Математические структуры и моделирование
2001, вып. 8, с. 167–173

УДК 51:372.851

ФОРМИРОВАНИЕ КУЛЬТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ СРЕДСТВАМИ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Т.Н. Алешкова

In this article the concept of mathematical thinking's culture is determined, and methods of its forming by means of history of mathematics are offered.

Введение

В настоящее время в образовании отдается приоритет воспитательным целям, относящимся к интеллектуальной деятельности и формированию характера личности. Применительно к математике эти цели сводятся к воспитанию логического мышления (способности рассуждать, критиковать, мыслить дедуктивно, систематизировать, обобщать) и работе над его качествами: рационально мыслить, четко, лаконично выражать свои мысли; воспитывать способность сосредоточиться, работать упорядоченно и настойчиво. Поэтому перед учителем на первый план выдвигается задача воспитания мышления и культуры математического мышления.

1. Культура математического мышления

Понятие «культура математического мышления» встречается в педагогических исследованиях и не определяется в работах психологов.

Вопросам развития математической культуры посвящено диссертационное исследование Д.Икрамова. Под математической культурой он понимает «систему математических знаний, умений и навыков, органически входящих в фонд общей культуры учащихся, и свободное оперирование ими в практической деятельности» [1, с. 107]. Согласно его исследованию школьник, обладающий культурой мышления:

а) аргументировано рассуждает, «умеет определять, сопоставлять, классифицировать, анализировать, систематизировать, обобщать, устанавливать причинно-следственные связи и т.п.» [1, с. 107];

б) точно, ясно, лаконично, выразительно выражает свои мысли, владеет математическим языком.

Таким образом, Д.Икрамов связывает культуру мышления с развитием логического мышления при обучении математике.

E-mail: aleshkova@math.omsu.omskreg.ru
Омский государственный университет

Вопросам воспитания культуры мышления уделял достаточное внимание А.Я.Хинчин. В культуре мысли он выделяет *«правильность мышления» и «стиль мышления»*.

Считая основным признаком *правильности мышления* полноценность аргументации, А.Я.Хинчин говорит: «В математике нет и не может быть «наполовину доказанных» и «почти доказанных» утверждений: либо полноценность аргументации такова, что никакие споры о правильности доказываемого утверждения более невозможны, либо аргументация полностью отсутствует». Отмечая важность воспитания школьников логической полноценности аргументации, А.Я.Хинчин говорит о том, что учащимся следует разъяснять, что обобщения, сделанные на основе неполной индукции, или аналогии, приводят только к гипотезам и требуют дальнейшего математического обоснования или опровержения.

Полноценность аргументации определяет и *стиль мышления*. А.Я.Хинчин выделяет 4 его признака:

- доведенное до предела доминирование логической схемы рассуждения. Эта черта в максимальной степени позволяет следить за правильностью течения мысли;
- лаконизм мышления: предельная скупость, суровая строгость мысли и ее изложения;
- четкая расчлененность хода рассуждения: «если, например, при доказательстве какого-либо предложения рассматривается несколько случаев, а последние распадаются еще на подслучаи, то в каждый момент рассуждения математик должен отчетливо помнить, в каком случае и подслучае его мысль обретается и какие случаи и подслучаи ему еще остается рассмотреть»;
- скрупулезная точность символики [3, с. 141-144].

Таким образом, культура мысли по А.Я.Хинчину является формулированием свойств мышления применительно к математическому мышлению.

Вопросам математического мышления и воспитания культуры математического мышления уделяет достаточное внимание Л.М.Фридман [2].

Он определяет математическое мышления как «предельно абстрактное теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения» [2, с. 165] и считает его составной частью общей культуры мышления.

Согласно Л.М.Фридману культура мышления обладает рядом признаков, таких как *«разумность, логичность, дисциплинированность»* [2, с. 167].

Под *разумностью* Л.М.Фридман понимает высшую ступень мышления, следующую за рассудком. Сравнивая их, он пишет: «Если рассудочное мышление осуществляется без изменения наличной ситуации — объекта мышления, то разумное мышление — это «способность находить причины и сущность явлений, рассматривать их всесторонне, вскрывать единство противоположностей».

Логичность культуры мышления, согласно Л.М.Фридману, предусматривает рассуждения и умозаключения в соответствии с законами логики.

Наконец, культурное мышление предполагает использование разных мыслительных операций в определенной системе, в полном соответствии с характером решаемой задачи. Между тем для учащихся, у которых не воспитана дисциплина мышления, характерна крайняя беспорядочность, хаотичность мышления. *Дисциплина мышления* предполагает, во-первых, анализ объекта мысли, во-вторых, планирование на основе этого анализа своей мыслительной деятельности и, в-третьих, пошаговый самоконтроль и самооценку выполненной деятельности с целью установления соответствия намеченному плану и его корректировки при необходимости [2, с. 168].

Так как перечисленные признаки культуры мышления включают в себя глубину мысли, гибкость и самостоятельность, критичность мышления, то можно сделать вывод, что Л.М.Фридман отождествляет свойства мышления с культурой мышления.

Вопросы исследования компонентов культуры мышления мы находим в работе методиста Т.А.Ивановой [1].

Обобщая выше изложенные точки зрения по этой проблеме, она выделяет компоненты культуры мышления и связывает их с некоторыми «составляющими» математической деятельности. Поэтому, на наш взгляд, корректнее их назвать компонентами культуры математического мышления.

Итак, по Т.А.Ивановой *культура математического мышления* включает в себя такие компоненты, как:

1. Осознание предмета математики, ее метода, ее ведущих понятий и осмысленное оперирование ими как при изучении математики, так и в ее приложениях и в практической деятельности;
2. Владение логической составляющей математической деятельности:
   - понимание логической структуры понятия (род, видовые понятия, их конъюнктивная или дизъюнктивная связь, наличие и смысл кванторов, умение формулировать отрицание понятия);
   - умение оперировать определением понятия: подводить под понятия, выводить следствия;
   - умение сравнивать объекты по указанному признаку, выделять существенные основания для их сравнения;
   - умение проводить классификацию понятий по заданному и самостоятельно найденному основанию;
   - понимание логической структуры теоремы, умение формулировать обратное, противоположное, противоположное обратному утверждения и понимание логической связи между этими четырьмя предложениями;
   - понимание сущности доказательства, полноценности аргументации;
   - владение дедуктивными методами доказательств и опровержений: синтетическим, аналитическим, от противного, методом исчерпывающих проб, полной индукции, контрапозиции, методом математической индукции;
3. Владение эвристической составляющей математической деятельности:
   - умение выявлять закономерности и устанавливать аналогии;

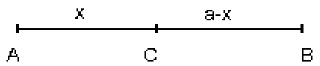

Рис. 1.

– умение выдвигать гипотезы на основе аналогии, неполной индукции, обобщения, конкретизации, пространственного воображения, интуиции как для постановки проблем, так и для их решения;

4. Умение отличать достоверные выводы от правдоподобных, вероятностных;
5. Владение алгоритмической составляющей математической деятельности:
   – понимание сущности алгоритма;
   – умение пользоваться готовыми алгоритмами;
   – умение создавать алгоритм какого-либо действия;
6. Владение математическим языком (математической терминологией, символикой), умение четко, последовательно, лаконично, логично выражать свои мысли как устно, так и письменно [1].

Таким образом, Т.А.Иванова глубже, чем Л.М.Фридман и А.Я.Хинчин, конкретизирует свойства мышления, учитывая специфику математической деятельности, формулирует их для математического мышления.

2. Роль истории математики в формировании культуры математического мышления

Педагогические пути формирования культуры математического мышления предполагают различную методическую работу. Покажем, как история математики влияет на воспитание потребности полно аргументировать свои высказывания и влияет на осознанное оперирование понятиями. Предложим содержание урока по теме «Экстремумы функций» с использованием исторического материала [4].

После знакомства учащихся с определением точек максимума и минимума дальнейшее изучение необходимого и достаточного признаков экстремума можно мотивировать, сообщая историю возникновения данной проблемы. В XIV в. епископ и профессор Пражского университета Никола Оресм (ок. 1323-1382), изображая графически зависимость интенсивности физических явлений от времени, заметил, что изменение вблизи точек экстремума самое медленное. Но это наблюдение не получило развития и тем более применения. Еще через два с половиной столетия Кеплер, решая задачи на экстремум, указал, что «по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно». Но и он не использовал замеченного им свойства и продолжал идти путем, проторенным древними греками.

Новый метод отыскания экстремумов первым разработал Ферма. Он не публиковал научных результатов, а, как правило, сообщал их в письмах своим

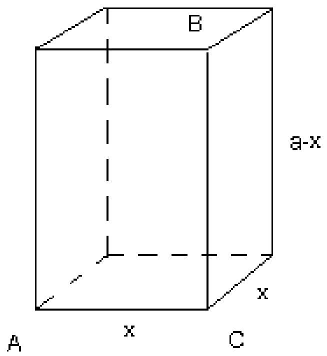

Рис. 2.

корреспондентам. В 1638 г. он написал Декарту, что решил задачу нахождения максимумов и минимумов величин; под величинами подразумевались многочлены. Разберем метод Ферма на конкретной задаче: «Разбить отрезок AB (рис.1) точкой C так, чтобы тело, построенное на квадрате AC и на отрезке CB, было наибольшим». Другими словами, разбить отрезок AB точкой C так, чтобы прямоугольный параллелепипед, основанием которого служит квадрат со стороной AC, а высотой — отрезок CB (рис. 2), имел максимальный объем. Найдем точку максимума, следуя Ферма, но применяя привычные обозначения.

Пусть C — искомая точка (рис.1). Обозначим $AB = a$, $AC = x$, тогда $CB = a - x$. Объем параллелепипеда $V(x) = x^2(a - x)$. Дадим приращение h точке C; объем нового параллелепипеда $V(x + h) = (x + h)^2(a - x - h)$. Поскольку в точке x объем достигает наибольшего значения, выражения $V(x)$ и $V(x + h)$ приближенно равны. К этой идее должен был прийти еще раньше Кеплер. Ведь у него возникла мысль о том, что в малой окрестности точки экстремума изменение функции незаметно. Но он не развил свою мысль. Ферма же пишет $V(x) = V(x+h)$ и называет это равенство вымышленным. Приведя в нем подобные члены и поделив его на h, получаем $2x(a-x)-x^2+h(a-3x-h) = 0$. Отбросив теперь члены, содержащие h, найдем «истинное» равенство (по терминологии Ферма). Откуда $x = \frac{2a}{3}$. Задача решена.

Посмотрим теперь, как будут выглядеть рассуждения Ферма применительно к произвольному многочлену $P(x)$. Дадим аргументу x малое приращение h и найдем $P(x+h)$. Если x — точка экстремума, то $P(x) = P(x+h)$ – «вымышленное» равенство, или $P(x)-P(x+h) = 0$. Приведем подобные члены и, поделив на h, придем к равенству $\frac{P(x+h)-P(x)}{h} = 0$. Отбросив в нем члены, содержащие h, получим уравнение, из которого определяется точка экстремума. Для многочлена последняя операция равносильна предельному переходу $\lim\limits_{h\to 0} \frac{P(x+h)-P(x)}{h} = 0$, т.е. полученное в результате уравнение для точки экстремума имеет вид $P'(x) = 0$.

Сейчас аналогичное утверждение для любой функции, дифференцируемой в точке x, называют теоремой Ферма. Ферма, конечно, к пределу не переходил. У него h было хоть и сколько угодно малым, но постоянным. Доказывал он свою теорему алгебраическим способом (в другом письме от 1643 г.).

Если рассмотреть произвольную функцию $y = f(x)$, то левая часть равен-

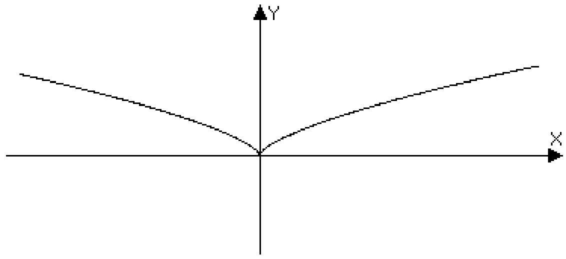

Рис. 3.

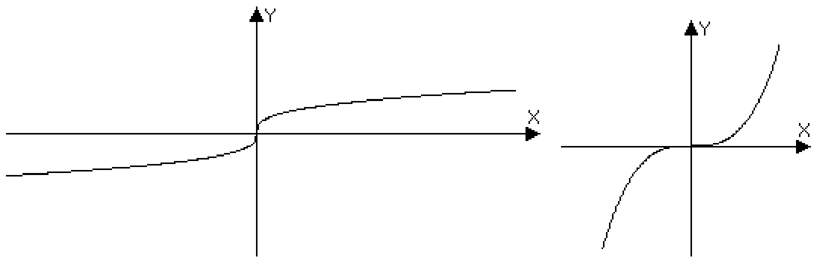

Рис. 4.

ства $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ является многочленом от h. Например, для $f(x) = \sqrt{x}$ имеем $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = 0$ при $h \neq 0$. Здесь выделить слагаемые, не содержащие h, не удается. Но если положить $h = 0$, тоже придем к условию Ферма $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$. Так и поступали последующие аналитики. Теорема Ферма позволяет с помощью производной найти точки, «подозрительные на экстремум». А если производной нет?

Для многочленов такой вопрос излишен: все многочлены имеют производную в каждой точке числовой оси. Но у других функций вполне могут быть точки, в которых производной нет, а экстремум есть. Возьмем функцию $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Она имеет минимум в начале координат (рис.3), в то время как ее производная $f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в нуле не определена. Случаями, когда производная равна нулю или не существует, исчерпываются все возможные точки, «подозрительные на экстремум», — их также называют критическими.

Далее, обобщая выше сказанное, даем строгое определение критической точки и обсуждаем со школьниками, почему данный признак является необходимым. В этих точках функция не всегда имеет экстремум. Например, функция $f(x) = x^3$ имеет в начале координат производную, равную нулю, а функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не имеет производной в той же точке. Тем не менее ни у той, ни у другой функции в точке $x = 0$ экстремума нет (рис.4).

Таким образом, условие: производная функции в точке х равна нулю или не существует — является необходимым условием наличия в точке х=0 экстремума, но недостаточным. Затем формулируем достаточный признак экстремума.

Такой подход в изучении данной темы не только делает содержание интересным, но и приводит к осмысленному оперированию понятием экстремума функции. Отметим, что в школьном учебнике нет доказательства теоремы, а показывается наглядный геометрический смысл. Подобное же изложение представляет собой попытку дать «строгое» обоснование материала, и в этом его преимущество в формировании потребности полной аргументации математических утверждений.

Таким образом, обучение математике с помощью элементов историзма ориентировано на формирование культуры математического мышления.

Литература

1. Иванова Т.А. *Гуманитаризация общего математического образования.* – Н.Новгород. 1998. 206с.
2. Фридман Л.М. *Теоретические основы методики обучения математике.* – М.: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998. 224с.
3. Хинчин А.Я. *Педагогические статьи.* М., 1963.
4. Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф. *За страницами учебника математики.* М.: Просвещение, 1997. 269с.