального управления траекториями подвижных объектов, характеристики которых ухудшаются в результате взаимодействия с объектами противника. В настоящем сообщении в основном излагаются результаты [2], где удалось распространить метод фиктивных потоков на весь класс гладких систем и существенно расширить его предметную область.

Рассмотрим гладкую управляемую систему

$$\dot{P}_k(t) = f_k(P_1(t), \ldots, P_N(t), x(t), t), \ 1 \le k \le N, \tag{1}$$

где $x(t)$ – вектор управления. Задав далее начальные условия, интервал управления $(0,T)$ и множество управлений X, запишем задачу

$$J(x^*) = \inf_{x \in X} J(x), \tag{2}$$

где

$$J(x) = F(P_1(T), \ldots, P_N(T)), \tag{3}$$

где F – непрерывно дифференцируема. Решаемая далее задача состоит в отыскании оптимальных в смысле (1)-(3) значений $P_k(0)$ при типичном ограничении $\sum_{k=1}^N P_k(0) = C$, где C – заданное число.

Рассмотрим предварительно динамическую систему

$$\dot{Z}_k(t) = -U_k(t) \cdot Z_k(t) + N^{-1} \sum_{i=1}^{N} U_i(t) \cdot Z_i(t), \ 1 \le k \le N, \tag{4}$$

с заданными начальными условиями $Z_k(0)$, где $U_k(t)$ – заданные непрерывные функции.

E-mail: nartov@iitpm.omsk.net.ru

Омский филиал Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 01-01-00303 – теоретическая часть, проект 01-07-90003 – верифицирующие эксперименты).

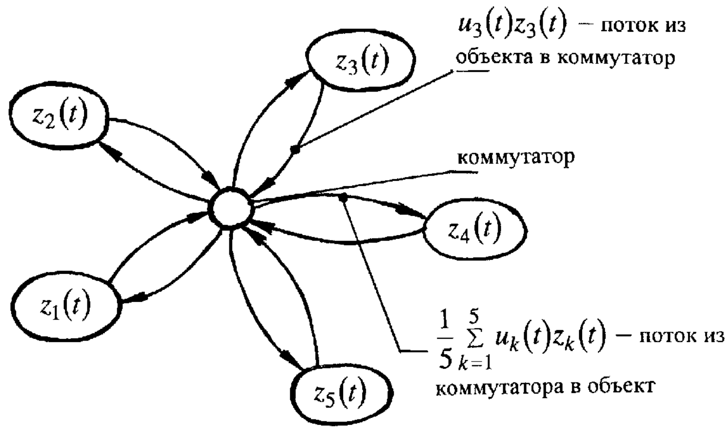

Рис. 1. Коммутатор потоков характеристик.

Обозначим

$$U(t) = \{U_k(\tau),\ 1 \le k \le N,\ 0 \le \tau \le t\};$$

$$U^+(t) = \{U_k(\tau)|U_k(\tau) \ge 0,\ 1 \le k \le N,\ 0 \le \tau \le t\};$$

$$Z(t) = \{Z_k(t),\ 1 \le k \le N\};$$

$$Z^+(t) = \{Z_k(t)|Z_k(t) \ge 0,\ 1 \le k \le N\};$$

$$Z^-(t) = \{Z_k(t)|Z_k(t) < 0,\ 1 \le k \le N\}.$$

Если $Z_k(t)$ есть характеристики некоторых объектов, то система уравнений (4) описывает управляемый «коммутатор» потоков характеристик из объекта в объект (рис.1).

При этом (4) обладает следующими полезными свойствами:

1. При любых начальных условиях $Z(0)$ произвольное управление $U(t)$ сохраняет начальный ресурс C, то есть

$$\sum_{k=1}^{N} Z_k(t) \equiv \sum_{k=1}^{N} Z_k(0) = C;$$

2. Любое управление $U^+(t)$ отображает произвольный набор неотрицательных начальных характеристик в некоторый набор неотрицательных конечных характеристик, то есть

$$U^+(t) : \ Z^+(0) \to Z^+(t),$$

и, более того, для любых двух наборов Z^{1+} и Z^{2+} с совпадающими суммами характеристик и любого t найдется

$$U^+(t) : \ Z^{1+}(0) \to Z^+(t) = Z^{2+}.$$

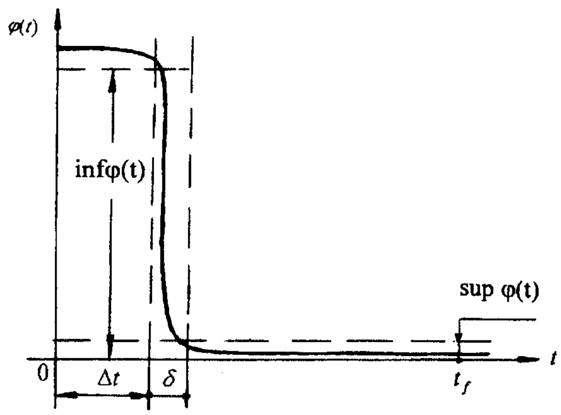

Рис. 2. График функции $\varphi(t)$.

3. Любое управление $U^+(t)$ отображает произвольный набор отрицательных начальных характеристик в некоторый набор отрицательных конечных характеристик, то есть

$$U^+(t) : Z^-(0) \to Z^-(t),$$

и, более того, для любых двух наборов Z^{1-} и Z^{2-} с совпадающими суммами характеристик и любого t найдется

$$U^+(t) : Z^{1-}(0) \to Z^-(t) = Z^{2-}.$$

Рассмотрим теперь следующую модификацию исходной системы уравнений (1):

$$\dot{\tilde{P}}_k(t) = f_k(\tilde{P}_1(t), \dots, \tilde{P}_N(t), x(t), t) - U_k\tilde{P}_k(t) + N^{-1}\sum_{i=1}^{N} U_i(t)\tilde{P}_i(t),\ 1 \le k \le N, \quad (5)$$

с начальными условиями и интервалом управления $(0, T)$ из задачи (1)-(3) и множеством управлений $\tilde{X} = X \otimes U$, где

$$U = \{U^+(t) | 0 \le U_k(t) \le \varphi(t),\ 1 \le k \le N,\ 0 \le t \le T\},$$

где $U_k(0)$ заданы; $\varphi(t)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция. При этом $\inf\varphi(t)$ на интервале $(0,\ \Delta t)$, $\sup\varphi(t)$ на интервале $(\Delta t + \delta,\ T)$, Δt и δ – регулируются параметрами $\varphi(t)$ независимо (рис.2). Конкретный вид $\varphi(t)$ вполне произволен.

Рассмотрим далее для системы (5) задачу

$$J(\tilde{x}^*) = \inf_{\tilde{x}\in\tilde{X}} J(\tilde{x}), \quad (6)$$

где

$$J(\tilde{x}) = F(\tilde{P}_1(T), \ldots, \tilde{P}_N(T)), \tag{7}$$

см. (2), (3). Используя теперь гладкость исходной системы (1) и исходного функционала качества (3) и свойства вспомогательной системы (4), можно показать, что при исходном ограничении $P_k(0) \geq 0$, $1 \leq k \leq N$, или $P_k(0) < 0$, $1 \leq k \leq N$, для любой исходной задачи вида (1)-(3), соответствующей вспомогательной задачи (5)-(7) и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая $\varphi(t)$, что

$$|P_k^*(0) - \tilde{P}_k(\Delta t + \delta)| < \varepsilon,\ 1 \leq k \leq N, \tag{8}$$

где $P_k^*(0)$ – искомые оптимальные начальные характеристики исходной задачи (1)-(3); $\tilde{P}_k(\Delta t + \delta)$ – характеристики из решения задачи (5)-(7), взятые в момент $\Delta t + \delta$. Случай несовпадающих знаков $P_k(0)$ требует более сложной модификации исходной задачи.

Замечание 1. В широком классе задач оптимального управления, например в задачах планирования конфликтов, часть начальных характеристик в (1) является неоптимизируемыми параметрами. В этом случае в системе (5) вспомогательной задачи (5)-(7) модифицируются лишь дифференциальные уравнения характеристик, начальные значения $P_k(0)$ которых могут быть оптимизированы.

Замечание 2. Задачу оптимального размещения начальных ресурсов можно поставить и для неуправляемой гладкой системы, переписав функционал качества (3) в виде

$$J(x) = F(P_1(T), \ldots, P_N(T)) = \tilde{F}(P_1(0), \ldots, P_N(0), T).$$

Представленный метод тривиально распространяется и на этот класс задач.

Замечание 3. Хотя решение вспомогательной задачи (5)-(7) и позволяет получить оптимальные начальные характеристики $P_k(0)$ исходной задачи (1)-(3) за один шаг, вопрос о цене дополнительных ограничений и численного представления функции $\varphi(t)$ в реализующем алгоритме вспомогательной задачи остается открытым.

Замечание 4. Расширение системы (4) позволяет записать и решать в виде задачи оптимального управления некоторые транспортные задачи линейного программирования. В этом случае матрица перевозок модифицируется в течение $(0, T)$ при $\varphi(t) = \text{const}$.

Литература

1. Nartov B.K. *Conflict of Moving Systems.* – AMSE Press, France, 1994. – 87 p.
2. Нартов Б.К., Чуканов С.Н. *Модели траекторного управления.* - Омск: Изд-во ОмГУ, 2001. – 95 с.