Математические структуры и моделирование
2001, вып. 8, с. 5–9

УДК 513.813

ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ КАК КЛАСС ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИЗОМОРФИЗМОВ КАСАТЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Ю.Ф. Борисов

In this paper a definition of linear connection on smooth manifold is given.

В статье предлагается определение линейной связности как класса эквивалентности изоморфизмов касательных пространств.

Введение

Рассмотрим гладкое многообразие M^n. В каждой точке X имеется касательное векторное пространство T^n_X. Возьмем две различные точки $X_1 \neq X_2$ и соответствующие им касательные пространства $T^n_{X_1}$ и $T^n_{X_2}$. Известно, что они изоморфны как линейные векторные пространства. Можно ли как-нибудь сравнивать векторы, исходящие из разных точек, т.е. принадлежащие $T^n_{X_1}$ и $T^n_{X_2}$? Близкий вопрос: можно ли отождествить два вектора из разных касательных пространств?

Мы желаем найти способы, позволяющие в окрестности U каждой точки X устанавливать изоморфизм между касательными пространствами в точках, принадлежащих этой окрестности, и касательным пространством в точке X_0, определенный дифференциально, т.е. с точностью до бесконечно малых. Иначе говоря, поскольку вектор – это смещение, т.е. класс эквивалентных путей, то речь идет о равенстве двух смещений в близких точках с точностью до бесконечно малых.

1. Определение линейной (аффинной) связности в точке гладкого многообразия

Пусть имеется гладкое многообразие M^n класса C^m $(m \geq 2)$ и $X_0 \in M^n$ – точка, U – координатная окрестность точки X_0. Допустим, что в окрестности U задано поле изоморфизмов f_X пространств T^n_X на $T^n_{X_0}$, где $X \in U$,

$$T^n_X \xrightarrow[f_X]{\text{на}} T^n_{X_0}.$$

E-mail: borisov@math.nsc.ru

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск

Статья подготовлена к печати преподавателями кафедры математического моделирования на основе записей лекций Ю.Ф. Борисова, сделанных в 1968 г.

Иначе говоря, мы указываем правило, по которому вектор в точке X отождествляется с вектором из $T^n_{X_0}$. Наложим на поле изоморфизмом f_X следующие условия:

(i) $X = X_0$, то f_X – тождественный изоморфизм.

(ii) Если $\{x^i\}$ локальные координаты в U, то изоморфизм f_X может быть записан аналитически следующим образом: он записывается как преобразование, сопоставляющее локальным координатам вектора $\overrightarrow{\xi} \in T^n_X$ (в данной локальной карте) локальные координаты вектора $\overrightarrow{\xi_0} \in T^n_{X_0}$; $\overrightarrow{\xi_0} = f_X(\overrightarrow{\xi}) \in T^n_{X_0}$. Такое преобразование задается при фиксировании локальной карты несобственной матрицей n-го порядка, коэффициенты которой зависят от локальной карты, т.е. являются функциями n переменных; полагаем, что независимо от выбора локальной карты элементы указанной матрицы непрерывно дифференцируемы в точке $(x^1, ..., x^n)$, соответствующей точке X.

Совсем не очевидно существование таких полей в том смысле, что условия (i), (ii) справедливы для всех локальных карт. Поэтому покажем, что если (ii) выполнено в некоторой локальной карте, действующей в окрестности U, то оно выполняется в любой другой локальной карте, действующей в U.

Каждая локальная карта K, действующая в U, сопоставляет полю f_X, $X \in U$ матричное поле $\|a^i_j(x^1, \ldots, x^n)\|$, $(x^1, \ldots, x^n) \overset{K}{=} X$, задающее изоморфизм в K вида

$$f_X : \xi^i_0 = a^i_j(x^1, \ldots, x^n)\xi^j, \tag{1}$$

где ξ^j – координаты в K вектора $\overrightarrow{\xi} \in T^n_X$, а ξ^j_0 координаты в K вектора $\overrightarrow{\xi_0} = f_X(\overrightarrow{\xi}) \in T^n_{X_0}$. Допустим, что в U введена новая локальная карта K'. Пусть полю f_X в K' сопоставляется новое матричное поле $\|a^{i'}_{j'}(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\|$. Тогда аналогично (1)

$$\xi^{i'}_0 = a^{i'}_{j'}(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\xi^{j'}.$$

Имеем

$$\xi^{i'}_0 = \Big(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\Big)_{X_0} \xi^\alpha_0 = \Big(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\Big)_{X_0} a^\alpha_j(x^1, \ldots, x^n)\xi^j =$$

$$= \Big(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\Big)_{X_0} \Big(\frac{\partial x^j}{\partial x^{\beta'}}\Big)_X \xi^{\beta'} a^\alpha_j(x^1, \ldots, x^n) = a^{i'}_{\beta'}(x^{1'}, \ldots, x^{n'})\xi^{\beta'}.$$

Таким образом, ввиду произвольности $\xi^{\beta'}$ получаем, что справедлива формула

$$a^{i'}_{\beta'}(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) = \Big(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\Big)_{X_0} \Big(\frac{\partial x^j}{\partial x^{\beta'}}\Big)_X a^\alpha_j(x^1, \ldots, x^n). \tag{2}$$

Из этой формулы видно, что в силу того, что наше многообразие принадлежит классу дифференцируемости C^m $(m \geq 2)$, непрерывная дифференцируемость $a^{i'}_{j'}$ доказана (в точке $(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) \overset{K'}{=} X_0$). Тем самым независимость условия (ii) от выбора локальной карты в U установлена.

Пусть имеются два поля изоморфизмов – f_X, заданное в окрестности U точки X, и g_X, заданное в окрестности V той же точки X, удовлетворяющие (i) и (ii). Будем говорить, что поля f_X и g_X имеют в точке X_0 совпадение 1-го порядка, если для любой локальной карты в окрестности $W = U \bigcap V$ соответствующие этим изоморфизмам матричные поля $\|a^i_j\|$ и $\|b^i_j\|$ в точке X_0 совпадают вместе с 1-ми производными. Иначе говоря, поля совпадают в 1-м порядке, если

$$a^i_j = b^i_j = \delta_{ij}$$

и

$$\Big(\frac{\partial a^i_j}{\partial x^k}\Big)_{X_0} = \Big(\frac{\partial b^i_j}{\partial x^k}\Big)_{X_0}.$$

Очевидно, что это отношение совпадения, определенное на полях изоморфизмов, является отношением эквивалентности.

Определение 1. *Линейной связностью в точке* $X_0 \in M^n$ называется любой класс эквивалентности полей изоморфизмов, удовлетворяющих условиям (i) и (ii), относительно отношения совпадения в 1-м порядке.

Таким образом, линейная связность Γ в точке X_0 есть поле изоморфизмов касательных пространств (с точностью до эквивалентности относительно совпадения полей изоморфизмов в 1-м порядке).

2. Коэффициенты линейной связности

Теорема 1. *Каковы бы ни были система, состоящая из n^3 вещественных чисел Γ^i_{jk} $(i, j, k = 1, \dots, n)$, и локальная карта в окрестности U точки X_0, существует, и притом единственная, линейная связность Γ в точке X_0, обладающая свойством: если $A \in \Gamma$ – поле изоморфизмов, заданное на U, которому в данной локальной карте соответствует матричное поле $\|a^i_j(x^1, \dots, x^n)\|$, то имеет место равенство*

$$\Big(\frac{\partial a^i_j}{\partial x^k}\Big)_{X_0} = \Gamma^i_{jk}.$$

Числа Γ^i_{jk} называются координатами линейной связности в данной локальной карте, или символами Кристоффеля 2-го порядка.

Доказательство. Существование такого поля A тривиально, т.к. в данной локальной карте U матричное поле можно представить следующим образом

$$a^i_j(x^1, \dots, x^n) = \delta^i_j + \Gamma^i_{jk} \cdot (x^k - x^k_0). \tag{3}$$

Докажем единственность. Допустим, что существует связность Γ^*, удовлетворяющая тем же условиям. Покажем, что $\Gamma^* = \Gamma$. Так как Γ – класс эквивалентных объектов, то достаточно установить наличие общего элемента, т.е. что $\Gamma^* \cap \Gamma \neq \emptyset$. Возьмем элемент $B \in \Gamma^*$. Поле B задано в координатной окрестности V точки

X_0. Рассмотрим сужение $B_1 = B|_W$, где $W = V \cap U$ поля B. Имеем $B_1 \in \Gamma^*$. Покажем, что $B_1 \in \Gamma$. Заметим, что если $\|b^i_j(x^1, ..., x^n)\|$ матричное поле, задающее B_1 в карте K (исходной), то

$$\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial x^k}\right)_{X_0} = \Gamma^i_{jk}.$$

Вместе с тем поле $A \in \Gamma$ задается в K матричным полем $\|a^i_j(x^1, ..., x^n)\|$ вида (3), для которого

$$\left(\frac{\partial a^i_j}{\partial x^k}\right)_{X_0} = \Gamma^i_{jk}.$$

Поэтому в K имеет место равенство

$$\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial x^k}\right)_{X_0} = \left(\frac{\partial a^i_j}{\partial x^k}\right)_{X_0}. \tag{4}$$

Если покажем, что аналогичное равенство имеет место в любой карте K', действующей в W, то этим будет показана эквивалентность B_1 и A, т.е. будет установлено, что $B_1 \in \Gamma$. Вспомним формулу (2) предыдущего параграфа

$$a^{i'}_{j'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\right)_X a^\alpha_\beta.$$

Имеем

$$\left(\frac{\partial a^{i'}_{j'}}{\partial x^{k'}}\right)_{X_0} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\right)_{X_0} \left[\left(\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}\right)_{X_0} \left(a^\alpha_\beta\right)_{X_0} + \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial a^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}}\right)_{X_0}\right].$$

Заметим, что

$$(a^\alpha_\beta)_{X_0} = \delta^\alpha_\beta.$$

Поэтому предыдущее равенство примет вид

$$\left(\frac{\partial a^{i'}_{j'}}{\partial x^{k'}}\right)_{X_0} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\beta}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}\right)_{X_0} + \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial a^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma}\right)_{X_0} \tag{5}$$

Совершенно аналогично

$$\left(\frac{\partial b^{i'}_{j'}}{\partial x^{k'}}\right)_{X_0} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\beta}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}\right)_{X_0} + \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{j'}}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{k'}}\right)_{X_0} \left(\frac{\partial a^\alpha_\beta}{\partial x^\gamma}\right)_{X_0}. \tag{6}$$

Следовательно, сравнивая (5), (6) с учетом (4), получаем

$$\left(\frac{\partial a^{i'}_{j'}}{\partial x^{k'}}\right)_{X_0} = \left(\frac{\partial b^{i'}_{j'}}{\partial x^{k'}}\right)_{X_0}.$$

Теорема доказана. ■

Доказанная теорема говорит нам, что если выбрана локальная карта, то мы можем установить взаимно однозначное соответствие между всевозможными линейными связностями в точке X_0 и n^3 вещественных чисел Γ^i_{jk}, получая при этом отображение множества линейных связностей в пространство $\mathbb{R}^{n^3}$.

Числа Γ^i_{jk}, как уже говорилось, называются координатами линейной связности в данной локальной карте, или коэффициентами Кристоффеля 2-го рода. Легко получить формулу преобразования координат линейной связности в зависимости от преобразования координат различных локальных карт. Эта формула следует из (5) (или (6)) и имеет вид

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{k'}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Пусть Γ^i_{jk} коэффициенты линейной связности Γ в локальной карте K в U. Тогда для любого поля изоморфизмов из Γ соответствующее ему поле матриц имеет вид

$$\|\delta^i_j + \Gamma^i_{jk}(x^k - x^k_0) + \varepsilon^i_{jk}(x^k - x^k_0)\|,$$

где $\varepsilon^i_{jk} \to 0$ при $n \to \infty$. Нетрудно видеть, что это простое разложение элементов матрицы $\|a^i_j(x^1, \ldots, x^n)\|$ в ряд Тейлора. Иначе говоря, матрицы, задающие поле изоморфизмов, принадлежащих данной связности, отличаются от матриц вида

$$\|\delta^i_j + \Gamma^i_{jk}(x^k - x^k_0)\| \qquad (7)$$

на величину, меньшую, чем $\max\limits_{1 \le k \le n} |x^k - x^k_0|$. При этом матрицы (7) однозначно находятся в любой локальной карте.