Математические структуры и моделирование
2001, вып. 7, с. 115–128

УДК 512.815.8

ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ НА ПРОСТРАНСТВАХ ФАКТОР-ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

В.В. Варламов

An extension of an algebraic description scheme of discrete symmetries is given. The charge conjugation is represented by a pseudoautomorphism of the complex Clifford algebra. A new class of quotient representations of the Lorentz group for physical fields with a breached reflection group is introduced.

Введение

Важность дискретных преобразований пространства-времени общеизвестна, начальные главы практически всех учебников по квантовой теории начинаются с описания дискретных симметрий, а знаменитая CPT-теорема составляет один из краеугольных камней квантовой теории поля. Кроме того, с зарядовым сопряжением C связано фундаментальное понятие антиматерии. Однако, исторически сложившаяся практика определения дискретных симметрий при помощи анализа релятивистки-инвариантных уравнений не дает возможности построения полной и последовательной теории дискретных преобразований, прежде всего, на пространствах представлений группы Лоренца и соответственно группы Пуанкаре. В рамках стандартного подхода, исключая хорошо изученный случай спина 1/2 (уравнение Дирака), остается совершенно неясной ситуация с определением дискретных симметрий для полей с высшим спином $j > 1/2$. Первая попытка выхода из сложившейся ситуации была предпринята Гельфандом, Минлосом и Шапиро [2]. В [2] дискретные симметрии представляются внешними инволютивными автоморфизмами группы Лоренца и определяются на пространствах конечномерных представлений этой группы. В последнее время идеи Гельфанда-Минлоса-Шапиро получили развитие в работах Бухбиндера, Гитмана и Шелепина [8,12], где дискретные симметрии, представляемые как внешними так и внутренними автоморфизмами, распространяются на пространства представлений группы Пуанкаре.

Другим альтернативным подходом является алгебраическая схема описания дискретных симметрий, предложенная автором в [17, 18], где дискретные симметрии представляются фундаментальными автоморфизмами алгебр Клиффорда. Настоящая статья является дальнейшим развитием этого подхода. Прежде всего, для описания зарядового сопряжения C применяется псевдоавтоморфизм комплексной алгебры Клиффорда, заключающийся в комплекс-

E-mail: root@varlamov.kemerovo.su
Сибирский государственный индустриальный университет

ном сопряжении произвольного элемента этой алгебры. Основным преимуществом алгебраической схемы описания дискретных симметрий является возможность использования теории алгебр Клиффорда и связанной с ней теории представлений групп, что позволяет существенно расширить множество конечномерных представлений группы Лоренца посредством введения нового класса фактор-представлений этой группы, соответствующих нечетномерным комплексным алгебрам. Кроме того, это позволяет расширить интерпретацию Вигнера [21, 22], вводя фактор-представления группы Лоренца для описания физических полей с нарушенной группой отражений (киральные поля). В заключении статьи соответствующее фактор-представление и непосредственно связанное с ним нейтральное поле Вейля-Хестенса применяется для описания поля нейтрино. Интересный вопрос о связи алгебраической схемы с подходом Гельфанда-Минлоса-Шапиро и Бухбиндера-Гитмана-Шелепина выходит за рамки данной статьи и будет исследован в последующей работе.

1. Представления группы Лоренца и физические поля

Как известно [5], представления группы Лоренца играют фундаментальную роль в квантовой теории поля. Физические поля, описывающие элементарные частицы, определяются в терминах конечномерных неприводимых представлений группы Лоренца (соответственно группы Пуанкаре). Особо отметим следующий важный факт, имеющий первостепенное значение для последующего исследования. А именно, в согласии с [3] всякое конечномерное неприводимое представление собственной группы Лоренца $SL(2;\mathbb{C})$ эквивалентно некоторому ее спинорному представлению, так что спинорные представления исчерпывают по существу все конечномерные неприводимые представления группы $SL(2;\mathbb{C})$.

В настоящее время одним из наиболее многообещающих методов в квантовой теории многих тел является метод Холланда [14], в котором спинор $\Psi = \sum_{A_1\ldots A_N} c_{A_1\ldots A_n}\mathbf{e}_{1A_1}\cdots\mathbf{e}_{nA_n}$, описывающий многочастичное состояние системы, является элементом тензорного произведения алгебр Паули $C\ell_{3,0}\otimes\cdots\otimes C\ell_{3,0}$, где $c_{A_1\ldots A_n}$ определяют множество евклидовых комплексных тензоров, а образующие тензорного произведения имеют вид:

$$\mathbf{e}_{1i} = \sigma_i\otimes I\otimes\cdots\otimes I,\quad \mathbf{e}_{2i} = I\otimes\sigma_i\otimes I\otimes\cdots\otimes I,\quad \ldots\quad \mathbf{e}_{ni} = I\otimes\cdots\otimes I\otimes\sigma_i, \tag{1}$$

где σ_i – матрицы Паули. Представление образующих (1) изоморфно представлению Брауэра-Вейля [6], в котором алгебра Клиффорда ранга n над полем комплексных чисел($\mathbb{C}_n \simeq \mathsf{M}_{2^n}(\mathbb{C})$) рассматривается как n-мерное неприводимое представление группы $SL(2;\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_+(1,3)$, полученное в результате тензорного произведения фундаментальных представлений той же группы. Напомним, что фундаментальное представление группы $SL(2;\mathbb{C})$ действует в 2-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ (пространство 2-спиноров в формализме Ван дер Вардена [19]), ассоциированным с алгеброй $\mathbb{C}_2 \simeq \mathsf{M}_2(\mathbb{C})$. С другой стороны, в силу изоморфизма $C\ell_{3,0} \simeq \mathbb{C}_2$ тензорное произведение $C\ell_{3,0}\otimes\cdots\otimes C\ell_{3,0}$ индуцирует произведение $\mathbb{C}_2\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}_2$, на котором, в свою очередь, действует группа Брауэра-Уолла $BW_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{Z}_2$ [7, 20] (под групповой операцией здесь понимается тензорное произведение двух алгебр $\mathbb{C}_2$). Группа $BW_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{Z}_2$ и связанная с ней периодичность по модулю 2 комплексных алгебр Клиффорда приводят к одному замечательному соотношению для алгебры Дирака, $\mathbb{C}_4 \simeq \mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_2$, т.е. *алгебра Дирака изоморфна тензорному произведению двух алгебр Паули.*

С конечномерными представлениями группы $SL(2;\mathbb{C})$ тесно связано понятие *физического поля.* В согласии с интерпретацией Вигнера [21] элементарная частица описывается некоторым неприводимым конечномерным представлением группы Пуанкаре. Двукратное накрытие группы Пуанкаре изоморфно полупрямому произведению $SL(2;\mathbb{C}) \odot T(4)$, или $\mathbf{Spin}_+(1,3) \odot T(4)$, где $T(4)$ – подгруппа четырехмерных трансляций. Пусть $\psi(x)$ – физическое поле, тогда при преобразовании (a, Λ) группы Пуанкаре поле $\psi(x)$ преобразуется по следующему правилу

$$\psi'_m u(x) = \sum_{\nu} \mathfrak{D}_{\mu\nu}(\sigma)\psi_\nu(\Lambda^{-1}(x-a)), \tag{2}$$

где $a \in T(4)$, $\sigma \in SL(2;\mathbb{C})$, Λ – преобразование Лоренца, а $\mathfrak{D}(\sigma)$ – представление группы $SL(2;\mathbb{C})$ в некотором пространстве представления $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$ (спинпространстве). Поскольку группа $T(4)$ абелева, то все ее представления одномерны. Таким образом, все конечномерные представления группы Пуанкаре, по существу, эквивалентны представлениям $\mathfrak{D}(\sigma)$ группы $SL(2;\mathbb{C})$. Если представление $\mathfrak{D}(\sigma)$ приводимо, то спинпространство $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$ разлагается в прямую сумму неприводимых подпространств, т.е. можно выбрать в $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$ такой базис, в котором все матрицы $\mathfrak{D}(\sigma)$ примут «ящичный» вид. Тогда поле $\psi(x)$ сводится к некоторому числу полей, соответствующих полученным неприводимым представлениям группы $SL(2;\mathbb{C})$, каждое из которых преобразуется независимо от остальных, и можно считать $\psi(x)$ набором полей более простого строения с меньшим числом компонент. Эти более простые поля, очевидно, соответствуют неприводимым представлениям $\mathfrak{D}(\sigma)$. Как известно [2, 3, 5], полная система неприводимых представлений группы $SL(2;\mathbb{C})$ реализуется в пространстве $\mathrm{Sym}_{(k,r)} \subset \mathbb{S}_{2^{k+r}}$ симметрических спинтензоров, размерность которого равна $(k+1)(r+1)$. Представление группы $SL(2;\mathbb{C})$ такими спинтензорами неприводимо и обозначается символом $\mathfrak{D}^{(j,j')}(\sigma)$, где $2j = k$, $2j' = r$ и числа j и j', задающие спин, являются целыми или полуцелыми. Тогда поле $\psi(x)$, преобразующееся по формуле (2), является, в общем случае, полем типа (j, j'). Все поля сводятся, таким образом, к полям этого типа, математическое описание которых требует знания матриц представлений $\mathfrak{D}^{(j,j')}(\sigma)$. В физике, как правило, используются следующие два типа полей:

1) Поле типа $(j, 0)$. Структура данного поля(или поля $(0, j')$) описывается представлением $\mathfrak{D}^{(j,0)}(\sigma)$ ($\mathfrak{D}^{(0,j')}(\sigma)$), которое реализуется в пространстве $\mathrm{Sym}_{(k,0)} \subset \mathbb{S}_{2^k}$ ($\mathrm{Sym}_{(0,r)} \subset \mathbb{S}_{2^r}$). При этом, с полем типа $(j, 0)$ (соответственно $(0, j')$) ассоциирована алгебра $\mathbb{C}_{2k} \simeq \mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}_2$ (соотв. $\overset{*}{\mathbb{C}}_2 \simeq \overset{*}{\mathbb{C}}_2 \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_2 \otimes \cdots \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_2$). Тривиальный случай $j = 0$ соответствует *скалярному полю Паули-Вайскопфа*, описывающему скалярные частицы. Далее, при $j = j' = 1/2$ имеем *поле Вейля*, описывающее нейтрино. При этом антинейтрино описывается фундаменталь-

ным представлением $\mathfrak{D}^{(1/2,0)}(\sigma)=\sigma$ группы $SL(2;\mathbb{C})$ и связанной с этим представлением алгеброй $\mathbb{C}_2$. Соответственно, нейтрино описывается сопряженным представлением $\mathfrak{D}^{(0,1/2)}(\sigma)$ и алгеброй $\overset{*}{\mathbb{C}}_2$. В связи с этим, можно сказать, что поле нейтрино является, в некотором смысле, наиболее фундаментальным физическим полем, т.е. своего рода основным строительным кирпичом, из которого посредством прямой суммы или тензорного произведения строятся все остальные физические поля.

2) Поле типа $(j,0)\oplus(0,j)$. Структура данного поля допускает пространственное отражение и, таким образом, описывается удвоенным представлением группы $SL(2;\mathbb{C})$. Представление $\mathfrak{D}^{(j,0)}\oplus\mathfrak{D}^{(0,j)}$ реализуется в пространстве $\mathrm{Sym}_{(k,k)}\subset\mathbb{S}_{2^{2k}}$. Алгеброй Клиффорда, ассоциированной с этим представлением является произведение $\mathbb{C}_{2k}\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_{2k}\simeq\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2\otimes\cdots\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2$. В простейшем случае, при $j=1/2$ получим *биспинорное (электрон-позитронное) поле Дирака* $(1/2,0)\oplus(0,1/2)$ с алгеброй $\mathbb{C}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2\simeq\mathbb{C}_4$. При $j=1$ имеем *поле Максвелла* $(1,0)\oplus(0,1)$ с алгеброй $\mathbb{C}_4\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_4\simeq\mathbb{C}_2\otimes\mathbb{C}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_2$, при этом электромагнитное поле задается комплексными линейными комбинациями $\mathbf{F}=\mathbf{E}-i\mathbf{H}$, $\overset{*}{\mathbf{F}}=\mathbf{E}+i\mathbf{H}$. Уравнения Максвелла в спинорном виде впервые были записаны Уленбеком и Лапортом в 1931г. [16]. Кроме того, алгебра, ассоциированная с полем Максвелла является тензорным произведением алгебр $\mathbb{C}_2$, соответствующих нейтринным полям. В связи с этим интересно вспомнить *нейтринную теорию света*, предложенную Йорданом в 1928г. [15], в которой электромагнитное поле строится из двух полей нейтрино (см. также статью Двоеглазова [9] о нейтринной теории света и имеющуюся там обширную литературу по этой тематике).

Отметим два важных обстоятельства, возникающих в связи с рассмотренными выше неприводимыми представлениями группы $SL(2;\mathbb{C})$ и ассоциированными с этими представлениями алгебрами Клиффорда. Первое обстоятельство связано с интерпретацией Вигнера. А именно, связь конечномерных представлений группы $SL(2;\mathbb{C})$ с комплексными алгебрами Клиффорда позволяет существенно расширить интерпретацию Вигнера в плане использования теории клиффордовых алгебр при изучении пространственно-временных (а также и внутренних) симметрий элементарных частиц. Второе обстоятельство связано со спином. Обычно, алгебра Клиффорда ассоциируется с полуцелым спином, соответствующим фермионным полям, так называемым «полям материи», в то время как поля с целым спином (бозонные поля)выводятся за рамки алгебраического описания. Однако, данная несимметричная ситуация ничем не оправдана, поскольку поля с целым спином имеют естественное описание в рамках спинтензорных представлений четного ранга группы Лоренца и ассоциированных с этими представлениями алгебр вида $\mathbb{C}_{2k}\otimes\overset{*}{\mathbb{C}}_{2k}$, где k – четно (пример поля Максвелла). К этому следует добавить, что обобщение вопроса о связи спина со статистикой в рамках *клиффордовой статистики* было недавно предложено Финкельштейном и сотрудниками [10, 11].

2. Псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ и зарядовое сопряжение

Поскольку все физические поля, так или иначе, определяются в рамках неприводимых конечномерных представлений группы $SL(2;\mathbb{C})$, то определение дискретных симметрий (пространственного отражения P, обращения времени T и комбинации PT) на пространства представлений группы Лоренца имеет первостепенное значение.

В недавней статье [17] показано, что инверсия пространства P, обращение времени T и их комбинация PT соответствуют фундаментальным автоморфизмам $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\star$ (инволюция),$\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ (обращение) и $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$ (сопряжение) алгебры Клиффорда $C\!\ell$. Более того, существует изоморфизм между дискретной подгруппой $\{1, P, T, PT\} \simeq \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2$ ($P^2 = T^2 = (PT)^2 = 1,\ PT = TP$) ортогональной группы $O(p, q)$ и группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(C\!\ell) = \{\mathrm{Id}, \star, \widetilde{\ }, \widetilde{\star}\}$:

$$
\begin{array}{|c||c|c|c|c|}\hline
 & \mathrm{Id} & \star & \widetilde{\ } & \widetilde{\star} \\\hline\hline
\mathrm{Id} & \mathrm{Id} & \star & \widetilde{\ } & \widetilde{\star} \\\hline
\star & \star & \mathrm{Id} & \widetilde{\star} & \widetilde{\ } \\\hline
\widetilde{\ } & \widetilde{\ } & \widetilde{\star} & \mathrm{Id} & \star \\\hline
\widetilde{\star} & \widetilde{\star} & \widetilde{\ } & \star & \mathrm{Id} \\\hline
\end{array}
\sim
\begin{array}{|c||c|c|c|c|}\hline
 & 1 & P & T & PT \\\hline\hline
1 & 1 & P & T & PT \\\hline
P & P & 1 & PT & T \\\hline
T & T & PT & 1 & P \\\hline
PT & PT & T & P & 1 \\\hline
\end{array}
\qquad (3)
$$

Далее, в случае $P^2 = T^2 = (PT)^2 = \pm 1$ и $PT = -TP$ имеет место изоморфизм между группой $\{1, P, T, PT\}$ и группой автоморфизмов $\mathsf{Aut}(C\!\ell) = \{\mathsf{I}, \mathsf{W}, \mathsf{E}, \mathsf{C}\}$. Спинорные представления фундаментальных автоморфизмов алгебр $\mathbb{C}_n$ были впервые получены Рашевским в 1955г. [4]: 1) Инволюция: $\mathsf{A}^\star = \mathsf{W}\mathsf{A}\mathsf{W}^{-1}$, где W – матрица автоморфизма $\star$ (матричное представление максимального базисного элемента ω); 2) Обращение: $\widetilde{\mathsf{A}} = \mathsf{E}\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{E}^{-1}$, где E – матрица антиавтоморфизма $\widetilde{\ }$, удовлетворяющая условиям $\mathcal{E}_i\mathsf{E} - \mathsf{E}\mathcal{E}_i^{\mathsf{T}} = 0$ и $\mathsf{E}^{\mathsf{T}} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\mathsf{E}$, здесь $\mathcal{E}_i = \gamma(\mathbf{e}_i)$ – матричные представления образующих алгебры $C\!\ell$; 3) Сопряжение: $\widetilde{\mathsf{A}^\star} = \mathsf{C}\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{C}^{-1}$, где $\mathsf{C} = \mathsf{E}\mathsf{W}^{\mathsf{T}}$ – матрица антиавтоморфизма $\widetilde{\star}$, удовлетворяющая условиям $\mathsf{C}\mathcal{E}^{\mathsf{T}} + \mathcal{E}_i\mathsf{C} = 0$ и $\mathsf{C}^{\mathsf{T}} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\mathsf{C}$. Например, для алгебры Дирака $\mathbb{C}_4$ в каноническом γ-базисе существует стандартное представление $P = \gamma_0$ and $T = \gamma_1\gamma_3$ [1], следовательно, $\{1, P, T, PT\} = \{1, \gamma_0, \gamma_1\gamma_3, \gamma_0\gamma_1\gamma_3\}$. С другой стороны, группа автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}_4$ для γ-базиса имеет вид $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}_4) = \{\mathsf{I}, \mathsf{W}, \mathsf{E}, \mathsf{C}\} = \{\mathsf{I}, \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \gamma_1\gamma_3, \gamma_0\gamma_2\}$. В [17] показывается, что $\{1, P, T, PT\} = \{1, \gamma_0, \gamma_1\gamma_3, \gamma_0\gamma_1\gamma_3\} \simeq \mathsf{Aut}(\mathbb{C}_4) \simeq \mathbb{Z}_4$, где $\mathbb{Z}_4$ – комплексная группа с сигнатурой $(+, -, -)$.

В общем случае, пространством конечномерного представления группы $SL(2;\mathbb{C})$ является спинпространство $\mathbb{S}_{2^{k+r}}$, или минимальный левый идеал алгебры $\mathbb{C}_{2k} \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_{2r}$. Следовательно, фундаментальные автоморфизмы алгебры $\mathbb{C}_{2k} \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_{2r}$, заданные в спинорном представлении, в силу изоморфизма (3) индуцируют дискретные преобразования на пространствах представлений (спинпространствах) группы Лоренца. Выделение минимального левого идеала комплексной алгебры $\mathbb{C}_n \simeq \mathbb{C}_2 \otimes \mathbb{C}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}_2$ индуцирует пространство конечномерного представления группы $SL(2;\mathbb{C})$. Кроме того, с каждой алгеброй $\mathbb{C}_n$ ассоциировано комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$. Пусть $n = p + q$, тогда операция выделения вещественного подпространства $\mathbb{R}^{p,q}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ лежит в основе определения дискретного преобразования, известного в физике как *зарядовое сопряжение* C. Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ – ортобазис в пространстве $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{e}_i^2 = 1$. Первые p векторов этого базиса оставим без изменения, а оставшиеся q векторов умножим на i, так что они станут мнимоединичными. Полученный базис

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, i\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, i\mathbf{e}_{p+q}\} \tag{4}$$

позволяет выделить $\mathbb{R}^{p,q}$ в $\mathbb{C}^n$. А именно, за векторы $\mathbb{R}^{p,q}$ следует принять те векторы $\mathbb{C}^n$, которые разлагаются по базису (4) с вещественными коэффициентами. Таким образом, получаем вещественное векторное пространство $\mathbb{R}^{p,q}$, снабженное, в общем случае, невырожденной квадратичной формой

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \ldots - x_{p+q}^2,$$

где $x_1, \ldots, x_{p+q}$ – координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе (4). Далее, составляя базисные элементы, разложение которых по образующим $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, i\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, i\mathbf{e}_{p+q}$ обладает вещественными коэффициентами, мы видим, что выделение $\mathbb{R}^{p,q}$ в $\mathbb{C}^n$ вызывает выделение *вещественной подалгебры* $C\!\ell_{p,q}$ в $\mathbb{C}_n$. Следовательно, любой элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_n$ можно однозначно представить в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2,$$

где $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \in C\!\ell_{p,q}$. Отображение

$$\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1 - i\mathcal{A}_2 \tag{5}$$

переводит алгебру $\mathbb{C}_n$ в себя взаимно однозначно и с сохранением операций сложения и умножения элементов $\mathcal{A}$; операция умножения элемента на число переходит в операцию умножения на комплексно-сопряженное число. Всякое отображение $\mathbb{C}_n$ на себя, обладающее перечисленными свойствами, называется *псевдоавтоморфизмом.* Таким образом, выделение $\mathbb{R}^{p,q}$ в $\mathbb{C}^n$ индуцирует в $\mathbb{C}_n$ псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ [4].

Рассмотрим спинорное представление псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathbb{C}_n$ при $n \equiv 0 \pmod 2$. В спинорном представлении каждый элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{C}_n$ будет представлен некоторой матрицей A, а псевдоавтоморфизм (5) примет вид псевдоавтоморфизма полной матричной алгебры $\mathsf{M}_{2^{n/2}}$

$$\mathsf{A} \longrightarrow \overline{\mathsf{A}}.$$

С другой стороны, преобразование, при котором каждая матрица A заменяется комплексно-сопряженной, $\mathsf{A} \rightarrow \dot{\mathsf{A}}$, также является псевдоавтоморфизмом алгебры $\mathsf{M}_{2^{n/2}}$. Последовательное выполнение двух псевдоавтоморфизмов $\dot{\mathsf{A}} \rightarrow \mathsf{A}$ и $\mathsf{A} \rightarrow \overline{\mathsf{A}}$, $\dot{\mathsf{A}} \rightarrow \mathsf{A} \rightarrow \overline{\mathsf{A}}$, приводит к внутреннему автоморфизму $\dot{\mathsf{A}} \rightarrow \overline{\mathsf{A}}$ полной матричной алгебры $\mathsf{M}_{2^{n/2}}$, или

$$\overline{\mathsf{A}} = \Pi\dot{\mathsf{A}}\Pi^{-1}, \tag{6}$$

где Π – матрица псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ в спинорном представлении. Достаточным условием для определения псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ является выбор матрицы Π таким образом, чтобы преобразование $\mathsf{A} \to \Pi\dot{\mathsf{A}}\Pi^{-1}$ переводило в себя матрицы $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_p, i\mathcal{E}_{p+1}, \ldots, i\mathcal{E}_{p+q}$, образующие спинбазис вещественной подалгебры $C\!\ell_{p,q}$, т.е.

$$\mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_i = \Pi\dot{\mathcal{E}}_i\Pi^{-1} \quad (i = 1, \ldots, p+q). \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{C}_n$ *– комплексная алгебра Клиффорда при* $n \equiv 0 \pmod 2$ *и пусть* $C\!\ell_{p,q} \subset \mathbb{C}_n$ *– подалгебра с вещественным кольцом деления* $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ *при* $p - q \equiv 0, 2 \pmod 8$ *и кватернионным кольцом* $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ *при* $p - q \equiv 4, 6 \pmod 8$, $n = p + q$. *Тогда в спинорном представлении алгебры* $\mathbb{C}_n$ *матрица* Π *псевдоавтоморфизма* $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ *в зависимости от структуры колец делений вещественной подалгебры* $C\!\ell_{p,q}$ *имеет следующее строение:*

1) $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$, $p - q \equiv 0, 2 \pmod 8$.

Матрица Π *для любого спинорного представления над кольцом* $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ *пропорциональна единичной матрице.*

2) $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$, $p - q \equiv 4, 6 \pmod 8$.

$\Pi = \mathcal{E}_{\alpha_1}\mathcal{E}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_a}$ *при* $a \equiv 0 \pmod 2$ *и* $\Pi = \mathcal{E}_{\beta_1}\mathcal{E}_{\beta_2}\cdots\mathcal{E}_{\beta_b}$ *при* $b \equiv 1 \pmod 2$, *где* a *матриц* $\mathcal{E}_{\alpha_t}$ *и* b *матриц* $\mathcal{E}_{\beta_s}$ *образуют базис спинорного представления алгебры* $C\!\ell_{p,q}$ *над кольцом* $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$, $a + b = p + q$, $0 < t \leqslant a$, $0 < s \leqslant b$. *При этом*

$$\begin{aligned} \Pi\dot{\Pi} &= \mathsf{I} \quad \textit{при } a, b \equiv 0, 1 \pmod 4, \\ \Pi\dot{\Pi} &= -\mathsf{I} \quad \textit{при } a, b \equiv 2, 3 \pmod 4, \end{aligned}$$

где I *– единичная матрица.*

Доказательство.

1) $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$.

Поскольку для типов $p - q \equiv 0, 2 \pmod 8$ имеет место изоморфизм $C\!\ell_{p,q} \simeq \mathsf{M}_{2^{\frac{p+q}{2}}}(\mathbb{R})$ (теорема Веддербарна-Артина), то все матрицы $\mathcal{E}_i$ спинбазиса алгебры $C\!\ell_{p,q}$ вещественны и $\dot{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_i$. Следовательно, в этом случае условие(7) запишется

$$\mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{E}_i = \Pi\mathcal{E}_i\Pi^{-1},$$

откуда $\mathcal{E}_i\Pi = \Pi\mathcal{E}_i$. Таким образом, для алгебр $C\!\ell_{p,q}$ типов $p - q \equiv 0, 2 \pmod 8$ матрица Π псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ коммутирует со всеми матрицами $\mathcal{E}_i$. Легко видеть, что такой матрицей может быть только единичная матрица, $\Pi \sim \mathsf{I}$.

2) $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$.

В свою очередь, для кватернионных типов $p - q \equiv 4, 6 \pmod 8$ имеет место изоморфизм $C\!\ell_{p,q} \simeq \mathsf{M}_{2^{\frac{p+q}{2}}}(\mathbb{H})$. Следовательно, среди матриц спинбазиса алгебры $C\!\ell_{p,q}$ встречаются матрицы $\mathcal{E}_\alpha$ для которых $\dot{\mathcal{E}}_\alpha = -\mathcal{E}_\alpha$. Пусть a – число комплексных матриц, тогда спинбазис разбивается на два подмножества, в первом подмножестве $\{\dot{\mathcal{E}}_{\alpha_t} = -\mathcal{E}_{\alpha_t}$ содержатся комплексные матрицы, $0 < t \leqslant a$, во втором подмножестве $\{\dot{\mathcal{E}}_{\beta_s}=\mathcal{E}_{\beta_s}\}$ содержатся вещественные матрицы, $0<s\leqslant p+q-a$. В соответствии со структурой спинбазиса алгебры $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\simeq\mathsf{M}_{2^{\frac{p+q}{2}}}(\mathbb{H})$ условие (7) запишется следующим образом

$$\mathcal{E}_{\alpha_t}\longrightarrow-\mathcal{E}_{\alpha_t}=\Pi\mathcal{E}_{\alpha_t}\Pi^{-1},\quad \mathcal{E}_{\beta_s}\longrightarrow\mathcal{E}_{\beta_s}=\Pi\mathcal{E}_{\beta_s}\Pi^{-1}.$$

Откуда

$$\mathcal{E}_{\alpha_t}\Pi=-\Pi\mathcal{E}_{\alpha_t},\quad \mathcal{E}_{\beta_s}\Pi=\Pi\mathcal{E}_{\beta_s}. \tag{8}$$

Таким образом, для кватернионных типов $p-q\equiv 4,6\pmod 8$ матрица Π псевдоавтоморфизма $\mathcal{A}\rightarrow\overline{\mathcal{A}}$ антикоммутирует с комплексной частью спинбазиса алгебры $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ и коммутирует с вещественной частью того же спинбазиса. Из (8) следует, что строение матрицы Π будет аналогично строению матриц E и C соответственно антиавтоморфизмов $\mathcal{A}\rightarrow\widetilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}\rightarrow\widetilde{\mathcal{A}^\star}$ (см. теорему 4 в [18]), т.е. матрица Π псевдоавтоморфизма $\mathcal{A}\rightarrow\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathbb{C}_n$ является произведением только комплексных матриц или только вещественных матриц.

Итак, пусть $0<a<p+q$ и пусть $\Pi=\mathcal{E}_{\alpha_1}\mathcal{E}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_a}$ – матрица псевдоавтоморфизма $\mathcal{A}\rightarrow\overline{\mathcal{A}}$, тогда условия перестановочности матрицы Π с матрицами $\mathcal{E}_{\beta_s}$ вещественной части спинбазиса $(0<s\leqslant p+q-a)$ и с матрицами $\mathcal{E}_{\alpha_t}$ комплексной части $(0<t\leqslant a)$ имеют вид

$$\Pi\mathcal{E}_{\beta_s}=(-1)^a\mathcal{E}_{\beta_s}\Pi, \tag{9}$$

$$\begin{array}{rcl}\Pi\mathcal{E}_{\alpha_t}&=&(-1)^{a-t}\sigma(\alpha_t)\mathcal{E}_{\alpha_1}\mathcal{E}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_{t-1}}\mathcal{E}_{\alpha_{t+1}}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_a},\\ \mathcal{E}_{\alpha_t}\Pi&=&(-1)^{t-1}\sigma(\alpha_t)\mathcal{E}_{\alpha_1}\mathcal{E}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_{t-1}}\mathcal{E}_{\alpha_{t+1}}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_a},\end{array} \tag{10}$$

т.е. при $a\equiv 0\pmod 2$ Π коммутирует с вещественной частью спинбазиса и антикоммутирует с комплексной частью. Соответственно, при $a\equiv 1\pmod 2$ Π антикоммутирует с вещественной частью и коммутирует с комплексной. Далее, пусть $\Pi=\mathcal{E}_{\beta_1}\mathcal{E}_{\beta_2}\cdots\mathcal{E}_{\beta_{p+q-a}}$ – произведение вещественных матриц спинбазиса, тогда

$$\begin{array}{rcl}\Pi\mathcal{E}_{\beta_s}&=&(-1)^{p+q-a-s}\sigma(\beta_s)\mathcal{E}_{\beta_1}\mathcal{E}_{\beta_2}\cdots\mathcal{E}_{\beta_{s-1}}\mathcal{E}_{\beta_{s+1}}\cdots\mathcal{E}_{\beta_{p+q-a}},\\ \mathcal{E}_{\beta_s}\Pi&=&(-1)^{s-1}\sigma(\beta_s)\mathcal{E}_{\beta_1}\mathcal{E}_{\beta_2}\cdots\mathcal{E}_{\beta_{s-1}}\mathcal{E}_{\beta_{s+1}}\cdots\mathcal{E}_{\beta_{p+q-a}},\end{array} \tag{11}$$

$$\Pi\mathcal{E}_{\alpha_t}=(-1)^{p+q-a}\mathcal{E}_{\alpha_t}\Pi, \tag{12}$$

т.е. при $p+q-a\equiv 0\pmod 2$ матрица Π антикоммутирует с вещественной частью спинбазиса и коммутирует с комплексной частью. Соответственно, при $p+q-a\equiv 1\pmod 2$ Π коммутирует с вещественной частью и антикоммутирует с комплексной частью.

Сравнение условий (9)–(10) с условием (8) показывает, что матрица $\Pi=\mathcal{E}_{\alpha_1}\mathcal{E}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_a}$ может существовать только при $a\equiv 0\pmod 2$, т.е. Π является произведением четного числа комплексных матриц $\mathcal{E}_{\alpha_t}$. В свою очередь, сравнение условий (11)–(12) с (8 показывает, что матрица $\Pi=\mathcal{E}_{\beta_1}\mathcal{E}_{\beta_2}\cdots\mathcal{E}_{\beta_{p+q-a}}$ может существовать только при $p+q-a\equiv 1\pmod 2$, т.е. в этом случае Π является произведением нечетного числа вещественных матриц $\mathcal{E}_{\beta_s}$.

Подсчитаем теперь $\Pi\dot{\Pi}$. Пусть $\Pi = \mathcal{E}_{\beta_1}\mathcal{E}_{\beta_2}\cdots\mathcal{E}_{\beta_{p+q-a}}$ – произведение нечетного $(p+q-a)$ числа вещественных матриц. Поскольку для всех $\dot{\mathcal{E}}_{\beta_s} = \mathcal{E}_{\beta_s}$, то $\dot{\Pi} = \Pi$ и $\Pi\dot{\Pi} = \Pi^2$. Следовательно,

$$\Pi\dot{\Pi} = (\mathcal{E}_{\beta_1}\mathcal{E}_{\beta_2}\cdots\mathcal{E}_{\beta_{p+q-a}})^2 = (-1)^{\frac{(p+q-a)(p+q-a-1)}{2}} \cdot \mathsf{I}. \tag{13}$$

Далее, пусть $\Pi = \mathcal{E}_{\alpha_1}\mathcal{E}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_a}$ – произведение четного числа комплексных матриц. Тогда $\dot{\mathcal{E}}_{\alpha_t} = -\mathcal{E}_{\alpha_t}$ и $\dot{\Pi} = (-1)^a\Pi = \Pi$, поскольку $a \equiv 0 \pmod 2$. Следовательно,

$$\Pi\dot{\Pi} = (\mathcal{E}_{\alpha_1}\mathcal{E}_{\alpha_2}\cdots\mathcal{E}_{\alpha_a})^2 = (-1)^{\frac{a(a-1)}{2}} \cdot \mathsf{I}. \tag{14}$$

Пусть $p+q-a = b$ – число вещественных матриц $\mathcal{E}_{\beta_s}$ спинбазиса алгебры $C\!\ell_{p,q}$, тогда $p+q = a+b$, а поскольку $p+q$ всегда четное число для кватернионных типов $p-q \equiv 4, 6 \pmod 8$, то a и b одновременно четные или нечетные числа. Таким образом, из (13) и (14) следует

$$\Pi\dot{\Pi} = \begin{cases} \mathsf{I}, & \text{если } a, b \equiv 0, 1 \pmod 4, \\ -\mathsf{I}, & \text{если } a, b \equiv 2, 3 \pmod 4, \end{cases}$$

что и доказывает теорему. ■

Таким образом, выделение в C_n подалгебры $C\!\ell_{p,q}$ с вещественным кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$, $p-q \equiv 0, 2 \pmod 8$, соответствует физическим полям, описывающим *истинно нейтральные частицы*, такие как фотон и нейтральные мезоны (π^0, η^0, ρ^0, ω^0, φ^0, K^0). В свою очередь, подалгебры $C\!\ell_{p,q}$ с кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$, $p-q \equiv 4, 6 \pmod 8$ соответствуют заряженным или нейтральным полям.

3. Фактор-представления группы Лоренца

Из первого комплексного типа $n \equiv 0 \pmod 2$ строятся все физические поля, используемые в квантовой теории поля и связанные с ними представления группы $SL(2;\mathbb{C})$: $\mathfrak{D}^{(j,0)}$ $(\mathbb{C}_{2k})$, $\mathfrak{D}^{(j,0)} \oplus \mathfrak{D}^{(0,j)}$ $(\mathbb{C}_{2k} \otimes \overset{*}{\mathbb{C}}_{2k})$. В то время как второй комплексный тип $n \equiv 1 \pmod 2$ практически никогда не использовался в физике. В согласии с [17] имеет место изоморфизм ${}^{\epsilon}\mathbb{C}_{2k} \simeq {}^{\chi}\mathsf{M}_{2^k}$. Следовательно, спинпространство ${}^{\epsilon}\mathbb{S}_{2^k}$, индуцируемое фактор-алгеброй ${}^{\epsilon}\mathbb{C}_{2k}$, является пространством фактор-представления ${}^{\chi}\mathfrak{D}^{(j,0)}(\sigma)$ группы $SL(2;\mathbb{C})$. Аналогично, фактор-представление ${}^{\chi}\mathfrak{D}^{(0,j')}(\sigma)$ реализуется в пространстве ${}^{\epsilon}\dot{\mathbb{S}}_{2^r}$, индуцируемом фактор-алгеброй ${}^{\epsilon}\overset{*}{\mathbb{C}}_{2r}$. В общем случае, имеем фактор-представление ${}^{\chi}\mathfrak{D}^{(j,j')}(\sigma)$, задаваемое тензорным произведением ${}^{\epsilon}\mathbb{C}_{2k} \otimes {}^{\epsilon}\overset{*}{\mathbb{C}}_{2r}$. Таким образом, *комплексному типу* $n \equiv 1 \pmod 2$ *соответствует полная система неприводимых конечномерных фактор-представлений* ${}^{\chi}\mathfrak{D}^{(j,j')}(\sigma)$ *собственной группы Лоренца* $SL(2;\mathbb{C})$. Следовательно, до сих пор в физике использовалась только одна половина ($n \equiv 0 \pmod 2$) всех возможных конечномерных представлений группы Лоренца. Структура фактор-представлений и ее связь с дискретными симметриями дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\star$, $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ – автоморфизмы нечетномерной комплексной алгебры Клиффорда $\mathbb{C}_{n+1}$ типа $n+1 \equiv 1,3 \pmod 4$, соответствующие дискретным преобразованиям C, P, T (зарядовое сопряжение, инверсия пространства, обращение времени), и пусть ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ – фактор-алгебра, получающаяся в результате гомоморфного отображения $\epsilon:\ \mathbb{C}_{n+1} \to \mathbb{C}_n$. Тогда структура фактор-представлений группы Лоренца, определяемая строением фактор-алгебр ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$, подразделяется, в зависимости от спина j, на следующие шесть классов:*

$$j \text{ – целое } (n \equiv 0 \pmod 4) \quad \begin{array}{lcl} 1)\ {}^\chi\mathfrak{D}^{(j,0)}_{a_1}(\sigma) & : & \{T,\, C \sim I\}, \\ 2)\ {}^\chi\mathfrak{D}^{(j,0)}_{a_2}(\sigma) & : & \{T,\, C\}, \\ 3)\ {}^\chi\mathfrak{D}^{(j,0)}_{b}(\sigma) & : & \{T,\, CP\}, \end{array}$$

$$j \text{ – полуцелое } (n \equiv 2 \pmod 4) \quad \begin{array}{lcl} 4)\ {}^\chi\mathfrak{D}^{(j,0)}_{c}(\sigma) & : & \{PT,\, C\}, \\ 5)\ {}^\chi\mathfrak{D}^{(j,0)}_{d_1}(\sigma) & : & \{PT,\, CP \sim IP,\, CT \sim IT\}, \\ 6)\ {}^\chi\mathfrak{D}^{(j,0)}_{d_2}(\sigma) & : & \{PT,\, CP,\, CT\}. \end{array}$$

Соответственно для полей вида $(j,0) \oplus (0,j)$ существуют следующие шесть классов:

$${}^\chi\mathfrak{D}^{(j,0}_{class}(\sigma) \oplus {}^\chi\mathfrak{D}^{(0,j)}_{class}(\sigma),$$

где $class = \{a_1, a_2, b, c, d_1, d_2\}$.

Доказательство. Структура фактор-алгебры ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ зависит от переноса автоморфизмов $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\star$, $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$, $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathbb{C}_{n+1}$ под действием гомоморфизма ϵ на подалгебру $\mathbb{C}_n$. Действие гомоморфизма ϵ определяется следующим образом:

$$\epsilon:\ \mathcal{A}^1 + \varepsilon\omega\mathcal{A}^2 \longrightarrow \mathcal{A}^1 + \mathcal{A}^2,$$

где $\mathcal{A}^1$, $\mathcal{A}^2 \in \mathbb{C}_n$, $\omega = \mathbf{e}_{12\cdots n+1}$, а

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если } n+1 \equiv 1 \pmod 4, \\ i, & \text{если } n+1 \equiv 3 \pmod 4; \end{cases}$$

так что $(\varepsilon\omega)^2 = 1$. При этом $\varepsilon\omega \to 1$ и фактор-алгебра имеет вид

$${}^\epsilon\mathbb{C}_n \simeq \mathbb{C}_{n+1}/\operatorname{Ker}\epsilon,$$

где $\operatorname{Ker}\epsilon = \{\mathcal{A}^1 - \varepsilon\omega\mathcal{A}^1\}$ – ядро гомоморфизма ϵ.

Для переноса антиавтоморфизма $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$ необходимо, чтобы

$$\widetilde{\varepsilon\omega} = \varepsilon\omega. \tag{15}$$

Действительно, поскольку под действием гомоморфизма ϵ элементы 1 и $\varepsilon\omega$ одинаково отображаются в единицу, то и преобразованные элементы $\widetilde{1}$ и $\widetilde{\varepsilon\omega}$ также должны отображаться в 1, но $\widetilde{1} = 1 \to 1$, а $\widetilde{\varepsilon\omega} = \pm\varepsilon\omega \to \pm 1$ в силу $\widetilde{\omega} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega$, откуда

$$\widetilde{\omega} = \begin{cases} \omega, & \text{если } n+1 \equiv 1 \pmod 4; \\ -\omega, & \text{если } n+1 \equiv 3 \pmod 4. \end{cases} \tag{16}$$

Следовательно, под действием гомоморфизма ϵ антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ переносится из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$ только при $n \equiv 0 \pmod 4$.

В свою очередь, для переноса автоморфизма $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\star$ необходимо выполнение условия $(\varepsilon\omega)^\star = \varepsilon\omega$. Однако, поскольку элемент ω нечетен и $\omega^\star = (-1)^{n+1}\omega$, то имеем всегда

$$\omega^\star = -\omega. \tag{17}$$

Таким образом, автоморфизм $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\star$ никогда не переносится из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$.

Далее, для переноса антиавтоморфизма $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$ из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$ необходимо, чтобы

$$\widetilde{(\varepsilon\omega)^\star} = \varepsilon\omega. \tag{18}$$

Легко видеть, что условие (18) удовлетворяется только при $n+1 \equiv 3 \pmod 4$, поскольку в этом случае из второго равенства (16) и (17) имеем

$$\widetilde{(\varepsilon\omega)^\star} = \varepsilon\widetilde{\omega^\star} = -\varepsilon\omega^\star = \varepsilon\omega.$$

Следовательно, под действием гомоморфизма ϵ антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$ переносится из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$ только при $n \equiv 2 \pmod 4$.

Пусть $n+1 = p+q$. Определяя в $\mathbb{C}_{n+1}$ базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, i\mathbf{e}_{p+1}, \ldots, i\mathbf{e}_{p+q}\}$, выделим вещественную подалгебру $C\!\ell_{p,q}$, где при $p-q \equiv 3,7 \pmod 8$ имеет место комплексное кольцо деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$, а при $p-q \equiv 1 \pmod 8$ и $p-q \equiv 5 \pmod 8$ соответственно двойное вещественное кольцо $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ и двойное кватернионное кольцо $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Произведение $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_p i\mathbf{e}_{p+1} \cdots i\mathbf{e}_{p+q} = i^q\omega \in \mathbb{C}_{n+1}$ задает максимальный базисный элемент вещественной подалгебры $C\!\ell_{p,q}$, при этом $\overline{(i^q\omega)} = i^q\omega$, т.е. $(-i)^q\overline{\omega} = i^q\omega$, откуда

$$\overline{\omega} = (-1)^q\omega. \tag{19}$$

При q – четном, из (19) имеем $\overline{\omega} = \omega$ и, следовательно, псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ переносится при $q \equiv 2 \pmod 2$, а поскольку $p+q$ – нечетное число, то всегда $p \equiv 1 \pmod 2$. Более подробно, при $n+1 \equiv 3 \pmod 4$ псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ переносится из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$, если вещественная подалгебра $C\!\ell_{p,q}$ обладает комплексным кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$, $p-q \equiv 3,7 \pmod 8$, и не переносится ($\overline{\omega} = -\omega$, $q \equiv 1 \pmod 2$, $p \equiv 0 \pmod 2$) в случае подалгебр $C\!\ell_{p,q}$ с двойными кольцами $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ и $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, $p-q \equiv 1,5 \pmod 8$. В свою очередь, при $n+1 \equiv 1 \pmod 4$ псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ переносится из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$, если подалгебра $C\!\ell_{p,q}$ имеет тип $p-q \equiv 1,5 \pmod 8$, и не переносится в случае подалгебр $C\!\ell_{p,q}$ с $p-q \equiv 3,7 \pmod 8$. Кроме того, в силу (17) при $n+1 \equiv 3 \pmod 4$ с $p-q \equiv 1,5 \pmod 8$ и при $n+1 \equiv 1 \pmod 4$ с $p-q \equiv 3,7 \pmod 8$, псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}^\star}$, являющийся композицией псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ и автоморфизма $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\star$, переносится из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$, поскольку

$$\overline{\omega^\star} = \omega.$$

Далее, в силу второго равенства (16) при $n+1 \equiv 3 \pmod 4$ с $p-q \equiv 1,5 \pmod 8$ из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$ переносится псевдоантиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\widetilde{\mathcal{A}}}$, являющийся композицией псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ и антиавтоморфизма $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$, поскольку

$$\overline{\widetilde{\omega}} = \omega.$$

Найденные выше условия для переноса фундаментальных автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}_{n+1}$ на ее подалгебру $\mathbb{C}_n$ под действием гомоморфизма ϵ позволяют явным образом определить структуру фактор-алгебр ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$.

1) Фактор-алгебра ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$, $n \equiv 0 \pmod 4$.

Как было показано выше, в случае $n+1 \equiv 1 \pmod 4$ из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$ переносятся антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$, псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$, если подалгебра $C\!\ell_{p,q} \subset \mathbb{C}_{n+1}$ обладает двойными кольцами $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ ($p - q \equiv 1, 5 \pmod 8$), а также псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}^\star}$, если подалгебра $C\!\ell_{p,q}$ имеет комплексное кольцо $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$ ($p - q \equiv 3, 7 \pmod 8$). Легко видеть, что в зависимости от типа подалгебры $C\!\ell_{p,q}$, структура фактор-алгебр ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ данного типа подразделяется на два существенно различных класса:

a) Класс фактор-алгебр ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$, содержащий антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ и псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$. Очевидно, что в зависимости от кольца деления подалгебры $C\!\ell_{p,q} \subset \mathbb{C}_{n+1}$, данный класс подразделяется еще на два подкласса:

a_1) ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ с $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ при $C\!\ell_{p,q}$ с кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $p - q \equiv 1 \pmod 8$.

a_2) ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ с $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ при $C\!\ell_{p,q}$с кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, $p - q \equiv 5 \pmod 8$.

b) Класс фактор-алгебр ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$, содержащий антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ и псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}^\star}$, если подалгебра $C\!\ell_{p,q} \subset \mathbb{C}_{n+1}$ имеет кольцо $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$, $p - q \equiv 3, 7 \pmod 8$.

2) Фактор-алгебра ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$, $n \equiv 2 \pmod 4$.

В случае $n+1 \equiv 3 \pmod 4$ из $\mathbb{C}_{n+1}$ в $\mathbb{C}_n$ переносятся антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$, псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$, если подалгебра $C\!\ell_{p,q} \subset \mathbb{C}_{n+1}$ обладает комплексным кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$ ($p - q \equiv 3, 7 \pmod 8$); псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}^\star}$ и псевдоантиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\widetilde{\mathcal{A}}}$, если подалгебра $C\!\ell_{p,q}$ имеет двойные кольца $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ ($p - q \equiv 1, 5 \pmod 8$). В зависимости от типа $C\!\ell_{p,q} \subset \mathbb{C}_{n+1}$ фактор-алгебры ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ данного типа подразделяются на следующие два класса:

c) Класс фактор-алгебр ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$, содержащий антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$ и псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$, если подалгебра $C\!\ell_{p,q}$ имеет кольцо $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$, $p - q \equiv 3, 7 \pmod 8$.

d) Класс фактор-алгебр ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$, содержащий антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$, псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}^\star}$ и псевдоантиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\widetilde{\mathcal{A}}}$. При этом, в зависимости от структуры колец делений подалгебры $C\!\ell_{p,q}$, различаются два подкласса:

d_1) ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ с $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$, $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}^\star}$ и $\mathcal{A} \to \overline{\widetilde{\mathcal{A}}}$ при $C\!\ell_{p,q}$ с кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $p - q \equiv 1 \pmod 8$.

d_2) ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ с $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$, $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}^\star}$ и $\mathcal{A} \to \overline{\widetilde{\mathcal{A}}}$ при $C\!\ell_{p,q}$ с кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, $p - q \equiv 5 \pmod 8$.

Таким образом, имеем 6 различных классов фактор-алгебр ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$. Далее, в согласии с [17] автоморфизм $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^\star$ соответствует пространственному отражению

P, антиавтоморфизмы $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$ задают соответственно обращение времени T и полное отражение PT, а псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ соответствует зарядовому сопряжению C. Учитывая эту связь, лежащую в основе алгебраической схемы описания дискретных симметрий, а также принимая во внимание тот факт, что с каждой фактор-алгеброй ${}^\epsilon\mathbb{C}_n$ ассоциировано некоторое фактор-представление собственной группы Лоренца $SL(2;\mathbb{C})$, мы приходим к утверждению теоремы. ■

4. Фактор-представление ${}^\chi\mathfrak{D}_c^{(0,1/2)}(\sigma)$ и поле нейтрино

Анализируя фактор-представления группы Лоренца, приведенные в теореме 2, мы видим, что для описания нейтринного поля подходит только представление класса c при $j = 1/2$, допускающее полное отражение PT и зарядовое сопряжение C (четность P не определена). Действительно, первые три класса a_1, a_2 и b исключаются, поскольку j – целое. В свою очередь, каждый из классов d_1 и d_2 допускает преобразование CT, которое в согласии с CPT-теоремой, эквивалентно пространственному отражению P, являющемуся, как известно, запрещенной операцией для нейтринного поля. Итак, спину $j = 1/2$ соответствует алгебра $\mathbb{C}_3$, являющаяся простейшей алгеброй типа $n+1 \equiv 3 \pmod 4$. В согласии с теоремой 2 под действием гомоморфизма $\epsilon : \mathbb{C}_3 \to \mathbb{C}_2$ на подалгебру $\mathbb{C}_2$ переносятся антиавтоморфизм $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$ и псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$. При этом, вещественная подалгебра $C\ell_{3,0} \subset \mathbb{C}_3$ имеет комплексное кольцо $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$, $p - q \equiv 3 \pmod 8$, и, следовательно, матрица Π псевдоавтоморфизма $\mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ не является единичной, что в согласии с теоремой 1 соответствует заряженным иди нейтральным полям. Далее, в силу изоморфизма $\mathbb{C}_2 \simeq C\ell_{3,0} \simeq C\ell^+_{1,3}$ ($C\ell_{1,3}$ – алгебра пространства-времени) спинорное поле фактор-представления ${}^\chi\mathfrak{D}_c^{(0,1/2)}$ выражается через поле Дирака-Хестенса $\psi(x) \in C\ell_{3,0}$ [13]. Поскольку $\psi \in C\ell^+_{1,3}$, то действие антиавтоморфизмов $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}^\star}$ на поле $\psi(x)$ эквивалентны. С другой стороны, в согласии с интерпретацией Фейнмана-Штюкельберга обращение времени для кирального поля эквивалентно зарядовому сопряжению (обращенные во времени частицы являются античастицами). Следовательно, нейтральное спинорное поле $\psi(x) \in {}^\chi\mathfrak{D}_c^{(0,1/2)}$, описывающее нейтрино, для которого $C \sim T$, является CP-инвариантным и удовлетворяет *уравнению Вейля-Хестенса* $\partial\psi(x)\gamma_{21} = 0$. Соответственно, поле антинейтрино $\psi(x) \in {}^\chi\mathfrak{D}_c^{(1/2,0)}$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{\partial\psi(x)\gamma_{21}} = 0 \longrightarrow \Pi\partial\psi(x)\gamma_{21}\Pi^{-1} = 0.$$

Литература

1. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика.* М.: Наука, 1989.
2. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения.* М.: Физматлит, 1958.
3. Наймарк М.А. *Линейные представления группы Лоренца.* М.: Физматлит, 1958.
4. Рашевский П.К. *Теория спиноров* // Успехи мат. Наук. 1955. Т.10. №2. С.3–110.
5. Румер Ю.Б., Фет А.И. *Теория групп и квантованные поля.* М.: Наука, 1977.
6. Brauer R., Weyl H. *Spinors in n dimensions* // Amer. J. Math. 1935. V.57. P.425–449.
7. Budinich P., Trautman A., *The Spinorial Chessboard.* Springer, Berlin, 1988.
8. Buchbinder I.L., Gitman D.M., Shelepin A.L., *Discrete symmetries as automorphisms of proper Poincaré group* // preprint hep-th/0010035 (2000).
9. Dvoeglazov V.V. *Speculations on the Neutrino Theory of Light* // Annales de la Fondation de Louis de Brogle. 1999. V.24. №1–4. P.111–128.
10. Finkelstein D., Galiautdinov A. *Clifford statistics* // preprint hep–th/0005039 (2000).
11. Baugh J., Finkelstein D.R., Galiautdinov A., Saller H., *Clifford algebra as quantum language* // preprint hep–th/0009086 (2000).
12. Gitman D.M., Shelepin A.L. *Fields on the Poincare Group: Arbitrary Spin Description and Relativistic Wave Equations* // preprint hep-th/0003146 (2000); Int. J. Theor. Phys. (to appear).
13. Hestenes D. *Real spinor fields* // J. Math. Phys. 1967. V.8. P.798–808.
14. Holland P.R. *Causal interpretation of a system of the two spin–1/2 particles* // Phys. Rep. 1988. V.169. P.293–327.
15. Jordan P. Egreb. Exakt. Naturw. 1928. V.7. P.158.
16. Laport O., Uhlenbeck G.E. *Application of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations* // Phys. Rev. 1931. V.37. P.1380–1397.
17. Varlamov V.V. *Fundamental Automorphisms of Clifford Algebras and an Extension of Dąbrowski Pin Groups* // Hadronic Journal. 1999. V.22. P.497–535.
18. Varlamov V.V. *Discrete Symmetries and Clifford Algebras* // Int. J. Theor. Phys. 2001. V.40. №4. P.167–203.
19. Van der Waerden B.L. *Spinoranalyse* // Nachr. d. Ces. d. Wiss. Göttingen. 1929. P.100–109.
20. Wall C.T.C *Graded Brauer Groups* // J. reine und angew. Math. 1964. V.213. P.187–199.
21. Wigner E.P. *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group* // Ann. Math. 1939. V.40. P.149–204.
22. Wigner E.P. *Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group Including Reflections* in Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics. Ed. F. Gürsey Gordon & Breach, New York, 1964.