Математические структуры и моделирование
2000, вып. 6, с. 36–42

УДК 519.62

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНСЛОЕМ

А.И. Задорин

Second order ordinary differential equation with a power boundary layer is considered. Suppose, that coefficient before first derivative may change a sign. The difference scheme with the property of the uniform in a small parameter convergence on any uniform mesh is constructed.

В работе рассматривается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, решение которой содержит особенность в виде степенного пограничного слоя. В [1]- [2] равномерная сходимость разностных схем для такой задачи достигается специальным сгущением сетки в пограничном слое. В данной работе равномерно сходящаяся разностная схема строится на произвольной равномерной сетке. Для построения равномерно сходящейся схемы на каждом сеточном интервале коэффициенты дифференциального уравнения заменяются на постоянные, выписывается точное решение полученной задачи, согласование производных на границе соседних сеточных интервалов приводит к разностной схеме. Доказано, что таким образом построенная разностная схема сходится равномерно по малому параметру. В случае задачи с экспоненциальным пограничным слоем такой подход применялся нами, например, в [3].

Определим норму непрерывной функции $p(x)$: $||p|| = \max\limits_{x\in[0,1]} |p(x)|$ и норму сеточной функции p^h : $||p^h|| = \max\limits_{i} |p_i^h|$. Всюду ниже под C и C_i будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и шагов разностной сетки.

1. Анализ дифференциальной задачи

Рассмотрим исходную краевую задачу:

$$T_\varepsilon u = (\varepsilon + x)u'' + a(x)u' - f(x,u) = 0,\ u(0) = A,\ u(1) = B. \qquad (1)$$

Предполагаем, что функции a, f непрерывно дифференцируемы по своим аргументам,

$$\varepsilon > 0,\ a(0) > 0,\ \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0.$$

Получим оценку устойчивости для оператора задачи (1).

E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru
Омский государственный университет

Лемма 1. *Пусть $p(x)$ и $q(x)$ - две произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Тогда для некоторой постоянной C справедлива оценка:*

$$||p(x) - q(x)|| \leq C||T_\varepsilon p - T_\varepsilon q|| + |p(0) - q(0)| + |p(1) - q(1)|.$$

Доказательство. Пусть $z(x) = p(x) - q(x)$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$Lz = (\varepsilon + x)z'' + a(x)z' - c(x)z = g(x),$$

$$z(0) = p(0) - q(0),\ z(1) = p(1) - q(1), \tag{2}$$

где

$$c(x) = [f(x,p) - f(x,q)]/(p - q),\ c(x) \geq 0, \quad g(x) = T_\varepsilon p(x) - T_\varepsilon q(x).$$

Для заданного $\alpha:\ 0 < \alpha < a(0)$ найдется $\delta > 0$, не зависимое от ε такое, что при всех $x \leq \delta \quad a(x) \geq \alpha$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha < 1$. В силу непрерывности $a(x)$ для некоторого $\beta > 0 \quad a(x) \geq -\beta$. Нетрудно показать, что

$$L\phi(x) \leq -(\beta + 2)x^{\beta+1}, \quad \phi(x) = 1 - x^{\beta+2}. \tag{3}$$

Определим

$$V(x) = \begin{cases} M + \alpha^{-1}(1 - x), & \text{если} \quad x \leq \delta, \\ M + \alpha^{-1}(1 - \delta) + M\phi(x) - M\phi(\delta), & \text{если} \quad x > \delta, \end{cases}$$

где

$$M = \alpha^{-1}(\beta + 2)^{-1}\delta^{-\beta-1}.$$

Нетрудно убедиться, что при таком задании M функция $V(x)$ является непрерывно дифференцируемой на интервале $[0, 1]$, $\quad LV(x) \leq -1$.

Определим

$$\Psi(x) = ||T_\varepsilon p - T_\varepsilon q||V(x) + |z(0)| + |z(1)| \pm z(x).$$

Тогда выполнятся условия:

$$\Psi(0) \geq 0, \quad \Psi(1) \geq 0, \quad L\Psi(x) \leq 0, \quad 0 < x < 1. \tag{4}$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму. ■

Из леммы 1 следует единственность и равномерная по ε ограниченность решения задачи (1).

2. Построение разностной схемы

Введем равномерную сетку Ω:

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h,\ n = 1, \ldots, N;\ x_0 = 0,\ x_N = 1, \quad \Delta_n = (x_{n-1}, x_n]\}$$

Для построения разностной схемы перейдем от (1) к уравнению с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$(\varepsilon + x)\tilde{u}'' + \tilde{a}(x)\tilde{u}' - \tilde{f}(x,\tilde{u}) = 0,\ \tilde{u}(0) = A,\ \tilde{u}(1) = B, \tag{5}$$

где при $x \in \Delta_n$

$$\tilde{a}(x) = a(x_n),\quad \tilde{f}(x,\tilde{u}(x)) = f(x_n,\tilde{u}(x_n)).$$

Для заданного n будем отдельно рассматривать случаи $a(x_n) = 1,\ a(x_n) = 0$, так как эти случаи влияют на вид решения уравнения (5) на интервале Δ_n.

Пусть для заданного n

$$a(x_n) \neq 1,\ a(x_n) \neq 0,\ a(x_{n+1}) \neq 1,\ a(x_{n+1}) \neq 0.$$

Для задачи (5) на интервале Δ_n выпишем точное решение:

$$\tilde{u}(x) = \gamma_1^{(n)} \left(1 + \frac{x}{\varepsilon}\right)^{1-a_n} + \gamma_2^{(n)} + \frac{f_n}{a_n}x,\quad a_n = a(x_n),\ f_n = f(x_n, u_n^h),$$

где u_n^h – решение задачи (5) в узле x_n. Учитывая, что $\tilde{u}(x_{n-1}) = u_{n-1}^h,\ \tilde{u}(x_n) = u_n^h$, найдем значение $\gamma_1^{(n)}$:

$$\gamma_1^{(n)} = \left[u_n^h - u_{n-1}^h - \frac{f_n}{a_n}h\right]\left[\left(1 + \frac{x_n}{\varepsilon}\right)^{1-a_n} - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{\varepsilon}\right)^{1-a_n}\right]^{-1}.$$

Выпишем соотношение, соответствующее непрерывности первых производных решения задачи (5) в точке x_n:

$$\lim_{x \to x_n - 0} \tilde{u}'(x) \ = \lim_{x \to x_n + 0} \tilde{u}'(x).$$

Учтем вид решения задачи (5) на интервалах Δ_n и Δ_{n+1} и получим трехточечное разностное соотношение:

$$L_n^h u^h = \frac{(u_n^h - u_{n-1}^h - f_n a_n^{-1} h)(1 - a_n)}{(1 + x_n\varepsilon^{-1})^{a_n}\left[(1 + x_n\varepsilon^{-1})^{1-a_n} - (1 + x_{n-1}\varepsilon^{-1})^{1-a_n}\right]} -$$

$$- \frac{(u_{n+1}^h - u_n^h - f_{n+1}a_{n+1}^{-1}h)(1 - a_{n+1})}{(1 + x_n\varepsilon^{-1})^{a_{n+1}}\left[(1 + x_{n+1}\varepsilon^{-1})^{1-a_n} - (1 + x_n\varepsilon^{-1})^{1-a_n}\right]} = \left(\frac{f_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{f_n}{a_n}\right)\varepsilon. \tag{6}$$

Рассмотрим случай $a(x_n) = 1$. В этом случае решение задачи (5) на интервале Δ_n имеет вид:

$$\tilde{u}(x) = \gamma_1^{(n)} \ln(\varepsilon + x) + \gamma_2^{(n)} + f_n x.$$

Вид разностного соотношения для узла x_n зависит от значения $a(x_{n+1})$. В случае $a(x_{n+1}) = 1$ это соотношение принимает вид:

$$\frac{u_{n+1}^h - u_n^h}{\ln[(\varepsilon + x_{n+1})/(\varepsilon + x_n)]} - \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{\ln[(\varepsilon + x_n)/(\varepsilon + x_{n-1})]} = (f_n - f_{n+1})(\varepsilon + x_n). \tag{7}$$

Рассмотрим случай $a(x_n) = 0$. В этом случае при $x \in \Delta_n$

$$\tilde{u}(x) = u_n^h - f_n[\theta(\varepsilon + x_n) - \theta(\varepsilon + x)] + \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h}(x - x_n) +$$

$$+\frac{f_n}{h}[\theta(\varepsilon + x_n) - \theta(\varepsilon + x_{n-1})](x_n - x), \quad \theta(x) = x\ln(x).$$

Разностное соотношение в узле x_n зависит от того, $a_{n+1} = 0$ или нет. Предположим, что $a_{n+1} = 0$. Условие непрерывности производной в узле x_n приводит к разностному соотношению:

$$u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h = h(f_n - f_{n+1})\theta'(\varepsilon + x_n) +$$

$$+f_{n+1}[\theta(\varepsilon + x_{n+1}) - \theta(\varepsilon + x_n)] - f_n[\theta(\varepsilon + x_n) - \theta(\varepsilon + x_{n-1})]. \tag{8}$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены случаи

$$a_n = 0,\ a_{n+1} \neq 0;\ a_n \neq 0,\ a_{n+1} = 0;\ a_n = 1,\ a_{n+1} \neq 1;\ a_n \neq 1,\ a_{n+1} = 1.$$

В случае, когда при всех n $a(x_n) \neq 0$, $a(x_n) \neq 1$, разностную схему для задачи (1) можно записать в виде:

$$L_n^h u^h = \left(\frac{f_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{f_n}{a_n}\right)\varepsilon, \quad u_0^h = A, \quad u_N^h = B,$$

$$a_n = a(x_n),\ f_n = f(x_n, u_n^h),\ n = 1, 2, ..., N-1. \tag{9}$$

Предполагаем, что в случае условий $a(x_n) = 0$, $a(x_n) = 1$ разностная схема (9) дополняется соотношениями вида (7),(8), что не влияет на обоснование равномерной сходимости.

Теорема 1. *Пусть u^h – решение схемы (9). Для некоторой постоянной C при всех n*

$$|u_n^h - u(x_n)| \le Ch|\ln h|.$$

Доказательство. Согласно построению схема (9) является точной на решении задачи (5), поэтому достаточно оценить $z = u - \tilde{u}$. Нетрудно убедиться, что $z(x)$ является решением краевой задачи:

$$Lz = (\varepsilon + x)z'' + \tilde{a}z' - G(x, u, \tilde{u})z = F(x, u, \tilde{u}), \quad z(0) = 0,\ z(1) = 0, \tag{10}$$

где при $x \in \Delta_n$

$$G(x, u, \tilde{u}) = [f(x, u_{n+1}) - f(x, \tilde{u}_{n+1})]/(u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}) \ge 0,$$

$$F(x, u, \tilde{u}) = (\tilde{a} - a)u'(x) + f(x, u) - \tilde{f}(x, u) - G(x, u, \tilde{u})(u - u_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}),$$

где $u = u(x)$, $u_n = u(x_n)$, $\tilde{u}_n = \tilde{u}(x_n)$. Докажем, что справедлива оценка:

$$|u'(x)| \le \frac{C}{\varepsilon + x}. \tag{11}$$

В соответствии с теоремой о среднем значении $u(1) - u(0) = u'(s), \;\; 0 < s < 1$. Интегрируя уравнение (1) от s до x и применяя формулу интегрирования по частям, получим оценку (11). Оценка (11) показывает, что в малой полуокрестности нуля производная решения по модулю может быть велика, порядка ε^{-1}, при возрастании x модуль производной решения убывает по степенной зависимости, что говорит о наличии в решении степенного пограничного слоя.

Учитывая (11), нетрудно показать, что при всех $x \in (0,1)$

$$|Lz(x)| \le \frac{C_0 h}{\varepsilon + x}. \tag{12}$$

Определим барьерную функцию:

$$V(x) = \begin{cases} -\ln(\varepsilon + \alpha x/2), & \text{если} \;\; x \le \delta, \\ -\ln(\varepsilon + \alpha\delta/2) + M\phi(x) - M\phi(\delta), & \text{если} \;\; x > \delta, \end{cases}$$

где

$$M = \alpha(2\varepsilon + \alpha\delta)^{-1}(\beta + 2)^{-1}\delta^{-\beta-1}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $V(x)$ является непрерывно дифференцируемой на интервале $[0,1]$. Можно показать, что при $x \le \delta$

$$LP(x) \le -\frac{\alpha}{2(\varepsilon + x)}, \quad P(x) = -\ln\left(\varepsilon + \frac{\alpha x}{2}\right). \tag{13}$$

Определим функцию

$$\Psi(x) = C_1\{C_2 + V(x)\}h \pm z(x).$$

Учитывая оценки (3),(12), (13), получим, что для некоторых постоянных C_1, C_2 выполнятся условия (4). Тогда в силу принципа максимума при всех x $\Psi(x) \ge 0$. Итак, при всех $x \in [0,1]$

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \le C_1 \left[C_2 - \ln\left(\varepsilon + \frac{\alpha x}{2}\right)\right] h + Ch.$$

Учитывая, что схема (9) является точной на функции $\tilde{u}(x)$, придем к утверждению теоремы. ■

Теорема 2. *Пусть $a(0) > 1$. Тогда для схемы (9) справедлива оценка точности:*

$$|u_n^h - u(x_n)| \le Ch, \;\; n = 0, 1, ..., N.$$

Доказательство. В силу непрерывности $a(x)$ найдется $\delta > 0$, такое, что $a(x) \ge \alpha > 1$ при всех $x \le \delta$. Докажем, что

$$|u'(x)| \le C_0 + C_0 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + x}\right)^{\alpha - 1} \frac{1}{\varepsilon + x}. \tag{14}$$

В случаях $x \geq \delta$ или $\varepsilon \geq \delta$ эта оценка следует из оценки (11). Рассмотрим случай $x < \delta$, $\varepsilon < \delta$. Представим уравнение (1) в виде:

$$\left(u'(x)\exp\left\{\int\limits_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon+s}ds\right\}\right)' = \frac{f(x,u)}{\varepsilon+x}\exp\left\{\int\limits_0^x \frac{a(s)}{\varepsilon+s}ds\right\}. \qquad (15)$$

По теореме Лагранжа для некоторого $\eta < \varepsilon$ $u(\varepsilon)-u(0) = u'(\eta)\varepsilon$. Следовательно, $|u'(\eta)| \leq C/\varepsilon$. Интегрируя уравнение (15) от 0 до η, получим $|u'(0)| \leq C/\varepsilon$. Интегрируя (15) от 0 до x, получим требуемую оценку (14).

Оценим правую часть в уравнении (10). Оценим сначала $|f(x,u)-\tilde{f}(x,u)|$. Пусть $x \in \Delta_n$ Тогда

$$|f(x,u(x))-\tilde{f}(x,u(x))| = |f(x,u(x)) - f(x_{n+1},u(x_{n+1}))| \leq$$

$$\leq C_0h + C_0\int\limits_x^{x_{n+1}}|u'(s)|ds \leq C_0h + C_0\int\limits_x^{x_{n+1}}\left[C_0 + C_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+s}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon+s}\right]ds \leq$$

$$\leq C_0h + C_0h\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+x}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon+x}.$$

Оценивая аналогичным образом остальные слагаемые в функции F, получим:

$$|Lz(x)| \leq C_0h + C_0h\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+x}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon+x}. \qquad (16)$$

Определим барьерную функцию:

$$V(x) = \begin{cases} (\varepsilon/(\varepsilon+x))^{\alpha-1}, & \text{если } x \leq \delta, \\ (\varepsilon/(\varepsilon+\delta))^{\alpha-1} + M\phi(x) - M\phi(\delta), & \text{если } x > \delta, \end{cases}$$

где

$$M = (\alpha-1)\frac{1}{\varepsilon+\delta}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}\right)^{\alpha-1}(\beta+2)^{-1}\delta^{-\beta-1}.$$

При таком задании M функция $V(x)$ является непрерывно дифференцируемой на интервале $[0,1]$. Нетрудно показать, что при $x \leq \delta$ для некоторой постоянной C_1

$$LP(x) \leq -\frac{C_1}{\varepsilon+x}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+x}\right)^{\alpha-1}, \quad P(x) = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+x}\right)^{\alpha-1}. \qquad (17)$$

Определим функцию

$$\Psi(x) = C_2\{C_3 + V(x)\}h \pm z(x).$$

Учитывая оценки (3),(16), (17), получим, что при некоторых постоянных C_2, C_3 выполнятся условия (4). В силу принципа максимума при всех $x \in [0,1]$ $\Psi(x) \geq 0$. Итак, $|u(x)-\tilde{u}(x)| \leq Ch$. Учитывая, что схема (9) является точной на функции $\tilde{u}(x)$, придем к утверждению теоремы. ■

Таким образом, краевая задача (1) для нелинейного дифференциального уравнения сведена к нелинейной системе алгебраических уравнений (9). Методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений исследовались, например, в [4].

Рассмотрим случай линейной задачи (1), когда $f(x,u) = c(x)u + g(x)$. Разностная схема (9) в этом случае принимает вид:

$$Q_n u^h_{n-1} - \left[Q_n + R_n + \frac{c_n}{a_n}h - \frac{c_n}{a_n}Q_n h\right] u^h_n + \left[R_n + \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}}h - \frac{c_{n+1}}{a_{n+1}}R_n h\right] u^h_{n+1} =$$

$$= \frac{g_n}{a_n}(1-Q_n)h + \frac{g_{n+1}}{a_{n+1}}(R_n - 1)h, \qquad (18)$$

где

$$Q_n = \frac{h}{\varepsilon}\left(1+\frac{x_n}{\varepsilon}\right)^{-a_n}\left[\left(1+\frac{x_n}{\varepsilon}\right)^{1-a_n} - \left(1+\frac{x_{n-1}}{\varepsilon}\right)^{1-a_n}\right]^{-1}(1-a_n),$$

$$R_n = \frac{h}{\varepsilon}\left(1+\frac{x_n}{\varepsilon}\right)^{-a_{n+1}}\left[\left(1+\frac{x_{n+1}}{\varepsilon}\right)^{1-a_{n+1}} - \left(1+\frac{x_n}{\varepsilon}\right)^{1-a_{n+1}}\right]^{-1}(1-a_{n+1}).$$

Покажем, что схема (18) монотонна при $h \le h_0, \quad h_0 = 2\min_n a_n/c_n$. Используя теорему о среднем значении, нетрудно показать, что

$$Q_n = \left(\frac{\varepsilon+\xi_n}{\varepsilon+x_n}\right)^{a_n}, \ \xi_n \in (x_{n-1}, x_n), \quad R_n = \left(\frac{\varepsilon+\xi_{n+1}}{\varepsilon+x_n}\right)^{a_{n+1}}, \ \xi_{n+1} \in (x_n, x_{n+1}).$$

Из этих соотношений следует, что

$$0 < Q_n < 1, \quad 1 < R_n < 2.$$

Теперь нетрудно убедиться в монотонности схемы (18) при $h \le h_0$. Следовательно, метод прогонки [5] , используемый для нахождения решения схемы (18), устойчив.

Литература

1. Лисейкин В.Д. *О численном решении уравнений со степенным погранслоем* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1986. Т.26. №12. С.1813–1820.
2. Vulanovic R. *On numerical solution of a power layer problem* // Numerical methods and approximation theory 111. Nis. August. 1987.
3. Задорин А.И. *Численное решение краевой задачи для системы уравнений с малым параметром* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т.38. №8. С.1255–1265.
4. Ортега Д., Рейнболдт В. *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.* М.: Мир, 1975.
5. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989.