Математические
структуры и моделирование
2001, вып. 7, с. 79–84

УДК 535

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Р.Т. Файзуллин

New fast and effective algorithm for systems of nonlinear hydraulic like equations is developed. There are theorem of uniqueness and some conditions for convergence.

Рассмотрим задачу определения гидравлических характеристик в системе труб, например в системе труб теплоцентралей крупного города. В работах школы В.Я. Хасилева [1] разработаны и внедрены алгоритмы программ расчета гидравлики для сетей теплотрасс, водоканала и промышленных предприятий. Но следует отметить, что существуют ограничения на размерность задачи: известные алгоритмы решения стационарной задачи ограничены числом труб до 200–250. Подобные ограничения вызваны применением метода Ньютона для решения системы. Оказывается, что требуемая точность задания начального приближения очень высока, и при увеличении размерности выбор начального приближения не отличается от собственно решения в пределах, необходимых для практики.

В связи с этим обстоятельством для расчета больших сетей применяют сложные алгоритмы агрегирования, привлекая для этого целые коллективы специалистов по дискретной математике. Подготовка вариантов расчета становится трудоемкой процедурой, занимающей не один день. Несмотря на это, существующие алгоритмы отлично зарекомендовали себя в проектных задачах, когда ограничения по времени исполнения не такие жесткие.

Представляется необходимым вести разработку методов решения систем уравнений гидравлики без ограничений на число уравнений.

Рассмотрим систему уравнений относительно неизвестных значений расходов по трубам

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\
\cdots \\
a_{k1}x_1 + ... + a_{kn}x_n = 0 \\
\cdots \\
a_{(k+1)1} \mid x_1 \mid x_1 + ... + a_{(k+1)n} \mid x_n \mid x_n = H_1 \\
a_{n1} \mid x_1 \mid x_1 + ... + a_{nn} \mid x_n \mid x_n = H_{n-k}
\end{gathered} \tag{1}$$

E-mail: faizulin@univer.omsk.su
Омский государственный университет

где x_i – это расход по трубе с индексом i; коэффициент a_{ij} определяется по первому или второму закону Кирхгофа. Для первого закона, втекающий в контрольную точку поток характеризуется коэффициентом, равным единице; вытекающему потоку отвечает коэффициент равный минус единице. Для второго закона Кирхгофа и для нелинейных уравнений a_{ij} – это коэффициент сопротивления i-й трубы; H_i – это приложенные напоры. Отметим, что в общем случае $H = H(x)$, и эта функциональная зависимость достаточно хорошо аппроксимируется функцией вида $\sigma x^2 + B$ или набором подобных парабол. Данный вид правой части позволяет решать задачу с переменной правой частью всего за один раз – перенос терма σx_i^2 в левую часть модифицирует коэффициент a_{ji}.

Возникают практические вопросы, на которые необходимо ответить: существует ли решение системы уравнений при известной заранее структуре системы и заданных напорах, как получить это решение, единственное ли это решение и как соотносится полученное решение (или решения) с реализующимися на практике режимами работы напорной системы?

Следующие леммы показывают, что для достаточно общего случая решение системы (1) единственно.

Лемма 1. *Пусть x – вектор решений задачи (1). Каждая компонента x_i не равна нулю, $A(x)$ матрица системы уравнений*

$$A(x)x = f \tag{2}$$

тогда матрица $A(x)$ невырожденна.

Доказательство. Пусть существует некоторый нетривиальный вектор z, на котором достигается равенство

$$A(x)z = 0.$$

Рассмотрим произвольное слагаемое в нелинейном уравнении относительно расходов

$$\alpha_i X_i z_i.$$

Здесь мы будем обозначать через X_i модуль величины x_i. Можно записать $X_i = \beta_i^2 Z_i$. Тогда $\alpha_i X_i z_i = \alpha_i \beta_i^2 Z_i z_i$. Таким образом, можем записать

$$A(z)z = 0.$$

Данная система уравнений описывает течение в конфигурации труб при нулевом напоре, ненулевых сопротивлениях $\alpha_i \beta_i^2$ и ненулевых расходах z_i (что противоречит законам сохранения, на основании которых были выведены (и удовлетворяют) уравнения. То есть в силу выполнения закона сохранения массы и в силу конечности числа узлов, можем выбрать некий цикл, по которому течет ненулевой поток жидкости в одном направлении, но с другой стороны суммарные потери по данному циклу будут равны нулю, что противоречит положительности членов суммы стоящих в левой части уравнения.

Отметим, что положительность β_i^2 гарантирует то, что мы имеем дело с конфигурацией труб геометрически эквивалентной исходной и с коэффициентами именно сопротивления, а не «разгона». ■

Замечание 1. Ограничение на то, что все компоненты x_i должны быть ненулевыми не налагает ограничений на решение. Возможная нулевая компонента фиктивна, нулевые строка и столбец, отвечающие такой компоненте, легко элиминируются из матрицы, и самое главное состоит в том, что мы можем включить в любую сеть сколько угодно таких нулевых компонент, не влияя на решение исходной задачи.

Данная лемма гарантирует невырожденность «предельных» матриц при решении нелинейной системы методом итераций.

Лемма 2. *В условиях леммы 1 решение системы уравнений*

$$A(x)x = f$$

единственно.

Доказательство. Пусть x и y два различных решения системы. Рассмотрим разность

$$A(x)x - A(y)y = 0.$$

Для линейной части матрицы B можно сразу записать

$$B(x-y) = 0.$$

Покажем, что нелинейную часть матрицы A можно привести (аналогично предыдущей лемме) к виду

$$C_{(x-y)}(x-y) = 0.$$

Рассмотрим произвольное слагаемое в нелинейном уравнении, относящемся к нелинейной части A

$$R = \alpha_i(X_i x_i - Y_i y_i).$$

1. Пусть x_i и y_i одного знака. Тогда

$$R = \alpha_i(X_i + Y_i)(x_i - y_i) =$$
$$= \alpha_i \gamma_i^2 Z_i (x_i - y_i)$$

где Z_i – модуль величины $(x_i - y_i)$.

2. Рассмотрим случай, когда знаки у x_i и y_i различные

$$y_i = \beta_i x_i,$$
$$R = \alpha_i X_i (1 - B_i \beta_i) x_i.$$

Сомножитель $(1 - B_i\beta_i)$ положителен, а x_i имеет тот же знак, что и $x_i - y_i$. Поэтому

$$R = \alpha_i \sigma_i^2 Z_i (x_i - y_i).$$

В итоге мы приходим к системе уравнений

$$A(x-y)(x-y) = 0.$$

Если все компоненты векторов x и y различны, то это противоречит невырожденности матрицы $A(x-y)$. Если же только часть компонент векторов x и y совпадает, то мы опять получим нетривиальное течение в системе труб с измененными по величине, но не по знакам коэффициентами сопротивления при заданном нулевом напоре. ■

Замечание 1. В действительности условие неравенства нулю компонент решения должно быть усилено, т.к. сильно различающиеся по порядку величины строки системы уравнений приводят к тому, что число обусловленности промежуточных линейных систем (в итерационной процедуре) растет и решение начинает сильно зависеть от возмущений правой части и от возмущений коэффициентов сопротивления.

Другими словами, понимать формальную лемму 2 как теорему единственности решения задачи гидравлики неправомерно. Но как показали численные эксперименты различие расходов на два, а может быть и на три порядка, для различных участков гидросети вполне приемлемо с точки зрения устойчивости решения по отношению к малым возмущениям, где степень малости определяется возможными вариациями напорно-расходных характеристик насосов.

Оказывается, что единственность решения сохраняется и в более общем случае.

Теорема 1. *Решение системы*

$$A(x)x = f,$$

где нелинейность имеет вид $\mid x_i^{\nu} \mid x_i$, *единственно.*

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему и тривиально. Учитывается монотонность функции произведения модуля аргумента в произвольной степени на аргумент, что позволяет в пункте 1 опять получить выражение

$$C_{(x-y)}(x-y) = 0.$$

■

Перейдем к конструктивной части и рассмотрим метод последовательных приближений применительно к рассматриваемой системе уравнений.

Будем искать решение как предел итераций вида

$$A(aX_{i-1} + bX_{i-2})X_i = H. \tag{3}$$

Нижний индекс здесь обозначает приближенные решения полученные на i-м, $(i-1)$-м, $(i-2)$-м шагах. При вычислении коэффициентов матрицы А используются векторы приближенных решений, уже полученные на предыдущих шагах. Сумма коэффициентов $a + b = 1$.

Следует пояснить выбор данного вида итерационной процедуры.

Если начальное приближение лежит вблизи решения задачи, то заменяя произведения вида: (модуль компоненты решения) $*$ (компонента решения) на квадраты компонент с расставленными знаками, отвечающими направлению движения потока в каждой трубе, мы, казалось бы, можем применить метод Ньютона к полученной системе и довольно быстро вычислить решение сколь угодно точно.

К сожалению, как показали численные эксперименты, для систем уравнений с матрицами, размерность которых превосходит 300–400, начальное приближение должно лежать настолько близко к решению, что практическая ценность алгоритма теряется, поскольку технические требования к точности на порядки слабее, чем требования метода Ньютона.

Обратимся к простейшему виду метода последовательных приближений, к случаю, когда в (3) a выбрано равным единице:

$$A(X_{i-1})X_i = H, \tag{4}$$

и рассмотрим разность

$$A(X_{i-2})X_{i-1} - A(X_{i-1})X_i. \tag{5}$$

Обратимся к нелинейной части оператора, вернее к вкладу в компоненту разности

$$\delta^{kj} = IX_{i-2}^{kj}IX_{i-1}^{kj} - IX_{i-1}^{kj}IX_i^{kj}. \tag{6}$$

Далее мы будем опускать парный индекс kj. Представим δ в виде

$$\delta = (IX_{i-1}I + \epsilon)X_{i-1} - (IX_iI + \gamma)X_i. \tag{7}$$

Очевидно, что если приближения X_i сходятся, то δ и соответственно ϵ, γ стремятся к нулю.

Проблема заключается в том, что колебания ϵ и γ в зависимости от итераций могут быть настолько велики, что следующие друг за другом значения X_i и X_{i-1} будут иметь разные знаки. Допустим, что, все-таки, знаки приближений одинаковы. Тогда

$$\delta = (IX_{i-2}I - IX_iI)X_{i-1} \tag{8}$$

и

$$\delta = (IX_{i-1}I - IX_iI)(X_{i-1} + X_i) + \epsilon X_{i-1} + \gamma X_i,$$

что позволяет сделать вывод об ограниченности ϵ и γ разностью модулей последовательных приближений:

$$(IX_{i-2}I - IX_{i-1}I)X_{i-1} - (IX_{i-1}I - IX_iI)X_i = \epsilon X_{i-1} - \gamma X_i. \tag{9}$$

Для сравнения, в квадратичном случае, когда процедура Ньютона применяется к системе квадратных уравнений, δ можно представить как

$$\delta = (X_{i-2} - X_i)X_{i-1}, \tag{10}$$

что может привести (и, как правило, приводит) к неограниченному росту δ.

Отметим, что рассмотренный случай с $a = 1$ и есть не что иное, как метод Ньютона с половинным шагом от стандартного, и расходимость метода последовательных приближений означает, что приближения быстро выходят из области притяжения решения.

Вариации a и b, а в случае степени ν не равной единице, вариации и большего числа инерционных слагаемых, позволяют получить сходящиеся последовательности приближений к единственному решению (a и b, гарантирующие сохранение знака при итерациях). Привнесение «инерции» можно также трактовать как отстройку от точек сгущения матричного оператора, не являющихся решениями задачи.

Данные эвристические рассуждения получили полное подтверждение в результате проведения многочисленных вычислительных экспериментов и в процессе рабочей эксплуатации программ расчета тепловых сетей. Наилучшая скорость сходимости наблюдается при выборе $a = 0,7$; $b = 0,3$, а при $a = 1$ в большей части случаев отсутствует сходимость (при ограниченности нормы решения). В случае $\nu \neq 1$ обычно требуется привлечение уже трех слагаемых.

Скорость убывания ошибки обычная для метода Ньютона: за итерацию ошибка в среднем убывает на порядок.

Литература

1. Хасилев В.Я., Меренков А.П., Каганович Б.М. и др. *Методы и алгоритмы расчета тепловых сетей.* М.: Энергия, 1978. 176 с.