Математические структуры и моделирование
2000, вып. 6, с. 50–54

УДК 517.587

О ЧЕБЫШЕВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

С.Д. Симонженков

Polynomial Chebyshev approximation have been computed for the functions

$$F(x) = \int_0^x t^{-1} f(t)\, dt,\ \ f(t) = \operatorname{arsh} t \ \text{ or } \ \arcsin t.$$

Во многих вычислительных задачах возникает необходимость в нахождении коэффициентов Чебышева функции $\int x^{-1} f(x)\, dx$ по известному разложению в ряд Чебышева функции $f(x)$. Соответствующая методика известна (см., например, [1], теоремы 9.4 и 9.6), получены конкретные разложения для ряда функций, например, $f(x) = \ln(1+x), \sin x, \dots$. Автору приходилось использовать функции

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arsh} t}{t}\, dt, \quad G(x) = \int_0^x \frac{\arcsin t}{t}\, dt.$$

Их разложения в имеющейся литературе не было найдено, что и послужило поводом для данной статьи. В ней даются коэффициенты разложений указанных функций:

$$F(x) = \sum_{n \ge 0} a_n^{(1)} T_{2n+1}(x), \quad |x| \le 1, \tag{1}$$

$$F(x) = \sum_{n \ge 0} a_n^{(2)}\, T_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) + c + \frac{1}{2} \ln x \ln(4x), \quad x \ge 1, \tag{2}$$

$$G(x) = \sum_{n \ge 0} a_n T_{2n+1}\left(\frac{2}{\pi} \arcsin x\right), \quad |x| \le 1, \tag{3}$$

где

$$c = F(1) = \sum_{k \ge 0} \binom{-1/2}{k} (1+2k)^{-2} = 0.9552018064\dots .$$

n	$a_n^{(1)}$	$a_n^{(2)}$	a_n
0	0.96530568	0.05184924	1.21651767
1	-0.01058987	-0.05361909	-0.12384640
2	0.00052213	0.00188557	-0.00368756
3	-0.00003945	-0.00012566	-0.00018014
4	0.00000367	0.00001093	-0.00000997
5	-0.00000038	-0.00000110	-0.00000058
6	0.00000004	0.00000012	-0.00000004
7	-0.00000001	-0.00000001	

Омский государственный педагогический университет

Эти коэффициенты получены на основе равенств

$$\operatorname{arsh} t = t\sum_{n\geq 0} b_n T_{2n}(t), \quad |t|\leq 1, \tag{4}$$

$$\operatorname{arsh} t = \ln 2t + \sum_{n\geq 0} c_n T_{2n}\left(\frac{1}{t}\right), \quad t\geq 1, \tag{5}$$

$$t\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\,t = \sum_{n\geq 0} d_n T_{2n}(t), \quad |t|\leq 1, \tag{6}$$

в которых коэффициенты брались из таблиц 3.7 и 3.11 справочника [2]. Разложения (1),(2) получены соответственно из (4),(5) делением на t с последующим почленным интегрированием. Так как

$$G(x) = \int_0^{\arcsin x} y\operatorname{ctg} y\,dy = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{2}{\pi}\arcsin x} t\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\,t\,dt,$$

то (3) получается из (6) также почленным интегрированием. Окажется, что

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{4n+2}\,(e_n b_n - b_{n+1}),\ n\geq 0;$$

$$\begin{cases} a_n^{(2)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{2}\,c_n - c_{n-1} + \ldots + (-1)^n c_0\right),\ n\neq 0; \\ a_0^{(2)} = \dfrac{1}{2}\,c_1 u_1 - c_2 u_2 + c_3 u_3 - \ldots; \end{cases} \tag{7}$$

$$a_n = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{1}{4n+2}\,(e_n d_n - d_{n+1}),\ n\geq 0,$$

где

$$e_n = 1\,(n\neq 0),\ \ e_0 = 2;$$

$$u_1 = 1,\ \ u_k = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k-1} + \frac{(-1)^{k+1}}{2k} \quad (k>1).$$

По этим формулам и находились коэффициенты в указанной выше таблице.

Докажем, например, формулы (7). Будет существенно использовано равенство

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n c_n = 0, \tag{8}$$

являющееся следствием (5), и тот факт, что при $n>0$

$$\frac{1}{t}\,[T_{2n}(t) - T_{2n}(0)] = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\,T_{2n-2k+1}(t). \tag{9}$$

Для $x\geq 1$ имеем

$$F(x) = \int_0^1 + \int_1^x = c + \int_1^x \frac{\ln 2t}{t}\,dt + \sum_{n\geq 0} c_n\int_1^x \frac{1}{t}\,T_{2n}(t)\,dt.$$

Вычисляя здесь первый интеграл непосредственно и заменяя t на $1/t$ во втором (под знаком суммы), получим

$$F(x) = c + \frac{1}{2}\ln^2 2t\Big|_1^x + \sum_{n\geq 0} c_n \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{1}{t}\, T_{2n}(t)\, dt.$$

Обозначим через S сумму фигурирующего здесь ряда. Тогда

$$S = \sum_{n\geq 1} c_n \int_{\frac{1}{x}}^{1} \frac{1}{t}\, [T_{2n}(t) - T_{2n}(0)]\, dt + \sum_{n\geq 0} (-1)^n c_n \ln x,$$

так как $T_0(t) = 1$, $T_{2n}(0) = (-1)^n$. В силу (8) и (9)

$$S = \sum_{n\geq 1} c_n \int_{\frac{1}{x}}^{1} 2 \sum_{1\leq k\leq n} (-1)^{k-1}\, T_{2n-2k+1}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \int_{\frac{1}{x}}^{1} 2\, T_{2n-1}(t)\, dt\ (c_n - c_{n+1} + c_{n+2} - \ldots).$$

Таким образом, нахождение S сводится к вычислению приращения функции

$$\frac{1}{2}\,[T_2(t)+1](c_1-c_2+c_3-\ldots)+\sum_{n\geq 2}\left[\frac{1}{2n}\,T_{2n}(t)-\frac{1}{2n-2}\,T_{2n-2}(t)\right](c_n-c_{n+1}+c_{n+2}-\ldots)$$

на отрезке $\left[\frac{1}{x}, 1\right]$. Имеем

$$S = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,T_2\left(\frac{1}{x}\right)\right](c_1 - c_2 + c_3 - \ldots) +$$

$$+\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,T_4\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\,T_2\left(\frac{1}{x}\right)\right](c_2 - c_3 + c_4 - \ldots) +$$

$$+\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\,T_6\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\,T_4\left(\frac{1}{x}\right)\right](c_3 - c_4 + c_5 - \ldots) + \ldots .$$

Здесь коэффициент при T_2 равен

$$a_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\,c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \ldots\,,$$

аналогично для коэффициентов при T_4, T_6 соответственно

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\,c_2 + c_3 - c_4 + c_5 - \ldots\right),$$

$$a_3^{(2)} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\,c_3 + c_4 - c_5 + c_6 - \ldots\right)$$

и т.д. Свободный член, он же коэффициент при T_0, имеет вид

$$a_0^{(2)} = \frac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3 - \ldots) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)(c_2 - c_3 + c_4 - \ldots) +$$

$$+ \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)(c_3 - c_4 + c_5 - \ldots) + \ldots .$$

Для доказательства равенств (7) осталось воспользоваться условием (8) и определением чисел u_k.

В заключение рассмотрим некоторые примеры.

1. Известно ([3, с.495]), что

$$\int_0^1 \frac{\ln\frac{1}{x}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \frac{G}{2},$$

где G - постоянная Каталана. Требуется вычислить аналогичный интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{\ln\frac{1}{x}}{\sqrt{2+x^2}}\,dx.$$

Выполним в I подстановку $x = \sqrt{2}\,t$ и интегрирование по частям в $F(x)$; получим

$$I = F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{n=0}^{7} a_n^{(1)}\,T_{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Стандартное суммирование Кленшо ([2, с.511]) с $N = 7$, $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, в данном случае схема

$$B_8 = B_9 = 0;$$

$$B_n = -B_{n+2} + a_n^{(1)},\ n = 7(-1)0;$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_0 - B_1)$$

дает

$$I = 0.68966811.$$

2. Рассмотрим вычисление интеграла Клаузена

$$Cl(t) = -\int_0^t \ln\left(2\sin\frac{1}{2}\,y\right)dy,\ \ 0 \le y \le \pi$$

на основе равенства ([3, с.255])

$$G(x) = \frac{1}{2}\,Cl\,(2\arcsin x) + \arcsin x \ln 2x.$$

Отсюда

$$Cl(t) = 2G\left(\sin\frac{t}{2}\right) - t\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) = 2\sum_{n=0}^{7} a_n T_{2n+1}\left(\frac{t}{\pi}\right) - t\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right). \quad (10)$$

Заметим, что это равенство аналогично полученному ранее

$$Cl(x) = \frac{1}{2}\,\pi^2 N(x) - t\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right), \tag{11}$$

где

$$N(\pi y) = y\sum_{r\geq 0} A_{2r}T_{2r}(y).$$

Вывод равенства (11) и таблицу коэффициентов A_{2r} см. в [4].

Результаты некоторых вычислений согласно (10) представлены далее.

t	$G(\sin\frac{t}{2})$	$Cl(t)$
$\frac{\pi}{6}$	0.259802	0.864379
$\frac{\pi}{3}$	0.507471	1.014942
$\frac{\pi}{2}$	0.730181	0.915966
$\frac{2\pi}{3}$	0.913546	0.676628
$\frac{5\pi}{6}$	1.040401	0.356908
π	1.088793	0.000000

Литература

1. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева.* М.: Наука, 1983. 384 с.
2. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации.* М.: Мир, 1980. 608 с.
3. Прудников А.П. и др. *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* М.: Наука, 1981. 800 с.
4. Wood E. *Efficient calculation of Clausens integral* // Math. Comp. 1968. V.22. №104. P.883–884.