Математические
структуры и моделирование
2001, вып. 7, с. 104–114

УДК 530.12:531.51

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА И ВЕРОЯТНОСТЬ БОЛЬШИХ ФЛУКТУАЦИЙ ВРЕМЕНИ

М.С. Шаповалова

The 5-dimensional spacetime V^5 with foliation of codimension 1 is considered. The leaves of foliation are 4-dimensional spacetimes V^4_α. We construct the fluctuations of 5-metric such that their contribution in the Feynmann path integral over 5-dimensional trajectories is the same the contribution of the real physical spacetime. We also construct the statistical summ Z of canonical ensemble of 5-metrics determinated by the parameter γ and using Z we find the probablity of the metric with given parameter γ. Using the analogue of the formula of Einstein we evaluate the probablity of the metric fluctuations.

Введение

В данной статье рассматривается 5-мерное пространство-время V^5, на котором задано слоение коразмерности 1. Слои этого слоения определяют так называемые параллельные вселенные – 4-мерные миры V^4_1, V^4_2 и т.д. Каждый из миров имеет евклидову топологию $\mathbb{R}^4$, но конечный объем 3-мерного пространства. Строятся крупномасштабные метрические флуктуации пространства-времени V^5, зависящие только от временной переменной x^1 и определяемые функцией $h(x^1)$. Функция $h(x^1)$ подбирается из условия, чтобы флуктуации давали такой же вклад в фейнмановский интеграл по траекториям как и реальное физическое 4-мерное пространство-время.

Рассматривается канонический ансамбль 5-метрик, определяемых параметром γ, и вычисляется статистическая сумма. С помощью статистической суммы находится вероятность реализации 5-метрики с параметром γ, лежащим в заданном интервале $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ и определяется наиболее вероятное значение параметра γ. С помощью аналога формулы Эйнштейна оценивается вероятность построенных флуктуаций времени пространства-времени V^4.

1. Описание модели

Рассмотрим 5-мерное пространство-время

$$V^5 = \{(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^5 : x^1 > 1\},$$

E-mail: f61shapovalova@phys.omsu.omskreg.ru
Омский государственный университет

на котором задано слоение коразмерности 1 ([6], рис. 1, a)). Слои данного слоения задаются в плоскости (x^0, x^1) формулой

$$x^0 = \ln \frac{x^1 - 1}{\alpha}.$$

Параметр $0 < \alpha < const$ определяет 4-миры $V_1^4, V_2^4, ..., V_\alpha^4$ и т.д.

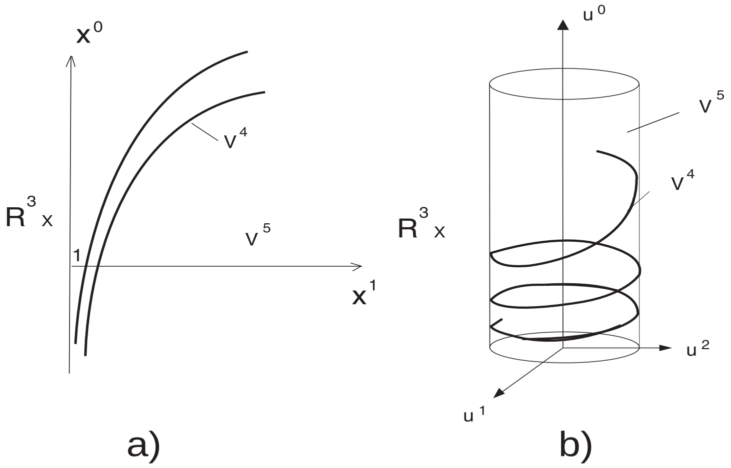

Рис. 1. Пространство-время V^5 со слоением V^4

Зададим метрику на пространстве-времени V^5 в виде

$$dI_\gamma^2 = G_{ik} dx^i dx^k =$$

$$= (x^1 - 1)^2 dx^{0^2} - \beta dx^{1^2} - \exp\left(-\frac{2r}{\gamma + 1}\right) dr^2 - d\theta^2 - \sin^2(\theta) d\phi^2, \qquad (1)$$

где β – некоторая константа, $0 < \beta < 1$; $\gamma \geqslant 0$ – параметр, имеющий любое неотрицательное значение; r, θ, ϕ – сферические координаты, связанные с координатами x^2, x^3, x^4 формулами

$$\begin{cases} x^2 = r \sin\theta \cos\phi \\ x^3 = r \sin\theta \sin\phi \\ x^4 = r \cos\theta \end{cases}$$

Для данной метрики скалярная кривизна $R = -2$. Пространство-время V^5 топологически гомеоморфно $(\mathbb{R} \times S^1) \times \mathbb{R}^3$, пространство-время V^4 топологически гомеоморфно $\mathbb{R}^4$. Объем 3-пространства есть

$$V = \int \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \left(-G_{ik} + \frac{G_{0i} G_{0k}}{G_{00}}\right)^{1/2} dr d\theta d\phi =$$

$$= \int \sin\theta \exp\left(-\frac{r}{\gamma + 1}\right) dr d\theta d\phi = 4\pi(\gamma + 1).$$

Таким образом, 3-пространство представляет собой некомпактное пространство с конечным объемом.

Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса, соответствующего данной метрике, имеют вид

$$T_{00} = \frac{1}{\kappa}(x^1-1)^2, \quad T_{11} = -\frac{\beta}{\kappa}, \quad T_{22} = -\frac{1}{\kappa}\exp\left(-\frac{2r}{\gamma+1}\right),$$

где κ – постоянная Эйнштейна, $\kappa = \frac{8\pi k}{c^4}$, k – гравитационная постоянная, c – скорость света в вакууме.

Действие Эйнштейна 5-мерного пространства-времени V^5 находится по формуле

$$S = -\frac{1}{\kappa}\int R(G)^{1/2} d^5x,$$

то есть

$$S = \frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{x_1^0}^{x_2^0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} 2\beta^{1/2}(x^1-1)\exp\left(-\frac{r}{\gamma+1}\right)\sin\theta dx^0dx^1drd\theta d\phi =$$

$$= \frac{c^3\pi(\pi-1)}{k}\beta^{1/2}(\gamma+1)(x_2^0 - x_1^0).$$

Метрика (1) определена на 5-мерном цилиндре в 6-мерном пространстве с координатами $(u^0, u^1, u^2, u^3, u^4, u^5)$

$$V^5 = \mathbb{R}^1\times S^1\times\mathbb{R}^3 = [(u^0,u^1,u^2,u^3,u^4,u^5)\in\mathbb{R}^6 : u^0>0 \;\&\; (u^1)^2+(u^2)^2=\rho^2], \quad (2)$$

где ρ – малая постоянная, радиус цилиндра (рис. 1, b)) [3], [4]. Координаты $(u^0,u^1,u^2,u^3,u^4,u^5)$ связаны с координатами (x^0,x^1,x^2,x^3,x^4) по формулам

$$\begin{cases} u^0 = x^1 - 1 \\ u^1 = \rho\cos x^0 \\ u^2 = \rho\sin x^0 \\ u^3 = x^2 \\ u^4 = x^3 \\ u^5 = x^4. \end{cases}$$

Рассмотрим пространство-время V^4 с координатами y^0, y^1, y^2, y^3, которые связаны с координатами в пространстве-времени V^5 соотношениями

$$\begin{cases} x^0 = \ln\frac{y^0-1}{\alpha} \\ x^1 = y^0 \\ x^2 = y^1 \\ x^3 = y^2 \\ x^4 = y^3. \end{cases}$$

Индуцированная метрика пространства-времени V^4 находится по формуле

$$g_{ik} = G_{lm}\frac{\partial x^l}{\partial y^i}\frac{\partial x^m}{\partial y^k}.$$

Следовательно, метрика V^4 имеет вид

$$ds^2_\alpha = g_{ik}dy^i dy^k =$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha^2} - \beta\right) dy^{0^2} - \exp\left(-\frac{2r}{\gamma+1}\right) dr^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2.$$

Сигнатура этой метрики меняется. Она лоренцева, то есть имеет вид $< + - - - >$ в физической области пространства-времени V^5, определяемой условием $\alpha < \frac{1}{\beta^{1/2}}$. Скалярная кривизна пространства-времени V^4 также, как и пространства-времени V^5, равна $R = -2$. Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса пространства-времени V^4:

$$T_{00} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \beta\right), \quad T_{11} = -\frac{1}{\kappa}\exp\left(-\frac{2r}{\gamma+1}\right).$$

В данном случае тензор энергии-импульса является физическим, так как выполняется условие

$$T_{00} > 0.$$

Действие Эйнштейна для пространства-времени V^4 есть

$$S = -\frac{c^3}{16\pi k}\int R(-g)^{1/2}d^4x =$$

$$= \frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{y_1^0}^{y_2^0}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} 2\left(\frac{1}{\alpha^2} - \beta\right)\exp\left(-\frac{r}{\gamma+1}\right)\sin\theta dy^0 dr d\theta d\phi =$$

$$= \frac{c^3}{2k}(\gamma+1)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \beta\right)(y_2^0 - y_1^0).$$

2. Построение метрических флуктуаций

Рассмотрим следующие флуктуации метрики (1)

$$d\widetilde{I}^2 = \widetilde{G}_{ik}dx^i dx^k =$$

$$= (x^1 - 1)^2 dx^{0^2} - \beta dx^{1^2} - \exp\left(-\frac{2r}{\gamma+1}\right)\epsilon^2 h^2(x^1)dr^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2.$$

Функция $\epsilon h(x^1)$ описывает флуктуации метрики, ϵ – некоторый постоянный параметр; для простоты положим пока $\epsilon = 1$. Таким образом, данные флуктуации зависят только от переменной x^1. Флуктуации имеют место в области

$$U = \{0 < x^0 < \infty, a < x^1 < b, 0 < r < \infty, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \phi < \pi\},$$

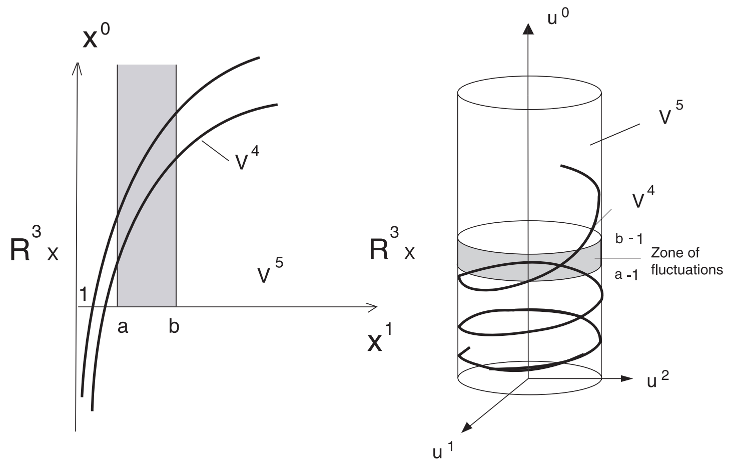

Рис. 2. Область флуктуаций

изображенной на рис.2. На границе области U метрический тензор с флуктуациями $\widetilde{G}_{ik}$ должен совпадать с метрическим тензором без флуктуаций G_{ik}, поэтому функция $h(x^1)$ должна удовлетворять граничным условиям: $h(a) = h(b) = 1$ или $h(a) = h(b) = -1$. Вне области U полагается $h(x^1) \equiv 0$.

Объем 3-пространства при данных флуктуациях

$$\widetilde{V} = \int h(x^1) \sin\theta \exp\left(-\frac{r}{\gamma+1}\right) dr d\theta d\phi = 4\pi h(x^1)(\gamma+1)$$

по-прежнему конечен, следовательно, 3-пространство представляет собой некомпактное пространство конечного объема. Однако теперь объем 3-пространства не является постоянным, а зависит от времени y^0 через функцию $h(x^1) \equiv h(y^0)$.

При флуктуациях меняется кривизна пространства-времени V^5. Скалярная кривизна теперь есть

$$\widetilde{R} = R + \Delta R = \frac{2}{\beta(x^1-1)h(x^1)}\frac{dh(x^1)}{dx^1} + \frac{2}{\beta h(x^1)}\frac{d^2h(x^1)}{dx^{1^2}} - 2$$

Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса в случае данных флуктуаций имеют вид

$$\widetilde{T}_{00} = \frac{1}{\kappa}\frac{(x^1-1)^2}{\beta h(x^1)}\left(\beta h(x^1) - \frac{d^2h(x^1)}{dx^{1^2}}\right),$$

$$\widetilde{T}_{11} = -\frac{1}{\kappa}\left(\beta - \frac{1}{(x^1-1)h(x^1)}\frac{dh(x^1)}{dx^1}\right),$$

$$\widetilde{T}_{22} = -\frac{1}{\kappa}\exp\left(-\frac{2r}{\gamma+1}\right)h^2(x^1),$$

$$\widetilde{T}_{33} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\beta h(x^1)}\frac{d^2h(x^1)}{dx^{1^2}} + \frac{1}{\beta(x^1-1)h(x^1)}\frac{dh(x^1)}{dx^1}\right),$$

$$\widetilde{T}_{44} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\beta h(x^1)}\frac{d^2h(x^1)}{dx^{1^2}} + \frac{1}{\beta(x^1-1)h(x^1)}\frac{dh(x^1)}{dx^1}\right)\sin^2\theta.$$

Действие Эйнштейна с учетом флуктуаций есть

$$\widetilde{S} = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_{x_1^0}^{x_2^0}\int\limits_a^b\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{\beta^{1/2}h(x^1)}\frac{dh(x^1)}{dx^1} + \frac{2(x^1-1)}{\beta^{1/2}h(x^1)}\frac{d^2h(x^1)}{dx^{1^2}} - \right.$$

$$\left. -2\beta^{1/2}(x^1-1)\right)h(x^1)\exp\left(-\frac{r}{\gamma+1}\right)\sin\theta dx^0dx^1drd\theta d\phi. \qquad (3)$$

Чтобы флуктуации метрики давали такой же вклад в фейнмановский интеграл по траекториям

$$\int\exp(iS/\hbar)\mathcal{D}[G^5],$$

как и реальное физическое пространство-время, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$e^{i\widetilde{S}/\hbar} = e^{iS/\hbar},$$

где $\widetilde{S}$ – действие Эйнштейна в случае флуктуаций [1,2,9]. Это выполняется при $S = 2\pi n\hbar$, где n – некоторое (большое для классического случая) натуральное число, и $\widetilde{S} = 0$.

Выполнения условия $S = 2\pi n\hbar$ легко добиться соответствующим подбором постоянной β

$$\beta = \frac{2\pi n\hbar k}{c^3\pi(\pi-1)(\gamma+1)(x_2^0-x_1^0)}.$$

Найдем условие, при котором действие Эйнштейна $\widetilde{S}$ равно нулю. Разобьем $\widetilde{S}$ на две части

$$\widetilde{S}_1 = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\frac{2}{\beta^{1/2}}\frac{dh(x^1)}{dx^1}\exp\left(-\frac{r}{\gamma+1}\right)\sin\theta d^5x \qquad (4)$$

и

$$\widetilde{S}_2 = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(\frac{2(x^1-1)}{\beta^{1/2}}\frac{d^2h(x^1)}{dx^{1^2}} - 2\beta^{1/2}h(x^1)(x^1-1)\right)\exp\left(-\frac{r}{\gamma+1}\right)\sin\theta d^5x. \qquad (5)$$

Тогда $\widetilde{S} = 0$ при $\widetilde{S}_1 = 0$ и $\widetilde{S}_2 = 0$. В нашем случае $\widetilde{S}_1 \equiv 0$, так как равен нулю интеграл по x^1 в (4). Действительно,

$$\int\limits_a^b\frac{dh(x^1)}{dx^1}dx^1 = \int\limits_{h(a)}^{h(b)}dh(x^1) = h(a) - h(b) = 0,$$

так как по условию $h(a) = h(b)$. Условие $\widetilde{S}_2 = 0$ выполняется, если

$$\frac{2(x^1-1)}{\beta^{1/2}}\frac{d^2h(x^1)}{dx^{1^2}} - 2\beta^{1/2}h(x^1)(x^1-1) = 0.$$

Функция $h(x^1)$, удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению, имеет вид

$$h(x^1) = C_1 \exp(\beta^{1/2}x^1) + C_2 \exp(-\beta^{1/2}x^1), \tag{6}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые находятся из условий $h(a) = 1$, $h(b) = 1$ или $h(a) = -1$, $h(b) = -1$. При $h(a) = 1$, $h(b) = 1$

$$C_1 = 1/(\exp((\beta)^{1/2}a) + \exp((\beta)^{1/2}b)),$$

$$C_2 = 1/(\exp(-(\beta)^{1/2}a) + \exp(-(\beta)^{1/2}b));$$

при $h(a) = -1$, $h(b) = -1$

$$C_1 = -1/(\exp((\beta)^{1/2}a) + \exp((\beta)^{1/2}b)),$$

$$C_2 = -1/(\exp(-(\beta)^{1/2}a) + \exp(-(\beta)^{1/2}b)).$$

Скалярная кривизна при данном выборе функции $h(x^1)$ есть

$$\widetilde{R} = \frac{2}{\beta^{1/2}} \frac{C_1 \exp(\beta^{1/2}x^1) - C_2 \exp(-\beta^{1/2}x^1)}{(C_1 \exp(\beta^{1/2}x^1) + C_2 \exp(-\beta^{1/2}x^1))(x^1 - 1)}.$$

Данные флуктуации 5-метрики являются также метрическими флуктуациями для 4-мерного пространства-времени V^4, при этом 4-метрика принимает вид

$$d\widetilde{s}^2_\alpha = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \beta\right) dy^{0^2} - \exp\left(-\frac{2r}{\gamma+1}\right) h^2(y^0)dr^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2.$$

Скалярная кривизна пространства-времени V^4 при данных флуктуациях есть

$$\widetilde{R} = R + \Delta R = \frac{2}{\alpha^2\beta - 1}.$$

Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса имееют вид

$$\widetilde{T}_{00} = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \beta\right),$$

$$\widetilde{T}_{11} = -\frac{1}{\kappa}\exp\left(-\frac{2r}{\gamma+1}\right)(C_1 \exp(\beta^{1/2}x^1) + C_2 \exp(-\beta^{1/2}x^1))^2,$$

$$\widetilde{T}_{22} = -\frac{1}{\kappa}\frac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2\beta - 1}, \widetilde{T}_{33} = -\frac{1}{\kappa}\frac{2\alpha^2\beta}{\alpha^2\beta - 1}\sin^2\theta.$$

Очевидно, тензор энергии-импульса по-прежнему является физическим.

Действие Эйнштейна для пространства-времени V^4 с учетом данных флуктуаций

$$\widetilde{S} = -\frac{c^3}{16\pi k}\int \widetilde{R}(-\widetilde{g})^{1/2}d^4x =$$

$$= \frac{c^3}{16\pi k}\int\limits_a^b\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{(\alpha^2\beta-1)}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\beta\right)^{1/2}h(y^0)\exp(-\frac{r}{\gamma+1})\sin\theta dy^0 dr d\theta d\phi =$$

$$= \frac{c^3(\gamma+1)}{2k\alpha(\alpha^2\beta^2-\beta)^{1/2}}(C_1(\exp(\beta^{1/2}b)-\exp(\beta^{1/2}a))-C_1(\exp(-\beta^{1/2}b)-\exp(-\beta^{1/2}a)))$$

и, таким образом, в отличие от действия для 5-мерного пространства-времени, не рано нулю.

3. Построение статистической суммы

Рассмотрим метрику (1) как одномерное минисуперпространтсво метрик, параметризованное величиной γ. Амплитуда вероятности перехода от метрики $dI^2_{\gamma_1}$ в момент x^0_1 к метрике $dI^2_{\gamma_2}$ в момент x^0_2 определяется по формуле

$$< dI^2_{\gamma_2}, x^0_2 | dI^2_{\gamma_1}, x^0_2 >= \int \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)d\gamma, \qquad (7)$$

где интеграл берется по всем γ, при которых метрика принимает значение $dI^2_{\gamma_1}$ в момент x^0_1 и значение $dI^2_{\gamma_2}$ в момент x^0_2. Но

$$< dI^2_{\gamma_2}, x^0_2 | dI^2_{\gamma_1}, x^0_2 >=< dI^2_{\gamma_2}|\exp\left(-iH(x^0_2-x^0_1)\right)|dI^2_{\gamma_1} >, \qquad (8)$$

где H – гамильтониан.

Следуя [7], перейдем в исходной метрике (1) к мнимому времени τ по формуле

$$x^0 = -i\beta^{1/2}\tau$$

и сделаем замену $\bar{x}^1 = \beta^{1/2}(x^1-1)$. Тогда метрика принимает вид

$$dI^2_\gamma = -[(\bar{x}^{1^2}d\tau^2 + d\bar{x}^{1^2}] - \exp\left(-\frac{2r}{\gamma+1}\right)dr^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2.$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой плоскую метрику двумерной плоскости в полярных координатах, в которой $\bar{x}^1$ играет роль полярного радиуса, τ – роль полярного угла. "Угол" τ имеет период 2π. Положим в выражении (8) $\gamma_1 = \gamma_2$ и просуммируем по всем γ_1. В результате получим

$$\mathbf{Sp}\ [\exp(-\beta^{1/2}H(\tau_2-\tau_1))] = \int \exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right)d\gamma. \qquad (9)$$

Левая часть этого равенства представляет собой статистическую сумму Z канонического ансамбля, описывающего метрику I^2_γ. Из сравнения с аналогичной формулой в термодинамике находим, что роль температуры T в нашем случае играет величина $T = 1/(\beta^{1/2}(\tau_2-\tau_1))$. Интегрируя (9) по γ, имеем

$$Z = \int\limits_0^\infty exp(-\sigma(\gamma+1))d\gamma = \frac{\exp(-\sigma)}{\sigma},$$

где

$$\sigma = \frac{\beta^{1/2} c^3 \pi(\pi - 1)}{k\hbar}(x_2^0 - x_1^0) = 2,7 \cdot 10^{70} \beta^{1/2}(x_2^0 - x_1^0).$$

Тогда вероятность метрики с параметром γ, лежащим в интервале $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, находится по формуле

$$\mathbf{P}(\gamma) = \frac{1}{Z}\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} exp(-\sigma(\gamma+1))d\gamma = \sigma\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \exp(-\sigma\gamma)d\gamma = e^{-\sigma\gamma_1} - e^{-\sigma\gamma_2}.$$

Например, при $x_1^0 = 2, x_2^0 = 3, \beta = 0,0001$ данная вероятность заметно отлична от нуля только для очень маленьких значений γ_1; при $\gamma_1 = 10^{-68}, \gamma_2 = 2 \cdot 10^{-68}$, $P = 0,065$; при $\gamma_1 = 10^{-68}, \gamma_2 = 200$, $P = 0,07$.

4. Оценка вероятности флуктуаций

Вероятность рассмотренных флуктуаций можно оценить с помощью аналога формулы Эйнштейна [8, с.224-225]

$$W = e^{\mathcal{S}' - \mathcal{S}},$$

где $\mathcal{S}'$ – энтропия системы с флуктуациями и $\mathcal{S}$ – энтропия равновесного состояния. Причем энтропия канонического ансамбля 5-метрик вычисляется по формуле

$$\mathcal{S} = -\int f(\gamma)\ln f(\gamma)d\gamma,$$

где

$$f(\gamma) = \exp\left(-\frac{\widehat{S}}{\hbar}\right)$$

– функция распределения по состояниям γ, а $\widehat{S}$ – действие Эйнштейна, в котором сделана замена $x^0 = -i\beta^{1/2}\tau$.

В 5-мерном случае действие Эйнштейна, с учетом данных флуктуаций, $\widetilde{S} = 0$, поэтому энтропия системы в этом случае также равна нулю. Тогда для вероятности флуктуаций имеем

$$W = \exp(-\mathcal{S}) =$$

$$= \exp\left(-\int\limits_0^\infty \sigma(\gamma+1)e^{-\sigma(\gamma+1)}d\gamma\right) = \exp\left(-\Big(\frac{1}{\sigma}+1\Big)e^{-\sigma}\right).$$

При этом в σ надо положить $x_1^0 = a, x_2^0 = b$. Если взять $\beta = 0,0001, b = 3, a = 2$, то $\sigma = 2,7 \cdot 10^{68}$. Тогда энтропия системы очень мала, и вероятность флуктуаций очень близка к единице.

В 4-мерном случае действие Эйнштейна с учетом флуктуаций не равно нулю, и для вероятности флуктуаций имеем

$$W = \exp(\mathcal{S}' - \mathcal{S}) = \exp\left[\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\widetilde{S}}{\hbar}\right)\frac{\widetilde{S}}{\hbar}d\gamma - \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{S}{\hbar}\right)\frac{S}{\hbar}d\gamma\right] =$$

$$= \exp\left[\left(\frac{1}{\sigma_1}+1\right)e^{-\sigma_1} - \left(\frac{1}{\sigma_2}+1\right)e^{-\sigma_2}\right],$$

где

$$\sigma_1 = \frac{c^3}{2k\alpha(\alpha^2\beta^2-\beta)^{1/2}}(C_1(\exp(\beta^{1/2}b) - \exp(\beta^{1/2}a)) - C_1(\exp(-\beta^{1/2}b) - \exp(-\beta^{1/2}a))),$$

$$\sigma_2 = \frac{c^3}{2k}(\gamma+1)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\beta\right)(b-a).$$

Вычисляя σ_1, σ_2 при $a = 2, b = 3, \alpha = 2, \beta = 0,0001$, мы находим, что σ_1 почти в точности равно σ_2, и $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx 5 \cdot 10^{68}$. Следовательно, энтропия системы с флуктуациями почти в точности равна энтропии системы без флуктуаций, и вероятность флуктуаций очень близка к единице.

5. Заключение

В работе построены метрические флуктуации, зависящие только от времени и не зависящие от пространственных координат. Таким образом, данные флуктуации происходят спонтанно во всем 3-пространстве одновременно (по абсолютному времени). Момент, когда происходит флуктуация метрики не может быть предсказан ни внутри 4-мерного пространства-времени V^4, ни внутри 5-мерного пространства-времени V^5. При данных флуктуациях объем 3-пространства перестает быть постоянным и меняется со временем, но сигнатура пространства-времени V^4 остается неизменной, в отличии от флуктуаций, изученных в [3,4].

Найдена статистическая сумма для канонического ансамбля 5-метрик, определяемых параметром γ. С помощью статистической суммы оценена вероятность реализации 5-метрики с параметром γ, лежащим в интервале $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. Оказалось, данная вероятность существенно отлична от нуля только для очень маленьких значений параметра $\gamma = 10^{-68}$. Тогда в метрике (1) можно пренебречь γ по сравнению с единицей. Следовательно, наиболее вероятной является метрика вида

$$dI^2 = (x^1-1)^2 dx^{0^2} - \beta dx^{1^2} - e^{-2r}dr^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2,$$

где положено $\gamma = 0$.

С помощью аналога формулы Эйнштейна оценена вероятность флуктуаций для 5-мерного и для 4-мерного пространства-времени. Установлено, что в обоих случаях эти вероятности очень близки к единице.

Литература

1. Modanese G. *Large "Dipolar"Vacuum Fluctuations in quantum gravity.* Los Alamos Paper gr-qc/0005009 (2000).
2. Modanese G. *Virtual dipoles and large fluctuations in quantum gravity* // Phys. Letters. B 460. 276 (1999).
3. Шаповалова М.С. *Флуктуации гравитационного поля Вселенной в теории Калуцы-Клейна* // Тезисы докладов научной студенческой конференции ОмГУ. Омск: ОмГУ. 2000. С.20–21.
4. Гуц А.К., Шаповалова М.С. *Квантовые флуктуации времени* // Программа и тезисы докладов Второй международной школы-семинара «Проблемы теоретической космологии». Ульяновск, 2000. С.29–31.
5. Guts A.K., Shapovalova M.S. *Large fluctuations of time and change of space-time signature.* Los Alamos E-print Paper: gr-qc/0001076 (2000). http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0012106
6. Тамура И. *Топология слоений.* Москва, 1979.
7. Хокинг С.В., Гиббонс С.В. *Интегралы действия и статистические суммы в квантовой гравитации* / Черные дыры. М.: Мир, 1978.
8. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. *Термодинамика, статистическая физика и кинетика.* М.: Наука, 1972.
9. Уилер Дж.А. *Предвидение Эйнштейна.* М.: Мир, 1970.