

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЭФФЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА СЛАБО НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

В.Н. Бородихин, А.Н. Вакилов, В.В. Прудников

For the first time the critical parameters of the effective Hamiltonian for weakly disordered three-dimensional Ising model are determined by Monte Carlo simulation.

1. Введение

Исследование критического поведения неупорядоченных систем с замороженными дефектами структуры представляет большой теоретический и экспериментальный интерес. Это обусловлено тем, что большинство реальных твердых тел содержат замороженные дефекты структуры, присутствие которых влияет на характеристики систем и, в частности, может существенно сказываться на поведении систем при фазовых переходах. С другой стороны, центральной концепцией теории фазовых переходов и критических явлений является принцип универсальности, т.е. независимость термодинамических характеристик различных систем при фазовых переходах от различий в значениях мелко-масштабных параметров и разделение всех систем на небольшое число классов универсальности в зависимости от пространственной размерности системы и симметрии его параметра порядка. В случае неупорядоченных систем до сих пор остался невыясненным вопрос: являются ли такие характеристики критического поведения, как безразмерные амплитуды взаимодействия флуктуаций параметра порядка, и критические показатели универсальными, т.е. не зависящими от концентрации дефектов структуры вплоть до порога перколяции, или существует линия фиксированных точек для значений амплитуд взаимодействия, определяющая непрерывное изменение критических показателей с концентрацией.

Исследования показали [1], что присутствие замороженных точечных дефектов (например, примеси немагнитных атомов в ферро- или антиферромагнитных материалах) изменяет критические свойства систем, теплоемкость которых в однородном состоянии испытывает расходимость в критической точке с

© 2001 В.Н. Бородихин, А.Н. Вакилов, В.В. Прудников

Омский государственный университет

Исследования поддержаны грантами РФФИ (№00-02-16455) и Минобразования РФ (Е00-3.2-43).

показателем $\alpha > 0$. Данному критерию удовлетворяют только системы, эффективный гамильтониан которых вблизи критической точки изоморфен модели Изинга.

Теоретико-полевое описание критического поведения слабо неупорядоченной модели Изинга, проведенное непосредственно для трехмерных систем ($d = 3$) в высокопетлевых порядках приближения теории (5-ти петлевым [2] и 6-ти петлевым [3]) с применением методов суммирования получаемых асимптотических рядов, позволило с наибольшей доступной к настоящему времени точностью получить значения безразмерных амплитуд взаимодействия флуктуаций параметра порядка g_R и u_R в неподвижной фиксированной точке ренормгрупповых преобразований модели, задающих ее критические свойства. Так, в соответствии с [3] $g^* = 36,72(32)$, $u^* = 11,89(30)$. Данные значения отражают главную особенность критического поведения, характеризующегося аномально сильным взаимодействием флуктуаций параметра порядка. Поэтому возникает вопрос о сходимости рядов теории возмущения и насколько адекватно результаты применения методов суммирования могут соответствовать реальным критическим характеристикам системы. Вычисление критических параметров g^* и u^* эффективного гамильтониана непertурбативным способом представляет большой интерес.

Экспериментальные исследования неупорядоченных систем, таких как кристаллические смеси одноосных Изинго-подобных антиферромагнетиков (FeF_2 , MnF_2) с немагнитными материалами (ZnF_2), показывают существенное отличие значений критических показателей для неупорядоченных систем от соответствующих показателей однородных систем. В частности, для материалов $Fe_xZn_{1-x}F_2$ были измерены значения критических показателей $\nu = 0,70(2)$, $\gamma = 1,34(6)$, а для материалов $Mn_xZn_{1-x}F_2$ $\nu = 0,715(35)$, $\gamma = 1,364(76)$. При этом многочисленные экспериментальные оценки демонстрируют независимость значений критических показателей от концентрации примесей (см. приведенные в [3] таблицы измеренных показателей из широкого ряда экспериментальных работ). Поскольку возможности теоретического подхода ограничены описанием слабо неупорядоченных систем, проверка данных результатов методом компьютерного моделирования имеет большое значение.

2. Модель

Известно, что исходная неупорядоченная модель в критической области термодинамически эквивалентна $O(m)$ симметричной модели Гинзбурга-Ландау-Вильсона, определяемой эффективным гамильтонианом:

$$H = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x))^2 + \frac{m_0^2}{2} \varphi(x)^2 + \frac{V(x)}{2} \varphi^2 + \frac{g_0}{4!} \varphi(x)^4 \right], \quad (1)$$

где $\varphi(x)$ – поле m -компонентного параметра порядка, $V(x)$ – примесный потенциал, $m_0^2 \sim T - T_c(p)$, $T_c(p)$ – критическая температура разбавленного магнетика, зависящая от концентрации спинов p , g_0 – положительная константа.

После применения процедуры репличного усреднения по гауссовски распределенному потенциалу случайного поля примесей гамильтониан принимает вид:

$$H_{repl} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n (\partial_\mu \varphi_\alpha(x))^2 + \frac{m_0^2}{2} \sum_{\alpha=1}^n \varphi_\alpha(x)^2 + \frac{g_0}{4!} \sum_{\alpha=1}^n (\varphi_\alpha(x)^2)^2 - \frac{u_0}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^n (\varphi_\alpha(x)^2) \right)^2 \right], \quad (2)$$

где индекс α нумерует реплики (образы) однородной составляющей в гамильтониане неупорядоченной модели (1), а дополнительная вершина u_0 , возникшая в (2), задает эффективное взаимодействие флуктуаций параметра порядка через поле дефектов. В пределе $n \rightarrow 0$ данная модель термодинамически эквивалентна исходной неупорядоченной модели.

После применения процедуры перенормировки — усреднения по мелкомасштабным флуктуациям поля $\varphi(x)$ и последующего масштабного преобразования, сопровождающегося перенормировкой поля параметра порядка в Z раз, устраняющей расходимость модели в критической точке, гамильтониан принимает вид:

$$H_R = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n (\partial_\mu \varphi_{\alpha R}(x))^2 + \frac{m_R^2}{2} \sum_{\alpha=1}^n \varphi_{\alpha R}(x)^2 + \frac{m_R g_R}{4!} \sum_{\alpha=1}^n (\varphi_{\alpha R}(x)^2)^2 - \frac{m_R u_R}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^n (\varphi_{\alpha R}(x)^2) \right)^2 \right], \quad (3)$$

где индекс R обозначает перенормированные величины, $\varphi \sim Z_\varphi^{0.5} \varphi_R$, $Z_\varphi = \chi m_R^2$ — нормировочный множитель, χ — восприимчивость, $u_R = 3\nu\chi^2/\xi^d$, ξ — корреляционная длина, связанная с перенормированной массой соотношением $m_R^2 = 1/\xi^2$.

Процедура ренормгрупповых преобразований модели характеризуется наличием предельной неподвижной точки (фиксированной точки) в пространстве безразмерных амплитуд взаимодействия флуктуаций параметра порядка g_R и u_R , которая задает ее критические свойства и позволяет определить критические показатели для основных термодинамических и корреляционных функций системы. Как отмечалось выше, в шестипетлевом приближении [3] $g^* = 36,72(32)$, $u^* = 11,89(30)$.

3. Численная методика и результаты

Значения эффективных амплитуд взаимодействия флуктуаций могут быть получены методами компьютерного моделирования путем вычисления различных корреляционных функций или моментов функций распределения для параметра порядка. Монте-Карло-результаты в критической области для нетривиальной фиксированной точки однородной модели Изинга [4], [5] находятся в хорошем соответствии с результатами теоретико-полевого подхода.

В настоящей работе впервые методом Монте-Карло определены координаты фиксированной точки эффективного гамильтониана (3) для концентрации спинов $p = 0,95$.

Рассматривается трехмерная модель неупорядоченной спиновой системы в виде кубической решетки с размерами L с наложенными периодическими граничными условиями. С узлами решетки связаны спины σ_i , принимающие значения ± 1 , и немагнитные атомы примеси (пустые узлы с $\sigma_i \equiv 0$). Данная система описывается гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} p_i p_j \sigma_i \sigma_j, \quad (4)$$

где J_{ij} – константа обменного ферромагнитного взаимодействия, p_i – случайная переменная, описываемая функцией распределения

$$P(p_i) = p\delta(p_i - 1) + (1 - p)\delta(p_i), \quad (5)$$

с $p = 1 - c$, где c – концентрация примеси.

Примесь равномерно распределяется по всей системе, и ее положение фиксируется для отдельной примесной конфигурации в процессе моделирования системы. Концентрация спинов определяется суммированием абсолютных значений спинов по всем узлам решетки

$$p = \frac{1}{L^3} \sum_{i=1}^{L^3} |\sigma_i|.$$

При создании спиновой конфигурации со случайно распределенными примесями в решетке возникают несвязанные геометрические кластеры узлов со спинами. При концентрации спинов p больших порога спиновой перколяции p_c в системе практически всегда существует спиновый кластер, характеризующийся общей связностью (протеканием) с одной грани решетки на другую грань, и какое-то количество изолированных кластеров, содержащих относительно небольшое число спинов. В пределе бесконечно большого размера решетки вклад в магнитные характеристики системы будут давать только скоррелированные спины бесконечно перколяционного кластера, поэтому будет разумным при вычислении критических характеристик не учитывать вклад от узлов, не имеющих связи с перколяционным кластером. Такая процедура позволяет уменьшить «шум» от спинов кластеров конечного размера.

Для распределения спинов с заданной концентрацией p по узлам решетки использовался алгоритм выращивания перколяционного кластера Хаммерсли-Лиса-Александровица [6]. Практические детали реализации данного алгоритма следующие. В центре кубической решетки размещается затравочный спин. Шесть соседних узлов образуют «периметр» затравочного спина. Случайным образом выбирается узел из «периметра». Затем с вероятностью p этот узел занимает спин, а его соседи добавляются в «периметр». В противном случае узел остается свободным (примесным). Чтобы узлы решетки оставались

свободными с вероятностью $1 - p$, данный узел больше не проверяется. Если узел уже занят спином, то определяется, нет ли новых непроверенных узлов «периметра». Процедура повторяется до тех пор, пока не будут просмотрены все узлы периметра.

В основе компьютерного моделирования статистических процессов лежит метод Монте-Карло, суть которого заключается в использовании случайных чисел для машинной имитации вероятностных распределений. В данной работе для получения последовательных спиновых конфигураций был применен однокластерный алгоритм Вольфа, который по сравнению с традиционным для метода Монте-Карло алгоритмом Метрополиса позволяет получать значительно менее скоррелированную последовательность спиновых конфигураций. Известно, что время корреляции между двумя состояниями системы с линейным размером L вблизи критической температуры ведет себя как $\tau \simeq L^z$. При этом для алгоритма Метрополиса показатель $z_{Metropolis} \simeq 2$, а для алгоритма Вольфа $z_{Wolf} \simeq 0,5$.

Примененный в работе вариант алгоритма Вольфа состоял в следующем. В системе случайным образом выбирался спин и переворачивался. Затем рассматривались ближайшие соседи спина, и если они сонаправлены с этим «центральным» спином (неперевернутым), то с вероятностью $1 - \exp(-2\beta)$, где $\beta = 1/T$ они также переворачивались, а их координаты заносились в стек. После того, как были проверены соседние спины, спин, координаты которого были занесены в стек последними, выбирается «центральным», и вся процедура затем повторяется. Процесс повторяется до тех пор, пока стек не окажется пустым, что соответствует полному перевороту кластера Вольфа. По данному алгоритму реализуется марковский процесс и с соответствующей вероятностью генерируются конфигурации спинов.

Для уменьшения корреляций спиновых конфигураций вычисление намагниченности и других термодинамических величин осуществлялось через три переворота кластера Вольфа, что условно можно назвать одним Монте-Карло-шагом.

В самом начале процесса все спины полагались сонаправленными (что соответствует состоянию системы при $T = 0$). Процедуре установления термодинамического равновесия в системе, соответствующего температуре T , отводилось 10^4 шагов Монте-Карло.

Поскольку моделируемая система являлась неупорядоченной, кроме усреднения по спиновым конфигурациям проводилось усреднение по различным примесным конфигурациям. В данной работе использовалось 100 примесных конфигураций. Для проведения статистического усреднения каждой примесной конфигурации сопоставлялось 10^5 спиновых конфигураций или Монте-Карло-шагов.

Для каждой примесной конфигурации вычислялись корреляционная длина ξ и восприимчивость χ по формулам [7]:

$$\xi = \frac{1}{2 \sin(\pi/L)} \sqrt{\frac{\chi}{F} - 1}, \quad (6)$$

где L – размер системы, $\chi = \frac{1}{V}\langle\sigma^2\rangle$, $F = \frac{1}{V}\langle\Phi\rangle$,

$$\Phi = \frac{1}{3} \left(\left| \sum_x \sigma_x \exp\left(\frac{2\pi i x_1}{L}\right) \right|^2 + \left| \sum_x \sigma_x \exp\left(\frac{2\pi i x_2}{L}\right) \right|^2 + \right. \quad (7)$$

$$\left. + \left| \sum_x \sigma_x \exp\left(\frac{2\pi i x_3}{L}\right) \right|^2 \right), \quad (8)$$

$x : (x_1, x_2, x_3)$ с последующим усреднением по всем примесным конфигурациям.

Эффективные амплитуды взаимодействия флуктуаций параметра порядка u_R и g_R в гамильтониане (3) вычислялись при усреднении по всей совокупности примесных конфигураций следующих выражений:

$$g_R = 3 \left(\frac{L}{\xi}\right)^3 \left(1 - \frac{\langle\sigma^4\rangle}{3\langle\sigma^2\rangle^2}\right), \quad (9)$$

$$u_R = \frac{3\chi^2 \langle\sigma_\alpha^2 \sigma_\beta^2\rangle - \langle\sigma^2\rangle^2}{\xi^d \langle\sigma^2\rangle^2}, \quad (10)$$

где $\langle\dots\rangle$ означает статистическое усреднение по шагам Монте-Карло, а черта – усреднение по примесным конфигурациям. Индексы α и β характеризуют спиновые конфигурации для различных реплик неупорядоченной системы размера L , моделируемых одновременно при одной и той же температуре и отличающихся различными начальными конфигурациями.

Для системы со спиновой концентрацией $p = 0,95$ измерения проводились при температурах $T = 4,275; 4,285; 4,295; 4,315; 4,335$ для решеток с различными L . Мы использовали значение критической температуры фазового перехода в решетке бесконечного размера $T_c = 4,2571$, найденное в работе [8]. В табл. 1 приведены найденные значения корреляционной длины ξ , восприимчивости χ и вершин g и u при всех вышеперечисленных температурах для решеток с размерами L , указанными в таблицах.

Из приведенных в таблице данных видно, что чем дальше температура системы отстоит от T_c , тем для меньших размеров решетки L измеряемые величины достигают своего максимального асимптотического значения. Так, для ближайшей к критической температуре $T = 4,275$ $L_{max} = 100$, тогда как для $T = 4,335$ $L_{max} = 45$. Это связано с уменьшением флуктуаций параметра порядка и определяющего флуктуационного вклада в измеряемые величины при удалении от критической температуры.

В конечной системе не может проявиться настоящий фазовый переход. Тем не менее можно ожидать, что если $\xi(T)$ меньше линейного размера L системы, то конечная система будет правильно передавать свойства бесконечной системы при применении методики конечно-мерного скейлинга [5], которая позволяет осуществить экстраполяцию результатов для решетки размера L на систему бесконечного размера для каждой отдельной температуры. Алгоритм процедуры

Таблица 1. Зависимость физических величин от размеров системы L для различных температур

T	L	ξ	χ	g	u
4,335	45	$6,58 \pm 0,02$	$203,9 \pm 0,36$	$30,531 \pm 2,98$	$2,157 \pm 1,54$
	40	$6,4 \pm 0,026$	$194,67 \pm 0,414$	$29,93 \pm 2,74$	$3,1 \pm 1,83$
	30	$6,241 \pm 0,036$	$189,134 \pm 0,57$	$29,31 \pm 2,56$	$6,316 \pm 2,65$
	20	$5,753 \pm 0,005$	$169,32 \pm 0,78$	$25,2 \pm 1,42$	$15,335 \pm 4,16$
4,315	50	$8,08 \pm 0,027$	$304,563 \pm 0,52$	$30,668 \pm 3,18$	$2,431 \pm 1,8$
	45	$7,9 \pm 0,03$	$290,74 \pm 0,567$	$30,087 \pm 2,86$	$3,093 \pm 2,007$
	40	$7,554 \pm 0,03$	$271,176 \pm 0,55$	$29,72 \pm 2,36$	$3,37 \pm 2,09$
	30	$7,305 \pm 0,045$	$262,26 \pm 0,84$	$28,175 \pm 1,64$	$8,58 \pm 3,4$
	20	$6,45 \pm 0,052$	$213,736 \pm 0,91$	$22,84 \pm 0,94$	$14,82 \pm 4,386$
4,295	65	$10,646 \pm 0,04$	$522,64 \pm 0,99$	$30,72 \pm 3,53$	$3,94 \pm 2,7$
	60	$10,468 \pm 0,007$	$509,02 \pm 0,68$	$30,528 \pm 2,02$	$6,031 \pm 1,81$
	50	$10,322 \pm 0,009$	$503,635 \pm 0,86$	$29,515 \pm 1,46$	$10,02 \pm 2,35$
	40	$9,978 \pm 0,01$	$482,76 \pm 1,05$	$27,439 \pm 0,96$	$16,61 \pm 2,915$
	30	$9,21 \pm 0,011$	$426,74 \pm 1,16$	$23,513 \pm 0,59$	$26,04 \pm 3,66$
	20	$7,547 \pm 0,01$	$300,19 \pm 0,88$	$18,583 \pm 0,3$	$27,29 \pm 3,7$
4,285	80	$13,319 \pm 0,06$	$809,29 \pm 1,794$	$30,544 \pm 3,9$	$6,486 \pm 3,68$
	70	$13,133 \pm 0,072$	$803,214 \pm 2,24$	$29,795 \pm 3,24$	$9,51 \pm 4,77$
	60	$13,049 \pm 0,05$	$800,37 \pm 2,453$	$29,335 \pm 2,21$	$12,77 \pm 5,3$
	50	$12,626 \pm 0,1$	$766,61 \pm 3,237$	$27,006 \pm 1,94$	$24,76 \pm 7,42$
	40	$11,868 \pm 0,11$	$696,263 \pm 3,46$	$24,005 \pm 1,38$	$34,02 \pm 8,7$
	30	$10,685 \pm 0,1$	$585,66 \pm 3,01$	$19,887 \pm 0,85$	$36,94 \pm 8,93$
4,275	100	$19,034 \pm 0,091$	$1652,31 \pm 3,934$	$31,452 \pm 2,68$	$10,667 \pm 5,655$
	90	$18,8 \pm 0,09$	$1618,31 \pm 4,9$	$29,54 \pm 2,31$	$11,019 \pm 5,73$
	80	$18,6 \pm 0,048$	$1612,87 \pm 4,25$	$28,46 \pm 2,35$	$16,83 \pm 6,49$
	70	$18,046 \pm 0,12$	$1539,91 \pm 5,175$	$27,29 \pm 1,49$	$21,68 \pm 8,22$
	60	$17,488 \pm 0,02$	$1483,25 \pm 3,77$	$24,925 \pm 2,86$	$39,81 \pm 6,27$
	50	$16,54 \pm 0,15$	$1361,27 \pm 6,825$	$21,633 \pm 1,1$	$48,78 \pm 12,42$
	40	$14,854 \pm 0,146$	$1129,97 \pm 6,01$	$18,72 \pm 0,897$	$52,783 \pm 12,5$

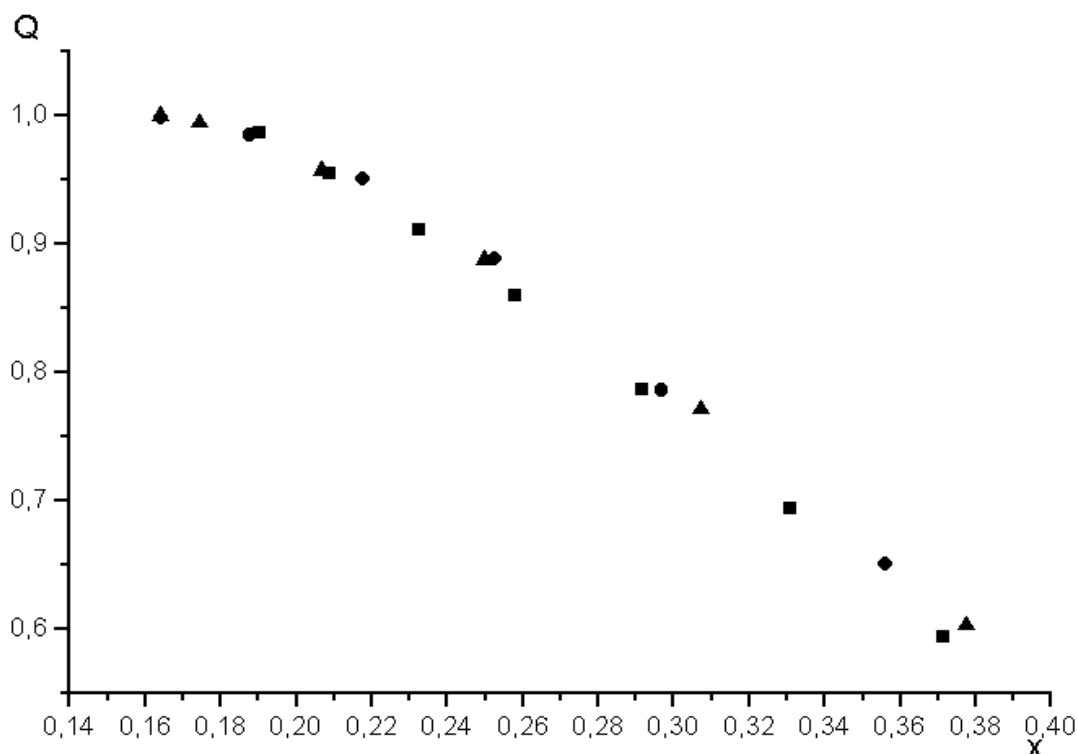


Рис. 1. Зависимость функции Q от $x = \xi/L$ для разных температур. Квадратные значки соответствуют $T = 4,275$, круглые $T = 4,285$, треугольные $T = 4,295$.

конечно-мерного скейлинга состоит в следующем. Для заданной температуры T измеряется значение величины $A_{L,T}$ и $x = \xi_{L,T}/L$ при увеличивающемся L . Это позволяет определить значение L_{max} , при котором величина $A_{L,T}$ становится не зависящей от размеров системы. Зная L_{max} , полученные значения $A_{L,T}(x)$ для каждого L можно аппроксимировать с помощью специально подобранной функции $Q(x)$ так, чтобы они не зависели от размеров системы, по формуле $A(T) = A_L(T)/Q(x(L,T))$. В соответствии с рекомендациями работы [5] функция $Q(x)$ была выбрана в виде $Q(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$ с подбираемыми коэффициентами c_i по методу наименьших квадратов. Функция $Q(x)$ характеризуется универсальностью для значений температур в критической области. Это позволяет использовать ее для нахождения физических величин при температурах T , столь близких к T_c , при которых L_{max} может быть и недостижима, но известны величины $A_{L,T}(x)$ и $x = \xi_{L,T}/L$ при $L < L_{max}$. Графики функций $Q(x)$ (рис.1), построенные для различных температур, демонстрируют эту универсальность.

В таблице 2 приведены результирующие зависимости значений корреляционной длины ξ , восприимчивости χ и вершин g и u от температуры, найденные

Таблица 2. Зависимость физических величин от температур в критической области

T	ξ	χ	g	u
4,275	$19,034 \pm 0,1$	$1652,26 \pm 5,73$	$31,455 \pm 2,3$	$10,706 \pm 3,766$
4,285	$13,31 \pm 0,09$	$807,558 \pm 2,997$	$30,549 \pm 2,46$	$6,514 \pm 2,485$
4,295	$10,664 \pm 0,01$	$529,02 \pm 1,132$	$30,72 \pm 1,574$	$4,125 \pm 1,135$
4,315	$8,09 \pm 0,04$	$304,62 \pm 0,8$	$30,65 \pm 2,31$	$2,438 \pm 1,32$
4,335	$6,59 \pm 0,036$	$204,05 \pm 0,59$	$30,529 \pm 2,54$	$2,18 \pm 1,09$

с помощью процедуры конечно-мерного скейлинга.

Из выявленной температурной зависимости перенормированных вершины g_R и u_R могут быть выделены их критические значения g^*, u^* на основе скейлинговых зависимостей данных вершин

$$g_R(t) = g^* (1 + at^\theta), \quad (11)$$

$$u_R(t) = u^* (1 + bt^\theta) \quad (12)$$

с $t = T - T_c(p)$, $\theta = \nu\omega$, задаваемых ν – критическим показателем для корреляционной длины и ω – критическим показателем, характеризующим поправки к скейлингу. В соответствии с результатами работы [3] $\theta = 0,17(10)$. Проведенная аппроксимация g_R и u_R по выражениям (11), (12) позволила получить следующие значения критических амплитуд взаимодействия флуктуаций параметра порядка для неупорядоченной системы с $p = 0,95$ в фиксированной точке $g^* = 31,2382 \pm 2,273$, $u^* = 9,874 \pm 3,41$. Сопоставление полученных значений с теоретико-полевыми указывает на их хорошее согласие в пределах статистических погрешностей результатов.

Из данных по температурной зависимости восприимчивости и корреляционной длины нами были выделены значения критических показателей для соответствующих величин: $\gamma = 1,40 \pm 0,04$, $\nu = 0,71 \pm 0,02$. Сопоставление полученных значений с теоретико-полевыми значениями показателей [3] $\gamma = 1,342(10)$ и $\nu = 0,6837(53)$ показывает, что полученные нами значения являются слегка завышенными, хотя и находятся в достаточно хорошем соответствии со значениями показателей, найденными в экспериментальных исследованиях (см. [3]).

В заключении отметим, что распространение развитой в настоящей работе методики на исследование критического поведения неупорядоченных систем с большими значениями концентрации примесей и выделение для них координат фиксированной точки, а также определение значений критических показателей позволит ответить на фундаментальный вопрос об универсальности критического поведения неупорядоченных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Harris A.B. *Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models* // J. Phys. C. 1974. V.7, N6. P.1671-1692.
2. Pakhnin D.V., Sokolov A.I. *Five-loop renormalization-group expansion for the three-dimensional n -vector cubic model and critical exponents for impure Ising systems* // Phys. Rev. B. 2000. V.61. P.15130.
3. Pelissetto A., Vicari E. *Randomly dilute spin models: a six-loop field-theoretic study* // Phys. Rev. B. 2000. V.62. P.6393.
4. Tsy-pin M.M. *Effective potential for scalar field in three dimensions: Ising models in the ferromagnetic phase* // Phys. Rev. B. 1997. V.55. P.8911.
5. Kim J.-K. *Critical renormalized coupling constants in the symmetric phase of the Ising models* // J. Phys. A: Math. Gen.2000. V.33. P.2675.
6. Гулд Х., Тобочник Я.К. *Компьютерное моделирование в физике: В 2 ч.* М.: Наука, 1989.
7. Salas J. Sokal A. *Exact Finite-Size-Scaling corrections to the critical two-dimensional Ising model on a torus* // J. Stat. Phys. 2000. V.98. P.551.
8. Heuer H.-O. *Monte Carlo simulation of disordered 3 - dimensional Ising systems* // Europhys. Lett. 1990. V.12. P.551.