Математические структуры и моделирование
2001, вып. 8, с. 156–166

УДК 51:378

АНАЛИЗ ТИПИЧНЫХ ОШИБОК, ДОПУСКАЕМЫХ СТУДЕНТАМИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В.А. Далингер

The article analyses the subject and containing aspects of typical mistakes made by students in the process of the function limit studying and differential counting of the function of a variable.

В данной статье будут проанализированы предметно-содержательные аспекты **типичных ошибок, допускаемых студентами в процессе изучения предела функции** и дифференциального исчисления функции одной переменной.

Прежде чем переходить к разбору типичных ошибок, допускаемых студентами при вычислении пределов функций, сделаем два существенных замечания.

Замечание 1. В отношении понятия «бесконечность» в математическом анализе существует две точки зрения. Довольно значительная часть авторов (А.Ф.Бермант, В.И.Смирнов, Г.П.Толстов, Н.А.Фролов и др.) употребляют три символа бесконечности: $\infty, +\infty, -\infty$, понимая под ними следующее: $x_n \to \infty$, если $|x_n| > M$ при $n > N$; $x_n \to +\infty$, если $x_n > M$ при $n > N$; $x_n \to -\infty$, если $x_n < -M$ при $n > N$.

Другие же авторы (М.К.Гребенча, С.И.Новоселов, А.Я.Хинчин, В.Немецкий и др.) пользуются только двумя символами: $+\infty$ и $-\infty$, причем знак плюс иногда опускается, так что между символами $+\infty$ и ∞ нет никакого различия, как нет различия между числами $+5$ и 5.

Наконец, есть авторы, вставшие на промежуточную точку зрения. Так, в сборнике задач Н.А.Давыдова и др. «Сборник задач по математическому анализу: М.: Гостехизадт, 1953 г.» для предела на бесконечности пишут $x \to \infty$, $(x \to +\infty, x \to -\infty)$, а для бесконечного предела функции лишь $+\infty$ и $-\infty$.

Принятие первой точки зрения в преподавании обычно приводит к тому, что студенты под записью $x \to \infty$ подразумевают все-таки $x \to +\infty$, тем самым лишь укореняя вредную привычку иметь в виду лишь положительные значения. В этом грешат также сами авторы учебников и задачников. Так, рассматривая предел последовательности, пишут $n \to \infty$, тогда как при последовательном

E-mail: dalinger@omgpu.omsk.edu
Омский государственный педагогический университет

проведении своей точки зрения следовало бы писать $n \to +\infty$. Рассматривая бесконечный интервал, пишут $(a;\infty)$ вместо $(a;+\infty)$. Таким образом, символ ∞ употребляют двойственно: и как бесконечность неопределенного знака, и как положительную бесконечность, создавая тем самым ненужную путаницу и неопределенность.

В курсе математического анализа можно найти много примеров, когда требуется знание бесконечности определенного знака и, напротив, всегда можно обойтись без употребления бесконечности неопределенного знака. Так, желая показать, что при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ функция имеет обыкновенный предел, можно писать $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A$ вместо $x \to \infty$.

Можно надеяться, что вторая точка зрения, будучи более определенной, в конечном счете вытеснит первую, как не имеющую никаких преимуществ.

Замечание 2. Пусть требуется вычислить предел функции $f(x)$ в точке $a : \lim_{x\to a} f(x) = A$.

Для существования предела не требуется, чтобы функция была определена при $x = a$. Что же касается определения функции в некоторой окрестности этой точки, то в отношении этого существует две различные точки зрения. Одни требуют, чтобы функция была определена во всех точках некоторой окрестности точки а (А.Ф.Бермант, Н.А.Фролов, Н.А.Давыдов и др.). Другие же встают на более общую точку зрения, требуя лишь того, чтобы точка a была предельной для множества значений аргумента (Г.М.Фихтенгольц, Г.П.Толстов, М.К.Гребенча, С.И.Новоселов и др.).

В этом отношении интересен следующий пример. Задача. Существует ли предел функции $f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$ в точке $x = 0$?

Решение

Принимая вторую точку зрения, ответить на поставленный вопрос следует положительно: в любой окрестности нуля существуют точки, в которых функция определена, причем во всех таких точках ее значение равно 1. Следовательно, предел существует и равен 1.

Если стать на первую точку зрения, то ответ на поставленный вопрос отрицательный: предел не существует, так как в любой окрестности нуля имеются точки, в которых функция не определена.

Заметим, что в теории функций принята вторая точка зрения. Было бы нецелесообразно при изучении математического анализа принять первую точку зрения и дать на поставленный вопрос отрицательный ответ, а спустя некоторое время, когда студенты приступят к изучению курса «Теория функций», встать на более общую точку зрения и на тот же вопрос давать уже положительный ответ. Лучше сразу встать на общую точку зрения (хотя мы должны здесь заметить, что если придерживаться первой точки зрения, то ответ – «предела не существует» будет верным).

Перейдем к анализу типичных ошибок, допускаемых студентами при решении задач на вычисление пределов функций.

Задача 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение

Для вычисления предела надо раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, для чего разделим числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень переменной, то есть на x. Будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=-1$$

($\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ при $x\to+\infty$ являются бесконечно малыми, а поэтому их предел равен нулю).

Теперь поступим иначе. Внесем выражение $(1-x)$ под знак квадратного корня. Будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2-2x}}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{2x}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}}=\sqrt{1-\frac{0}{1}}=1.$$

Легко увидеть, что функция $f(x)=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$, стоящая под знаком предела, при всех значениях $x>1$ отрицательная и, следовательно, при $x\to+\infty$ не может иметь положительного предела.

Значит, второй способ привел к неверному результату.

Задача 2. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{2-x}$.

Решение

Раскроем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, разделив числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень переменной, то есть на x. Будем иметь:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}}{\frac{2}{x}-1}=-1.$$

Поступая иначе, а именно внеся знаменатель дроби под знак квадратного корня, приходим к следующему:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{2-x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1+x+x^2}{4-4x+x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}{\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x}+1}}=\sqrt{\frac{0+0+1}{0-0+1}}=1.$$

На этот раз, как нетрудно видеть, неверный результат получен первым способом.

Поясним суть ошибок, допущенных при решении этих двух задач.

Решая задачу 1 первым способом, мы делили числитель на x, а подкоренное выражение, стоящее в знаменателе, на x^2, то есть мы применяли первую строчку формулы

$$|x| = \begin{cases} \sqrt{x^2}, & x \geq 0; \\ -\sqrt{x^2}, & x < 0, \end{cases}$$

считая $x > 0$.

Так как в этой задаче $x \to +\infty$, то мы получили правильный результат. Та же формула, применяемая к решению задачи 2, приводит к ошибке, ибо теперь $x \to -\infty$, и, следовательно, мы должны брать вторую строчку указанной формулы.

Аналогичное замечание можно сделать и относительно второго способа. Действительно, достаточно учесть, что в задаче 1 имеем: $(1 - x) < 0$, а в задаче 2: $(2 - x) > 0$.

Таким образом, при решении этих двух задач тем или иным способом мы получим правильный результат, если воспользуемся той строчкой формулы

$$|x| = \begin{cases} \sqrt{x^2}, & x \geq 0; \\ -\sqrt{x^2}, & x < 0, \end{cases}$$

которая соответствует знаку выражения, вносимого под знак квадратного корня.

Задача 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Решение

Покажем вначале ошибочное решение, приводящее, конечно же, к неверному ответу, которое мы можем найти, например, в учебнике К.А.Поссе, И.И.Привалова «Курс дифференциального исчисления», 1938.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

(При вычислении этого предела использован первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ или $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$).

Ошибка допущена из-за того, что использовано равенство $\sqrt{x^2} = x$ вместо $\sqrt{x^2} = |x|$.

Приведем верное решение.

Так как $\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}|\sin \frac{x}{2}|$, то имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

Полученное выражение $\frac{x}{|\sin \frac{x}{2}|}$ при $x \to 0$ предела не имеет, но существуют односторонние пределы.

При $x \to 0+$ имеем

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0+} \frac{x}{|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sin\frac{x}{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

(При вычислении этого предела использован первый замечательный предел: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ или $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$).

При $x \to 0-$ будем иметь

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0-} \frac{x}{|\sin\frac{x}{2}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sin\frac{x}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

Задача 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$.

В нашей практике все студенты, выполнявшие данное задание, получали ответ, что при $a > 0$ предел равен $(-\frac{1}{2})$. Их решение было таким.

Предполагая, что $x \neq a$ и $a > 0$, они преобразовывали функцию, стоящую под знаком предела:

$$\frac{\sqrt{ax}-x}{x-a} = \frac{(\sqrt{ax}-x)(\sqrt{ax}+x)}{(x-a)(\sqrt{ax}+x)} = \frac{ax-x^2}{(x-a)(\sqrt{ax}+x)} =$$

$$= \frac{x(a-x)}{(x-a)(\sqrt{ax}+x)} = -\frac{x}{\sqrt{ax}+x}.$$

Отсюда они получили:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{ax}-x}{x-a} = -\lim_{x\to a} \frac{x}{\sqrt{ax}+x} = -\frac{1}{2}.$$

Но при $a = 0$ имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax}-x}{x-a} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{\sqrt{ax}+x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x}{x}\right) = -1.$$

Заметим, что при $a < 0$ существуют лишь односторонние бесконечные пределы: если $x \to a+0$, то предел равен $(+\infty)$, если $x \to a-0$, то предел равен $(-\infty)$.

Задача 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x+1}{2x-1})^x$.

Решение

Ошибочное решение состоит в том, что не рассматриваются два разных случая: $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Студенты вычисляли предел следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot 0\right)^2 = 0.$$

Верное решение состоит в том, чтобы учесть, что при достаточно больших $|x|$ имеет место неравенство $|\frac{x+1}{2x-1}| < 1$ и при $x \to +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{2x-1})^x = 0$, а при $x \to -\infty$ будем иметь $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{x+1}{2x-1})^x = +\infty$.

Задача 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$

Решение

Ошибочное решение выглядит следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-2x-1)-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{5-0}{\sqrt{1-0-0}+\sqrt{1-0+0}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

Неверное решение состоит в том, что не рассмотрены отдельно два случая: $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Приведенное решение справедливо лишь при $x \to +\infty$. Если же $x \to -\infty$, то предел будет равен $(-\frac{5}{2})$.

Покажем верное решение этой задачи.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x^2-2x-1)-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{|x|(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}})} = \pm\frac{5}{2},$$

где знак плюс соответствует условию $x \to +\infty$, а знак минус — условию $x \to -\infty$.

Подобного рода ошибки мы наблюдаем и при решении такой задачи.

Задача 7. Вычислить $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

Решение

Решение будет ошибочным, если мы его проведем следующим образом

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{2}.$$

На самом же деле этот ответ может быть получен лишь тогда, когда мы x устремим к $(+\infty)$, если же $x \to -\infty$, то будем иметь

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = -\infty.$$

Сделаем вначале некоторые пояснения общего характера, прежде чем переходить к разбору **типичных ошибок, допускаемых при решении задач на нахождение производной функции.**

Пусть на некотором множестве задана функция и требуется найти для нее производную. Мы должны найти одно или несколько выражений, которые в совокупности давали бы результат, справедливый на той области определения данной функции, где она имеет производную (в большинстве случаев, встречающихся на практике, это будет вся область определения, за исключением, быть может, отдельных точек).

В качестве подтверждения сказанному приведем несколько примеров.

1)

$$(|x|)' = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Данная функция определена в интервале $(-\infty; +\infty)$, в то время как производная существует лишь для значений $x \neq 0$.

2) $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$

Здесь необходимо указать ограничение, так как естественная область определения правой части шире области определения данной функции.

3) $(\mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x})' = \frac{1}{1+x^2}, x \neq 1.$

В этой задаче особенно важно указать ограничение. Если его не учитывать, то, зная, что $(\mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x})' = \frac{1}{1+x^2}$, мы бы сделали вывод: $\mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ $=\mathrm{arctg}x + C$, который оказался бы неверным.

Дело в том, что данная функция и ее производная существуют и непрерывны в двух промежутках: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. Для каждого из этих промежутков мы получили свое равенство:

$$\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1+x}{1-x}\right)' = \begin{cases} \mathrm{arctg}\,x + C_1, & x < 1; \\ \mathrm{arctg}\,x + C_2, & x > 1. \end{cases}$$

При $x = 0$ имеем $\mathrm{arctg}\ 1 = \mathrm{arctg}\,0 + C_1$, откуда $C_1 = \frac{\pi}{4}$. При $x = \sqrt{3}$ получим для левой части $\mathrm{arctg}\,\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ $=\mathrm{arctg}1+\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \pi = -\frac{5}{12}\pi$, а для правой части $\mathrm{arctg}\sqrt{3} + C_2 = \frac{\pi}{3} + C_2$, откуда $C_2 = -\frac{3}{4}\pi$.

Данный пример показывает, что указание ограничения $x \neq 1$ дало возможность избежать ошибки.

В русле рассмотренных трех примеров небезынтересно рассмотреть вывод с помощью дифференцирования ряда тождеств связывающих между собой аркфункции.

4) Из равенства $(\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, |x| < 1$, следует, что $\arcsin x + \arccos x = C$.

Подставив $x = 0$, получим $C = \frac{\pi}{2}$. Этот же результат получим и на концах сегмента [-1; 1]. Действительно

$$\arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, выведено следующее тождество:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| < 1.$$

5) Функция $f(x) = 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ определена на множестве $-1 < x \leq 1$, а ее производная $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на множестве $|x| < 1$. Следовательно, на множестве $|x| < 1$ справедливо тождество $2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x + C$, а так как при $x = 0$ $2\,\mathrm{arctg}\,1 = \frac{\pi}{2}$ и $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, то $C = 0$. При $x = 1$ мы также имеем равенство $2\,\mathrm{arctg}\,0 = \arccos 1 = 0$.

Окончательно $2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x, -1 < x \leq 1$.

Особенностью приведенных примеров является то, что производные существуют не на всей области определения данных функций. Поэтому для установления тождества необходима особая проверка его справедливости для тех точек, где производная не существует.

Перейдем к разбору типичных ошибок по теме «Дифференциальное исчисление».

Задача 8. Найти производную функции $y =$arcsec$x$ при $|x| \leq 1$.

Решение

Ошибочное решение выглядит следующим образом.

Воспользовавшись тождеством arcsec$x = \arccos\frac{1}{x}, |x| \geq 1$. Тогда

$$(\mathrm{arcsec}\,x)' = \left(\arccos\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2}{x}\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

при $|x| > 1$.

Здесь, как и во многих других случаях, неверно использовано тождество $\sqrt{x^2} = |x|$. Следовало бы отдельно рассмотреть два случая $x > 1$ и $x < -1$, тогда:

а) при $-\infty < x < -1$ будем иметь

$$(\mathrm{arcsec}\,x)' = \frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{-x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

б) при $1 < x < +\infty$ будем иметь

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1; \\ -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}$$

Покажем несколько иной способ нахождения производной указанной функции $y{=}\operatorname{arcsec} x$ при $|x| \geq 1$.

Обратная функция $x = \sec y$ возрастает на каждом из промежутков $[0; \frac{\pi}{2})$ и $(0; \frac{\pi}{2}]$ и имеет конечную производную $(\sec y)' = \sec y{\cdot}\operatorname{tg} y$ в каждом из указанных промежутков.

Но так как при $y = 0$ и $y = \pi$ $(\sec y)' = 0$, то в этих точках не будет конечной производной для $y{=}\operatorname{arcsec} x$.

Таким образом, производную $y{=}\operatorname{arcsec} x$ следует искать в отдельности при $-\infty < x < -1$ и при $1 < x < +\infty$.

а) $1 < x < +\infty, 0 < y < \frac{\pi}{2}$.

$$(\operatorname{arcsec} x)'_x = \frac{1}{(\sec y)'_y} = \frac{1}{\sec y \cdot tgy} = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

б) $-\infty < x < -1, \frac{\pi}{2} < y < \pi$.

$$(\operatorname{arcsec} x)'_x = \frac{1}{(\sec y)'_y} = \frac{1}{\sec y \cdot tgy} = \frac{1}{\sec y(-\sqrt{\sec^2 y - 1})} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

В случае а) перед квадратным корнем взят знак плюс, так как $\operatorname{tg} y > 0$ при $0 < y < \frac{\pi}{2}$, а в случае б) взят знак минус, так как $\operatorname{tg} y < 0$ при $\frac{\pi}{2} < y < \pi$.

Использование тождества $\sqrt{x^2} = |x|$ требует и дифференцирование функций $y = \arcsin f(x)$ и $y = \arccos f(x)$. Покажем это.

Пусть нужно найти, например, производную функции $y = \arcsin \frac{a}{x}$.

Решение

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}} \cdot (-\frac{a}{x^2}) = \frac{-a|x|}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{a}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Задача 9. Найти производную функции

$$y = \arccos x + \arccos \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}.$$

Решение

Ошибочное решение состоит в том, что находятся производные каждого слагаемого и затем не проводится тождественное преобразование полученного выражения, а именно оно позволяет сделать верный вывод. Итак,

$$y' = \left(\arccos x + \arccos\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}}.$$

Произведем тождественное преобразование полученного выражения, для чего введем обозначение $\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}} = N$. Это выражение преобразуем по формуле «сложного» квадратного корня:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

При этом мы должны рассматривать четыре случая:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$;

$$N = \sqrt{1-\sqrt{4x^2-4x^4}} = \sqrt{\frac{1+|1-2x^2|}{2}} - \sqrt{\frac{1-|1-2x^2|}{2}} = x - \sqrt{1-x^2}.$$

б) $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$N = \sqrt{1-\sqrt{4x^2-4x^4}} = \sqrt{\frac{1+|1-2x^2|}{2}} - \sqrt{\frac{1-|1-2x^2|}{2}} = \sqrt{1-x^2} - x.$$

в) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 0$;

$$N = \sqrt{1+\sqrt{4x^2-4x^4}} = \sqrt{\frac{1+|1-2x^2|}{2}} + \sqrt{\frac{1-|1-2x^2|}{2}} = \sqrt{1-x^2} - x.$$

г) $-1 \le x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$N = \sqrt{1+\sqrt{4x^2-4x^4}} = \sqrt{\frac{1+|1-2x^2|}{2}} + \sqrt{\frac{1-|1-2x^2|}{2}} = \sqrt{1-x^2} - x.$$

Таким образом:

$$N = \begin{cases} x - \sqrt{1-x^2}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1; \\ \sqrt{1-x^2} - x, & -1 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Для производной заданной функции получаем:

$$y' = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ 0, & \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1. \end{cases}$$

Заметим, что при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем угловую точку, в которой производная не существует.

Задача 10. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(a;0)$ до окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Решение

Выразим квадрат расстояния от точки A до искомой точки $M(x; y)$, лежащей на заданной окружности:

$$d^2 = (x - a)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2.$$

Так как точка M принадлежит окружности, то вместо $x^2 + y^2$ можно подставить r^2. Получаем $d^2 = r^2 - 2ax + a^2 = f(x)$. Искомая точка должна находиться среди корней уравнения $f'(x) = 0$, однако производная данной функции $f'(x) = -2a$ ни при каком значении x в нуль не обращается, если $a \neq 0$, и всегда равна нулю, если $a = 0$.

При $a = 0$, то есть при условии, что точка A есть центр заданной окружности, имеем $d = r$, причем это есть расстояние до любой точки окружности.

При $a \neq 0$ из условия $f'(x) = -2a \neq 0$ следует, что кратчайшее расстояние от точки до окружности не существует, а это противоречит фактам, известным из элементарной геометрии.

Для объяснения этой ошибки отметим, что рассматриваемая функция $f(x) = r^2 - 2ax + a^2$, выражающая квадрат расстояния от данной точки $A(a; 0)$ до произвольной точки окружности, определена на сегменте $[-r; r]$. Так как эта функция непрерывна на данном сегменте, то согласно известной теореме Вейерштрасса она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения. Если $a \neq 0$, то $f'(x)$ также отличается от нуля, то есть функция монотонна на всем сегменте, и, следовательно, наибольшее и наименьшее значения достигаются на концах сегмента. При $a > 0$ наименьшее значение будет при $x = r$:

$$d_{\min} = \sqrt{f(r)} = \sqrt{r^2 - 2ar + a^2} = |r - a|,$$

при $a < 0$ наименьшее значение будет при $x \to -r$:

$$d_{\min} = \sqrt{f(-r)} = \sqrt{r^2 + 2ar + a^2} = |r + a|.$$

Этот пример показывает, что при решении задач на отыскание наибольшего и наименьшего значения необходимо всегда указывать область определения рассматриваемой функции.

Мы рассмотрели наиболее характерные ошибки студентов, хотя у каждого преподавателя есть свой набор таких и им подобных ошибок.