Математические структуры и моделирование
2000, вып. 6, с. 128–135

УДК 530.12:531.51

НОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА, ДОПУСКАЮЩЕЕ МАШИНУ ВРЕМЕНИ

Е.В. Палешева

In this article a new stationary solution of the Einstein's equations with cosmological constant and Time machine is given. The garavitational field is created by ideal liquid with two massless scalar fields or by ideal liquid with electric-magnetic field.

В статье приводится пример пространства-времени, являющегося решением уравнений Эйнштейна с космологической постоянной и допускающего Машину времени, т.е. замкнутые гладкие времениподобные кривые. Тензор энергии-импульса имеет две различные интерпретации. Во-первых, если космологическая постоянная отрицательна, то гравитационное поле создается идеальной жидкостью и парой безмассовых скалярных полей, и, во-вторых, если космологическая постоянная неотрицательна, – идеальной жидкостью, находящейся в электромагнитном поле. В обоих случаях космологическая постоянная имеет порядок 10^{-58} $см^{-2}$. Первое подобное решение было найдено ван Стокумом [1] в 1937 году. Но о машине времени заговорили с 1949 года, когда космологическую модель, содержащую замкнутые гладкие времениподобные кривые, нашел известный логик Курт Гёдель [2]. Он был первым, кто интерпретировал эти кривые как Машину времени.

1. Метрика и тензор энергии-импульса

Рассмотрим метрику

$$ds^2 = \frac{dx^{0\,2}}{2\Omega} + 2(x^2dx^1 - x^1dx^2)dx^0 + \Omega(2x^{2\,2} - 1)dx^{1\,2} + \Omega(2x^{1\,2} - 1)dx^{2\,2} -$$

$$-4\Omega x^1x^2dx^1dx^2 - dx^{3\,2}, \qquad (1)$$

где берем $\Omega = const > 0$. Ненулевыми компонентами символов Кристоффеля являются

$$\Gamma^0_{01} = 2x^1,\ \Gamma^0_{02} = 2x^2,\ \Gamma^0_{11} = 8x^1x^2\Omega,\ \Gamma^0_{12} = 4\Omega(x^{2\,2} - x^{1\,2}),\ \Gamma^0_{22} = -8x^1x^2\Omega,$$

$$\Gamma^1_{02} = -\frac{1}{\Omega},\ \Gamma^1_{12} = -2x^2,\ \Gamma^1_{22} = 4x^1,\ \Gamma^2_{01} = \frac{1}{\Omega},\ \Gamma^2_{11} = 4x^2,\ \Gamma^2_{12} = -2x^1,$$

Омский государственный университет

а ненулевыми компонентами тензора Риччи –

$$R_{00} = \frac{2}{\Omega^2}, \; R_{01} = \frac{4x^2}{\Omega}, \; R_{02} = \frac{-4x^1}{\Omega}, \; R_{11} = 4 + 8x^{22}, \; R_{12} = -8x^1x^2, \; R_{22} = 4 + 8x^{12}$$

и скалярная кривизна $R = -4/\Omega$.

Используя уравнения Эйнштейна[1]

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \kappa T_{ik} + \Lambda g_{ik},$$

находим следующий тензор:

$$\kappa T_{ik} + \Lambda g_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\Omega^2} & \frac{6x^2}{\Omega} & -\frac{6x^1}{\Omega} & 0 \\ \frac{6x^2}{\Omega} & 12x^{22} + 2 & -12x^1x^2 & 0 \\ -\frac{6x^1}{\Omega} & -12x^1x^2 & 12x^{12} + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\Omega} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах

$$\begin{cases} x^0 = x^0 \\ x^1 = r\cos\varphi \\ x^2 = r\sin\varphi \\ x^3 = x^3 \end{cases}$$

метрика будет выглядеть следующим образом:

$$ds^2 = \frac{1}{2\Omega}dx^{02} - 2r^2dx^0d\varphi - \Omega dr^2 + \Omega r^2\left(2r^2 - 1\right)d\varphi^2 - x^{32}.$$

2. Первая интерпретация тензора энергии-импульса

Для начала запишем T_{ik} в виде суммы

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)} + T_{ik}^{(3)},$$

где

$$\kappa T_{ik}^{(1)} + \Lambda g_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega^2} & \frac{2x^2}{\Omega} & -\frac{2x^1}{\Omega} & 0 \\ \frac{2x^2}{\Omega} & 4x^{22} + 2 & -4x^1x^2 & 0 \\ -\frac{2x^1}{\Omega} & -4x^1x^2 & 4x^{12} + 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\Omega} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

[1]Греческие индексы пробегают значения – 1,2,3, а латинские – 0,1,2,3.

$$\kappa T_{ik}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega^2} & \frac{2x^2}{\Omega} & -\frac{2x^1}{\Omega} & 0 \\ \frac{2x^2}{\Omega} & 4x^{2^2}+2 & -4x^1x^2 & 0 \\ -\frac{2x^1}{\Omega} & -4x^1x^2 & 4x^{1^2}-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\Omega} \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

$$\kappa T_{ik}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega^2} & \frac{2x^2}{\Omega} & -\frac{2x^1}{\Omega} & 0 \\ \frac{2x^2}{\Omega} & 4x^{2^2}-2 & -4x^1x^2 & 0 \\ -\frac{2x^1}{\Omega} & -4x^1x^2 & 4x^{1^2}+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{\Omega} \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Теперь покажем, что $T_{ik}^{(1)}$ – тензор энергии-импульса для идеальной жидкости, т.е.

$$\begin{cases} T_{ik}^{(1)} = (c^2\rho + p)u_iu_k - p\,g_{ik}, \\ g^{ik}u_iu_k = 1. \end{cases}$$

Из (3) имеем

$$\kappa T_{ik}^{(1)} + \Lambda g_{ik} = \kappa(c^2\rho + p)u_iu_k + (\Lambda - \kappa p)g_{ik}$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Omega^2} = \kappa(c^2\rho+p){u_0}^2 + \frac{1}{2\Omega}(\Lambda-\kappa p)\\
&\frac{2x^2}{\Omega} = \kappa(c^2\rho+p)u_0u_1 + x^2(\Lambda-\kappa p)\\
&-\frac{2x^1}{\Omega} = \kappa(c^2\rho+p)u_0u_2 - x^1(\Lambda-\kappa p)\\
&-4x^1x^2 = \kappa(c^2\rho+p)u_1u_2 - 2\Omega\, x^1x^2(\Lambda-\kappa p)\\
&4x^{2^2}+2 = \kappa(c^2\rho+p){u_1}^2 + \Omega(2x^{2^2}-1)(\Lambda-\kappa p)\\
&4x^{1^2}+2 = \kappa(c^2\rho+p){u_2}^2 + \Omega(2x^{1^2}-1)(\Lambda-\kappa p)\\
&\frac{2}{\Omega} = \kappa(c^2\rho+p){u_3}^2 - (\Lambda-\kappa p)\\
&0 = (c^2\rho+p)u_0u_3 = (c^2\rho+p)u_1u_3 = (c^2\rho+p)u_2u_3\\
&g^{ik}u_iu_k = 1.
\end{aligned}$$

Если при этом наложить физические ограничения

$$p \geq 0, \qquad p < \frac{1}{3}\,c^2\rho,$$

то получаем

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{\Omega} \le \Lambda < -\dfrac{1}{\Omega} \\ \kappa p = \Lambda + \dfrac{2}{\Omega} \\ \kappa c^2 \rho = \dfrac{2}{\Omega} - \Lambda \\ u_i = \left(\pm \dfrac{1}{\sqrt{2\Omega}}, \pm\sqrt{2\Omega} x^2, \mp\sqrt{2\Omega} x^1, 0 \right). \end{cases}$$

Вещественное скалярное поле описывается уравнением Клейна-Фока

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) - m^2 \varphi = 0. \tag{6}$$

Тензор энергии-импульса действительного скалярного поля определяется как

$$T_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{2} g_{ik} \left(m^2 \varphi^2 - g^{mn} \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} \right), \tag{7}$$

Предположим, что φ – безмассовое поле и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} = 0.$$

Сравнивая (4) и (7), а также учитывая уравнение (6), получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Omega^2} = \frac{\kappa}{4\Omega^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 \\
&\frac{2x^2}{\Omega} = \frac{\kappa}{2\Omega}\, x^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 \\
&-\frac{2x^1}{\Omega} = -\frac{\kappa}{2\Omega}\, x^1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 \\
&-4x^1 x^2 = -\kappa\, x^1 x^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 \\
&4x^{2\,2} + 2 = \kappa \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 + \frac{1}{2}\, \kappa\, (2x^{2\,2} - 1) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 \\
&4x^{1\,2} - 2 = \frac{1}{2}\, \kappa\, (2x^{1\,2} - 1) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 \\
&-\frac{2}{\Omega} = -\frac{\kappa}{2\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 \\
&\frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{i1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Из этих соотношений находим:

$$\varphi = \pm \frac{2x^1}{\sqrt{\kappa}} + const.$$

Осталось проинтерпретировать тензор $T_{ik}^{(3)}$. Здесь, как и в предыдущем случае, можно говорить о вещественном безмассовом скалярном поле ψ . Поступая, как раньше, полагаем, что

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^0} = \frac{\partial\psi}{\partial x^1} = \frac{\partial\psi}{\partial x^3} = 0,$$

подставляя (5) в уравнения (6) и (7), имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Omega^2} = \frac{\kappa}{4\Omega^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\\
&\frac{2x^2}{\Omega} = \frac{\kappa}{2\Omega}\,x^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\\
&-\frac{2x^1}{\Omega} = -\frac{\kappa}{2\Omega}\,x^1\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\\
&-4x^1x^2 = -\kappa\, x^1x^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\\
&4x^{2^2} - 2 = \frac{1}{2}\,\kappa\,(2x^{2^2} - 1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\\
&4x^{1^2} + 2 = \kappa\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\kappa\,(2x^{1^2} - 1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\\
&-\frac{2}{\Omega} = -\frac{\kappa}{2\Omega}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right)^2\\
&\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{i2}\frac{\partial\psi}{\partial x^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Этим уравнениям, как нетрудно проверить, удовлетворяет поле

$$\psi = \pm\frac{2x^2}{\sqrt{\kappa}} + const.$$

Если принять $\Lambda = -2/\Omega$, то получим «пылевидную» материю, для которой $\kappa c^2\rho = 4/\Omega,\ p = 0$.

3. Вторая интерпретация тензора энергии-импульса

Рассмотрим электромагнитное поле и идеальную жидкость. Другими словами, тензор энергии-импульса материи, создающей наше гравитационное поле, будет определяться равенством

$$T_{ik} = (c^2\rho + p)u_iu_k - p\,g_{ik} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik} - F_{il}F_k^{\ l}\right).$$

Имеем

$$\kappa T_{ik} + \Lambda g_{ik} = \kappa(c^2\rho + p)u_iu_k - \frac{\kappa}{4\pi}F_{i\,l}F_k^{\ l} + \left\{\frac{\kappa}{16\pi}F_{lm}F^{lm} + \Lambda - \kappa p\right\}g_{ik}. \qquad (8)$$

Пусть

$$u_i = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}, \pm\sqrt{2\Omega}x^2, \mp\sqrt{2\Omega}x^1, 0\right).$$

Тогда $g^{ik}u_i u_k = 1$.

Примем, что только компонента F_{12} отлична от нуля. В результате:

$$\frac{\kappa}{16\pi}F_{lm}F^{lm} = \frac{\kappa}{8\pi\Omega^2}(F_{12})^2,$$

$$-\frac{\kappa}{4\pi}F_{1l}F_1^{\ l} = \frac{\kappa}{4\pi\Omega}(F_{12})^2,$$

$$-\frac{\kappa}{4\pi}F_{2l}F_2^{\ l} = \frac{\kappa}{4\pi\Omega}(F_{12})^2.$$

Подставляя эти выражения в (8) и используя (2), получим систему:

$$\begin{aligned}
&u_i = (\pm\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}, \pm\sqrt{2\Omega}x^2, \mp\sqrt{2\Omega}x^1, 0)\\
&\frac{3}{\Omega^2} = \frac{\kappa}{2\Omega}(c^2\rho + p) + \frac{1}{2\Omega}\left\{\frac{\kappa}{8\pi\Omega^2}(F_{12})^2 + \Lambda - \kappa p\right\}\\
&\frac{6x^2}{\Omega} = \kappa(c^2\rho + p)x^2 + x^2\left\{\frac{\kappa}{8\pi\Omega^2}(F_{12})^2 + \Lambda - \kappa p\right\}\\
&-\frac{6x^1}{\Omega} = -\kappa(c^2\rho + p)x^1 - x^1\left\{\frac{\kappa}{8\pi\Omega^2}(F_{12})^2 + \Lambda - \kappa p\right\}\\
&-12x^1x^2 = -2\kappa(c^2\rho + p)\Omega x^1x^2 - 2\Omega x^1x^2\left\{\frac{\kappa}{8\pi\Omega^2}(F_{12})^2 + \Lambda - \kappa p\right\}\\
&12x^{2\,2} + 2 = 2\kappa\Omega(c^2\rho + p)x^{2\,2} + \frac{\kappa}{4\pi\Omega}(F_{12})^2 + \Omega(2x^{2\,2} - 1)\left\{\frac{\kappa}{8\pi\Omega^2}(F_{12})^2 + \Lambda - \kappa p\right\}\\
&12x^{1\,2} + 2 = 2\kappa\Omega(c^2\rho + p)x^{1\,2} + \frac{\kappa}{4\pi\Omega}(F_{12})^2 + \Omega(2x^{1\,2} - 1)\left\{\frac{\kappa}{8\pi\Omega^2}(F_{12})^2 + \Lambda - \kappa p\right\}\\
&-\frac{2}{\Omega} = -\left\{\frac{\kappa}{8\pi\Omega^2}(F_{12})^2 + \Lambda - \kappa p\right\}.
\end{aligned}$$

Решение этой системы запишется в виде

$$\begin{cases}
\Lambda = \kappa p\\
u_i = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\Omega}}, \pm\sqrt{2\Omega}x^2, \mp\sqrt{2\Omega}x^1, 0\right)\\
(F_{12})^2 = \frac{16\pi\Omega}{\kappa}\\
\kappa c^2\rho = \frac{4}{\Omega} - \Lambda.
\end{cases}$$

Откуда получаем ограничение на космологическую постоянную

$$0 \le \Lambda < \frac{4}{\Omega}.$$

Нужно еще учесть уравнения Максвелла

$$\begin{cases} F_{ik} = \dfrac{\partial A_k}{\partial x^i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x^k} \\ \\ \nabla_k F^{ik} = -\dfrac{4\pi}{c} j^{\,i}, \end{cases}$$

где A_k – 4-потенциал рассмотренного электро-магнитного поля, а ∇_k – ковариантная производная. В результате 4-вектор тока будет принимать значение

$$j^{\,i} = \left(\frac{c}{4\pi\Omega}F_{12}, 0, 0, 0\right) = \left(\pm\frac{4c}{\sqrt{\kappa\pi\Omega}}, 0, 0, 0\right).$$

Напряженность и индукция электрического и магнитного полей соответственно равны [3, с.331]

$$E_\alpha = 0,\ D^\alpha = \left(\frac{2x^1}{\sqrt{2\Omega}^3}F_{12}, \frac{2x^2}{\sqrt{2\Omega}^3}F_{12}, 0\right),$$

$$H_\alpha = \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2\Omega}^3}\ F_{12}\right),\quad B^\alpha = \left(0, 0, -\frac{1}{\Omega}F_{12}\right).$$

Если при этом взять $\Lambda = 0$, то заполняющей пространство материей будет "пыль" и электро-магнитное поле.

4. Оценки Ω и Λ

Оценим порядок величин Ω и Λ. Плотность материи во Вселенной считается равной $3\cdot 10^{-31}$ *г/см*^{3}. В нашем решении в случае первой интерпретации тензора энергии-импульса $\Omega \sim 1/\kappa c^2\rho$, $\Lambda \sim 1/\Omega$. Следовательно, $\Omega \sim 10^{58}$ *см*^{2} и $\Lambda \sim 10^{-58}$ *см*$^{-2}$. Во второй интерпретации – в силу малости Λ имеем $\Omega\ \sim 1/\kappa c^2\rho \sim 10^{58}$ *см*^{2}.

5. Машина времени

Покажем теперь, что метрика (1) допускает замкнутые времениподобные гладкие кривые. Рассмотрим кривую

$$L = \{x^0 = const, x^1 = a\sin t, x^2 = a\cos t, x^3 = const\},$$

$$a = const > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В данной метрике она является времениподобной, т.е. $g_{ik}dx^i dx^k > 0$. Действительно,

$$g_{ik}dx^i dx^k = a^2\left\{g_{11}\cos t^2 + g_{22}\sin t^2 - 2g_{12}\sin t\cos t\right\} = a^2\Omega(2a^2-1) > 0,$$

т.к. $a > 1/\sqrt{2}$.

Расстояние, которое потребуется пройти Путешественнику в Прошлое или Будущее, и его хронометрически инвариантное время вычисляются по следующим формулам:

$$\tau(L) = \frac{1}{c} \oint\limits_L \frac{g_{0i} dx^i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{2\Omega}}{c} \sim a^2 10^{19} \textit{сек},$$

$$l(L) = \oint\limits_L \sqrt{\left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}\right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} dt = 2\pi a \sqrt{\Omega} \sim a \cdot 10^{29} \textit{см}.$$

"Диаметр" области, содержащей Машину времени L, имеет порядок $a\sqrt{\Omega} \sim l(L)$.

Из этих формул видно, что, так как $a > 1/\sqrt{2}$, то для экскурсии в свое прошлое путешественник затратит не менее 10^{19} *сек* или 10^{12} *лет* по часам τ. Собственное время связано с часами τ соотношением

$$s(L) = \frac{1}{c} \oint\limits_L \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}} dt = \frac{1}{c} \oint\limits_L \sqrt{1 - \left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2} d\tau.$$

Поэтому собственное время может быть сколь угодно малым, но при этом скорость Машины времени должна приближаться к скорости света. В любом случае необходимо преодолеть расстояния не менее 10^{29} *см*, что близко к радиусу Вселенной.

Такие оценки справедливы в случае первой интерпретации тензора энергии-импульса.

В случае второй интерпретации дополнительно необходимо предполагать, что наше решение является космологическим, т.е. описывает Вселенную. Если рассматривается не космологическое решение, то Ω можно брать сколь угодно малым. Следовательно, $\tau(L)$ и $l(L)$ можно сделать любыми. Правда, при этом уменьшение Ω влечет увеличение плотности ρ.

Автор выражает благодарность А.К. Гуцу за рекомендованную тему и консультирование в процессе работы.

Литература

1. Van Stockum W.J. *Gravitational field of a distribution of particles rotating about an axis of symmetry* // Roc. R. Soc. Edin. 1937. V.57. P.135-154.
2. Gödel K. *An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equation of gravitation* // Phys. Rev. mod. 1949. V.21. P.447-450.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* М.: Наука, 1967.