Математические структуры и моделирование
2000, вып. 6, с. 43–49

УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ CR-СТРУКТУРЫ НА SU(3)/U(1)

И.А. Латыпов

In this article invariant CR-structures on SU(3)/U(1) are described.

В данной статье описываются все инвариантные CR-структуры на однородном пространстве SU(3)/U(1).

1. Инвариантные CR-структуры

Вещественное многообразие M называется CR-многообразием, если для каждой точки $x \in \mathrm{M}$ в касательном пространстве $T_x(\mathrm{M})$ выделены подпространство $T_x^c(\mathrm{M})$ и комплексная структура в нем, гладко зависящая от $x \in \mathrm{M}$. Совокупность подпространств $T_x^c(\mathrm{M})$ образует CR-структуру $T^c(\mathrm{M})$. Комплексная размерность пространств $T_x^c(\mathrm{M})$ называется размерностью CR-структуры. Комплексифицированное расслоение $T^c(\mathrm{M}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ разлагается в прямую сумму

$$T^c(\mathrm{M}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T^{0,1}(\mathrm{M}) + T^{1,0}(\mathrm{M}).$$

Если $J_x : T_x^c(\mathrm{M}) \to T_x^c(\mathrm{M})$ – оператор, задающий комплексную структуру в T_x^c ($J_x^2 = -\mathrm{id}$), то

$$T^{0,1}(\mathrm{M}) = \{X + iJ_xX | X \in T_x^c(\mathrm{M})\},$$

$$T^{1,0}(\mathrm{M}) = \{X - iJ_xX | X \in T_x^c(\mathrm{M})\}.$$

Функция f на открытом подмножестве $U \subseteq \mathrm{M}$ называется CR-функцией, если она удовлетворяет уравнениям Коши–Римана

$$Xf = 0,\ X \in \Gamma_U(T^{0,1}(\mathrm{M})),$$

где $\Gamma_U(T^{0,1}(\mathrm{M}))$ обозначает множество векторных полей на U – сечений расслоения $T^{0,1}(\mathrm{M})$ над множеством U, а Xf – дифференцирование f вдоль X. CR-структура называется интегрируемой, если для всех $X, Y \in \Gamma_U(T^{0,1}(\mathrm{M}))$ выполняется условие $[X, Y] \in \Gamma_U(T^{0,1}(\mathrm{M}))$. Дальнейшие сведения о CR-многообразиях можно найти, например, в [2].

Пусть M – однородное пространство компактной группы Ли G, H – стационарная подгруппа фиксированной точки $x_0 \in \mathrm{M}$. Будем CR-структуру на

© 2000 И.А. Латыпов
E-mail: latypov@univer.omsk.su
Омский государственный университет

однородном пространстве $\mathrm{M} = \mathrm{G}/\mathrm{H}$ называть *инвариантной*, если она перестановочна с действием группы G.

Инвариантные интегрируемые CR-структуры коразмерности 1 на односвязных однородных пространствах компактных групп Ли были описаны в работе [1].

Фиксируем некоторую инвариантную CR-структуру на M. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ – алгебры Ли групп G и H соответственно. Отождествим касательное пространство $T_{x_0}(\mathrm{M})$ к M в точке x_0 с $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$-инвариантным дополнением к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ и $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ – комплексификации алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответственно. Множество $\mathfrak{T} = \{X + iJ_{x_0}X \mid X \in T_{x_0}(\mathrm{M})\}$ образует $\mathrm{Ad}\,\mathrm{H}$-инвариантное комплексное подпространство в $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$ (в $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$-инвариантном дополнении к $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ в $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$), причем $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{g} = 0$. CR-структура является инвариантной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{T} \oplus \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ является алгеброй Ли. Отметим, что все одномерные инвариантные CR-структуры на M интегрируемы.

Пусть теперь $\mathfrak{T}$ – некоторое $\mathrm{Ad}\,\mathrm{H}$-инвариантное комплексное векторное подпространство в $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{g} = 0$. Покажем, что оно задает инвариантную CR-структуру на M. Ввиду линейности $\mathfrak{T}$ и условия $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{g} = 0$ для всех $X \in T_{x_0}(\mathrm{M})$ существует не более одного $Y \in T_{x_0}(\mathrm{M})$, удовлетворяющего условию $X + iY \in \mathfrak{T}$. Множество всех $X \in T_{x_0}(\mathrm{M})$, для которых существует $Y \in T_{x_0}(\mathrm{M})$ такое, что $X + iY \in \mathfrak{T}$, образует линейное подпространство $\tilde{\mathfrak{T}}$ в $T_{x_0}(\mathrm{M})$. Определим на $\tilde{\mathfrak{T}}$ оператор J по правилу $JX = Y$, J линеен. Если $X + iY \in \mathfrak{T}$, то $i(X + iY) \in \mathfrak{T}$ и $Y - iX \in \mathfrak{T}$. Следовательно, $J^2 = -\mathrm{id}$, то есть оператор J определяет на $\tilde{\mathfrak{T}}$ комплексную структуру. Переносом вдоль M получаем инвариантную CR-структуру на M размерности $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{T}$.

Таким образом, инвариантную CR-структуру на M можно задать $\mathrm{Ad}\,\mathrm{H}$-инвариантным комплексным подпространством $\mathfrak{T} \subset (T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$, удовлетворяющим условию $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{g} = 0$. Такое пространство $\mathfrak{T}$ разлагается в прямую сумму $\mathrm{Ad}\,\mathrm{H}$-инвариантных комплексных минимальных подпространств. Для описания инвариантных CR-структур на M достаточно найти все минимальные $\mathrm{Ad}\,\mathrm{H}$-инвариантные комплексные подпространства $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$, а затем выяснить, какие их прямые суммы $\mathfrak{T}$ удовлетворяют условию $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{g} = 0$.

Отметим также, что если группа H связна, то $\mathrm{Ad}\,\mathrm{H}$-инвариантность эквивалентна $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}$-инвариантности.

2. SU(3)/U(1)

Группа Ли SU(3) состоит из всех комплексных невырожденных матриц A размера 3×3, удовлетворящих условию $\bar{A}^t = A^{-1}$. SU(3) – максимальная компактная подгруппа группы Ли $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ всех невырожденных матриц с единичным определителем. Алгебра Ли $\mathfrak{su}(3)$ группы Ли SU(3) состоит из всех комплексных 3×3 матриц A, удовлетворяющих условию $\bar{A}^t = -A$. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ группы Ли $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ состоит из всех комплексных 3×3 матриц с нулевым следом.

Рассмотрим однородное пространство $\mathrm{M} = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(1)$. Так как группа Ли U(1) коммутативна, мы можем предполагать, что она вложена в подгруппу D группы SU(3), состоящую из диагональных матриц (максимальную коммута-

тивную подгруппу компактной группы Ли SU(3)). Тогда ее алгебра Ли – это вещественное одномерное векторное подпространство $\mathfrak{su}(3)$, порожденное вектором $u = \begin{pmatrix} ai & 0 & 0 \\ 0 & bi & 0 \\ 0 & 0 & ci \end{pmatrix}$, где a, b, c – вещественные числа, $a + b + c = 0$. С точностью до сопряжения матрицами $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ можно считать, что $a \geq b \geq 0$, $c < 0$.

Рассмотрим линейный оператор $\operatorname{ad} u$ на $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Прямая проверка показывает, что векторы $v_{a-c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_{b-c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_{a-b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_{b-a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_{c-b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_{c-a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ являются собственными; собственное число вектора v_s равно is. Любое подпространство пространства всех диагональных матриц $\operatorname{Ad} D$-инвариантно.

Отождествим $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$ с пространством всех матриц с нулевым следом и равным нулю элементом третьего столбца третьей строки.

Далее возможны три варианта: $a > b > 0$, $b = 0$ и $a = b > 0$. Инвариантные CR-структуры на SU(3)/U(1) могут иметь размерности один, два и три.

3. Случай $a > b > 0$

Собственные подпространства оператора $\operatorname{ad} u$ в $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$ одномерны, а собственные числа различны. Минимальные инвариантные подпространства в $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$ – это пространства V_{a-c}, V_{b-c}, V_{a-b}, V_{b-a}, V_{c-b}, V_{c-a} (здесь $V_l = \mathbb{C} \cdot v_l$) и дополнение к $\mathbb{C} \cdot u$ в $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$; последнее пространство имеет непустое пересечение с $\mathfrak{g}$. Непустое пересечение с $\mathfrak{g}$ имеют также пространства $V_{a-c} \oplus V_{c-a}$, $V_{a-b} \oplus V_{b-a}$ и $V_{b-c} \oplus V_{c-b}$.

Одномерные инвариантные CR-структуры :
V_{a-c}, V_{b-c}, V_{a-b}, V_{b-a}, V_{c-b}, V_{c-a}.

Двумерные интегрируемые инвариантные CR-структуры :
$V_{a-c} \oplus V_{a-b}$, $V_{b-c} \oplus V_{b-a}$, $V_{c-b} \oplus V_{c-a}$.

Двумерные неинтегрируемые инвариантные CR-структуры :
$V_{a-c} \oplus V_{b-a}$, $V_{a-c} \oplus V_{c-b}$, $V_{b-c} \oplus V_{a-b}$, $V_{b-c} \oplus V_{c-a}$, $V_{a-b} \oplus V_{c-a}$, $V_{b-a} \oplus V_{c-b}$.

Трехмерные инвариантные CR-структуры :
$V_{a-c} \oplus V_{b-a} \oplus V_{b-c}$, $V_{a-c} \oplus V_{c-b} \oplus V_{a-b}$, $V_{a-b} \oplus V_{b-c} \oplus V_{a-c}$, $V_{b-c} \oplus V_{c-a} \oplus V_{b-a}$, $V_{c-b} \oplus$

$V_{b-a} \oplus V_{c-a}$, $V_{c-a} \oplus V_{a-b} \oplus V_{c-b}$. Все трехмерные инвариантные CR-структуры интегрируемы.

Отметим, что все двумерные неинтегрируемые инвариантные CR-структуры можно «продолжить» до трехмерных интегрируемых инвариантных CR-структур, причем единственным образом.

4. Случай $b = 0$

Можно считать, что $a = 1$. Тогда подпространства

$$V_1 = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{-1} = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_2 = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V_{-2} = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и дополнение V_0 к $\mathbb{C} \cdot u$ в $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$ являются собственными подпространствами оператора $\operatorname{ad} u$ в $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$; собственное число подпространства V_s равно is.

Отметим, что пространства V_0, $V_2 \oplus V_{-2}$, $\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ при $|\alpha\beta| = 1$ имеют непустое пересечение с $\mathfrak{g}$.

Одномерные инвариантные CR-структуры :
одномерное подпространство V_1, одномерное подпространство V_{-1}, V_2, V_{-2}.

Двумерные инвариантные CR-структуры :
V_1 (интегрируема), V_{-1} (интегрируема), прямая сумма V_2 и одномерного подпространства V_1 (интегрируема), прямая сумма V_{-2} и одномерного подпространства V_{-1} (интегрируема), прямая сумма V_1 и одномерного подпространства V_{-2} (неинтегрируема), прямая сумма V_2 и одномерного подпространства V_{-1} (неинтегрируема), $U_\alpha = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (интегрируема $\Leftrightarrow \alpha = 0$), $W_{\alpha,\beta} = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ при $|\alpha\beta| \neq 1$ (интегрируема $\Leftrightarrow \alpha = \beta$).

Трехмерные инвариантные CR-структуры :
$V_2 \oplus U_\alpha$ (интегрируема $\Leftrightarrow \alpha = 0$), $V_{-2} \oplus U_\alpha$ (интегрируема $\Leftrightarrow \alpha = 0$), $V_2 \oplus W_{\alpha,\beta}$ (интегрируема $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$), $V_{-2} \oplus W_{\alpha,\beta}$ (интегрируема $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$).

5. Случай $a = b > 0$

Можно считать, что $a = b = 1$. Тогда подпространства

$$V_3 = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{-3} = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_0 = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются собственными подпространствами оператора $\operatorname{ad} u$ в $(T_{x_0}(\mathrm{M}))^{\mathbb{C}}$; собственное число подпространства V_s равно is.

Каждый элемент $v \in V_0$ можно привести к жордановой форме $q^{-1}vq = \begin{pmatrix} d & \gamma & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ с помощью матрицы $q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$. Матрицу q представим в виде $q = ks$, где $s = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ 0 & s_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, и $k = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in N$, через N обозначен нормализатор $\mathrm{U}(1)$ в $\mathrm{SU}(3)$. Таким образом, $C \cdot v$ имеет вид либо $C \cdot k \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} k^{-1}$ (при $\alpha = 0$ пересечение с $\mathfrak{g}$ непусто), либо $C \cdot k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} k^{-1}$, где $k \in N$.

Отметим еще, что пространства $\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \end{pmatrix}$ при $|\alpha\beta| = 1$ и все двумерные подпространства V_0 имеют непустое пересечение с $\mathfrak{g}$.

Опишем инвариантные CR-структуры с точностью до элемента $k \in N$.

Одномерные инвариантные CR-структуры :
одномерное подпространство V_3, одномерное подпространство V_{-3}, $\mathbb{C} \cdot k \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} k^{-1}$ при $\alpha \neq 0$, $\mathbb{C} \cdot k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} k^{-1}$.

Двумерные инвариантные CR-структуры :
V_3 (интегрируема), V_{-3} (интегрируема),

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ при } \alpha\neq 0 \text{ (интегрируема)},$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&\beta\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ при } \alpha\neq 0$$

$$\text{(интегрируема} \Leftrightarrow \beta=-\tfrac{\alpha}{2}),$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&\beta\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ (неинтегрируема)},$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ (интегрируема)},$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&\beta&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ при } \alpha\neq 0$$

$$\text{(интегрируема} \Leftrightarrow \beta=\tfrac{\alpha}{2}),$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ при } \alpha\neq 0 \text{ (интегрируема)},$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&\beta&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ (неинтегрируема)},$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ (интегрируема)},$$

$$U_\alpha=\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&\alpha\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ (неинтегрируема)},$$

$$W_{\alpha,\beta}=\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&\alpha\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\beta&1&0\end{pmatrix} \text{ при } |\alpha\beta|\neq 1 \text{ (неинтегрируема)}.$$

Трехмерные инвариантные CR-структуры :
прямая сумма V_3 и одномерного подпространства V_0 (интегрируема),
прямая сумма V_{-3} и одномерного подпространства V_0 (интегрируема),
прямая сумма двумерного подпространства из $V_3\oplus V_{-3}$ (U_α или $W_{\alpha,\beta}$ при $|\alpha\beta|\neq 1$) и одномерного подпространства из V_0 ($\mathbb{C}\cdot\ k\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}k^{-1}$ при $\alpha\neq 0$ или $\mathbb{C}\cdot\ k\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}k^{-1}$) (интегрируема только в следующих трех случаях:

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&\frac{\alpha}{2}&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ при } \alpha\neq 0,$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}1&\alpha&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&-\frac{\alpha}{2}\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right)k^{-1} \text{ при } \alpha\neq 0,$$

$$k\left(\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{C}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\right)k^{-1}).$$

Литература

1. Alekseevky D.V., Spiro A.F. *Invariant CR structures on compact homogeneous manifolds* // Preprint (to appear).
2. Туманов А.Е. *Геометрия многообразий* // Итоги науки и техники. Сер. «Совр. пробл. мат. Фундам. напр.» 1989. Т.9. М.: ВИНИТИ. С.225–246.