Математические структуры и моделирование
2000, вып. 6, с. 147–155

УДК 378.143

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ «АЛГЕБРА»

С.Н. Горлова

Algorithm of definition of an optimum volume and sequences analyses of sections of a course "Algebra" is worked up and numerically realised.

К настоящему времени в области математических методов разработки и оптимизации учебных программ изучаемых дисциплин накоплен значительный опыт [1–5]. В данной работе предлагается новый алгоритм разработки и оптимизации учебной программы дисциплины «Алгебра», основанный на представлении логических связей между разделами в виде графа, а также на оценке внешней значимости этих разделов.

1. Рассмотрим граф G, вершинами которого являются разделы учебной дисциплины. Построим матрицу $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ (n – число разделов рассматриваемой дисциплины), изоморфную графу G и отражающую логические связи между разделами. Если при изучении j-го раздела используется материал i-го раздела, то $a_{ij} = 1$. После формирования матрицы A проводится операция удаления контуров графа G по алгоритму [6], при этом сама матрица приводится к верхнетреугольному виду. Будем считать, что логическая связь между i-м и j-м разделами называется для i-го раздела прямой и j-го – обратной, если при изучении j-го раздела используется информация из i-го.

Пусть $\mathbf{x}_0 = (1, \ldots, 1)$ - вектор, содержащий n компонент. Тогда вектор $\mathbf{x}_1$, определяемый как

$$\mathbf{x}_1^T = (A + A^T) \cdot \mathbf{x}_0^T \qquad (1),$$

определяет суммарное число прямых и обратных логических связей.

При определении сквозной значимости содержания каждого раздела изучаемой дисциплины по количеству прямых и обратных связей всех порядков вхождения используется матрица D, определяемая как $D = A^p$. В матрице D элемент d_{ij} равен числу путей длины p, идущих из i-й вершины в j-ю. Следовательно, компоненты вектора $\mathbf{x}_1$ определяют значимость содержания разделов изучаемого материала по количеству их прямых и обратных логических связей первого порядка вхождения.

Координаты вектора $\mathbf{x}_p$, определяемого по аналогии с (1) как

$$\mathbf{x}_p^T = (A + A^T)^p \cdot \mathbf{x}_0^T, \qquad (2)$$

© **2000 С.Н. Горлова**
E-mail: ngrins@nvartovsk.wsnet.ru
Нижневартовский государственный педагогический институт

где $p > 0$ – целое число, выражает сквозную значимость содержания разделов изучаемой дисциплины по количеству прямых и обратных логических связей p-го порядка вхождения.

При достаточно больших p вектор $\mathbf{x}_p$, определяемый из (2), сходится к собственному вектору матрицы $(A + A^T)$, соответствующему максимальному собственному значению λ, то есть

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_p. \tag{3}$$

Вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\lambda \mathbf{x}^T = (A + A^T) \cdot \mathbf{x}^T. \tag{4}$$

Заметим, что вектор $\mathbf{x}$ является собственным для матриц $(A + A^T)$ и $(E + A + A^T)$. Если λ – собственное число $(A + A^T)$, соответствующее вектору $\mathbf{x}$, то у матрицы $(E + A + A^T)$ для того же собственного вектора собственное число $(\lambda + 1)$ [7].

Используя (2)-(4), получим, что собственный вектор $\mathbf{x}$ матрицы $(A + A^T)$ определяется по формуле

$$\mathbf{x}^T \approx (E + A + A^T)^p \cdot \mathbf{x}_0^T \tag{5}$$

при достаточно больших p.

Используя формулу бинома Ньютона, из (5) получим:

$$\mathbf{x}^T \approx \sum_{k=0}^{p} C_p^k (A + A^T)^k \cdot \mathbf{x}_0^T. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), получим:

$$\mathbf{x}^T \approx \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{p} C_p^k (A + A^T)^{k+1}. \tag{7}$$

Остается определить наибольшее собственное значение λ и соответствующий собственный вектор $\mathbf{x}$ матрицы $(A+A^T)$. Воспользуемся для этого методом скалярных произведений [8], который включает в себя следующий итерационный процесс:

$$1 \text{ - й шаг:} \quad \mathbf{x}_1^T = (A + A^T) \cdot \mathbf{x}_0^T, \quad \lambda_1 = \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_1^T}{n}, \quad \overline{\mathbf{x}}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\lambda_1}, \tag{8}$$

$$k \text{ - й шаг:} \quad \mathbf{x}_k^T = (A + A^T) \cdot \overline{\mathbf{x}}_{k-1}^T, \quad \lambda_k = \frac{\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_k^T}{n}, \quad \overline{\mathbf{x}}_k = \frac{\mathbf{x}_k}{\lambda_k}. \tag{9}$$

Вычислительный процесс (8), (9) заканчивается, когда $||\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}|| \leq \varepsilon$, где ε – наперед заданное малое число, $|| \cdot ||$ - m-, l- или k-норма [9].

Координаты вектора $\mathbf{x}$ из (7) определяют сквозную значимость содержания разделов изучаемых дисциплин по количеству прямых и обратных логических связей всех порядков вхождения. Результирующая значимость содержания разделов устанавливается пропорционально суммарной внутренней и внешней значимости с одним и тем же коэффициентом пропорциональности. Вследствие этого результирующий вектор внешней и внутренней значимости, обозначенный через $\mathbf{z}$, удовлетворяет матричному уравнению

$$\beta \mathbf{z}^T = A \cdot \mathbf{z}^T + \mathbf{y}^T, \tag{10}$$

где $A \cdot \mathbf{z}^T$ – внутренняя значимость разделов по числу прямых связей; $\beta \geq 0$ - неизвестный коэффициент пропорциональности; y – вектор оценок внешней значимости разделов, составленный на основе подсчета числа дидактических единиц в каждом разделе.

Также верно, что

$$\mathbf{y}^T = \mathbf{z}^T + A^T \cdot \mathbf{z}^T, \tag{11}$$

где $A^T \cdot \mathbf{z}^T$ – вектор значимости содержания разделов учебных дисциплин с учетом только обратных связей. Выражение (11) объясняет тот факт, что оценка внешней значимости содержания каждого i-го раздела обусловливает оценки внешней значимости содержания других разделов, необходимых для изучения i-го раздела.

Подставляя (11) в (10), получим

$$\beta \mathbf{z}^T = (E + A + A^T) \cdot \mathbf{z}^T \tag{12}$$

или

$$(\beta - 1)\mathbf{z}^T = (A + A^T) \cdot \mathbf{z}^T. \tag{13}$$

Полученное уравнение соответствует (4) при $\lambda = \beta - 1$, $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.

Далее определим из (8), (9) число $(\beta - 1)$ и собственный вектор $\mathbf{z}$, а затем получим решение уравнения (10):

$$\mathbf{z}^T = (\beta E - A)^{-1} \cdot \mathbf{y}^T. \qquad (13)$$

Разложим матрицу $(\beta E - A)^{-1}$ в сходящийся ряд по степеням матрицы A [10]. Окончательная формула для определения вектора $\mathbf{z}$ будет иметь вид:

$$\mathbf{z}^T = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^k} A^k \cdot \mathbf{y}^T. \tag{14}$$

Предположим, что объем изучаемой дисциплины равен N часов, поэтому проведем нормировку вектора $\mathbf{z}$ из (14):

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{z}}{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i} N. \tag{15}$$

Таблица 1. Структура учебного материала

№ п/п	Наименование раздела	**y**	**v**
	Алгебраические структуры.		
1.	Абелевы группы. Кольца и поля. Подгруппы, подкольца и подполя.	2ч.	3ч.
2.	Поле комплексных чисел.	4ч.	3ч.
3.	Корни n - й степени из 1. Первообразные корни. Свойства первообразных корней.	2ч.	3ч.
4.	Кольца вычетов как фактор-множество по отношению эквивалентности.	2ч.	3ч.
5.	Векторные пространства.	2ч.	4ч.
6.	Алгебры.	2ч.	2ч.
7.	Алгебра матриц.	4ч.	3ч.
	Начала линейной алгебры		
8.	Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.	4ч.	4ч.
9.	Базис и размерность векторного пространства.	2ч.	2ч.
10.	Линейные отображения.	2ч.	3ч.
11.	Определители n-го порядка. Нахождение ранга матрицы с помощью миноров.	4ч.	4ч.
12.	Алгоритм вычисления обратной матрицы. Правило Крамера. Метод решения системы линейных алгебраических уравнений.	4ч.	5ч.
	Алгебра многочленов		
13.	Построение и основные свойства алгебры многочленов.	2ч.	3ч.
14.	Общие свойства корней многочленов.	2ч.	4ч.
15.	Основная теорема алгебры комплексных чисел.	2ч.	2ч.
16.	Корни многочленов с вещественными коэффициентами.	2ч.	2ч.
17.	Теория делимости в евклидовых кольцах.	2ч.	2ч.
18.	Многочлены с рациональными коэффициентами.	2ч.	2ч.
19.	Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены.	4ч.	3ч.
20.	Формулы Кардано, Феррари.	2ч.	2ч.
	Начала теории групп		
21.	Примеры групп.	3ч.	2ч.
22.	Циклические группы.	2ч.	2ч.
23.	Разбиение на смежные классы.	2ч.	2ч.
24.	Гомоморфизмы.	2ч.	2ч.

Таблица 2. Структура учебного материала. Продолжение

№ п/п	Наименование раздела	**у**	**v**
	Линейная алгебра. Векторные пространства		
25.	Взаимное расположение подпространств.	3ч.	2ч.
26.	Линейная функция или линейная форма.	3ч.	2ч.
27.	Квадратичные и билинейные функции.	4ч.	4ч.
28.	Евклидово пространство.	4ч.	4ч.
29.	Эрмитовы пространства.	4ч.	4ч.
	Теория линейных операторов		
30.	Матрица линейного оператора.	2ч.	2ч.
31.	Собственные числа и собственные векторы.	2ч.	2ч.
32.	Линейные операторы и билинейные функции в евклидовом пространстве.	5ч.	4ч.
33.	Жорданова форма.	3ч.	4ч.
34.	Функции от линейного оператора.	5ч.	6ч.
	Некоторые общеалгебраические структуры.		
35.	Факторструктуры.	5ч.	4ч.
36.	Прямые суммы.	2ч.	3ч.
	Коммутативные кольца		
37.	Модули над евклидовыми кольцами.	6ч.	4ч.
38.	Алгебраические расширения.	3ч.	4ч.
39.	Нетеровы кольца.	6ч.	3ч.
40.	Разложение на простые множители.	3ч.	3ч.
	Теория Галуа		
41.	Прямые и полупрямые произведения.	3ч.	2ч.
42.	Коммутант.	2ч.	2ч.
43.	Действия.	2ч.	2ч.
44.	Теорема Силова.	2ч.	2ч.
45.	Простые группы.	2ч.	2ч.
46.	Расширения Галуа.	4ч.	4ч.
47.	Основная теорема теории Галуа.	2ч.	4ч.

Таблица 3. Индексы ненулевых элементов матрицы логических связей между разделами учебного материала

i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j	i	j
1	2	2	14	5	31	7	31	10	30	14	15	18	15	21	47	26	32	35	46
1	3	2	15	5	32	7	32	10	34	14	16	18	16	22	3	26	34	35	47
1	4	2	16	5	33	7	33	11	8	14	17	18	19	22	45	27	28	36	37
1	6	2	20	5	34	7	34	11	12	14	18	18	20	22	46	27	29	37	38
1	9	2	21	5	35	7	35	11	16	14	19	18	31	22	47	28	5	37	39
1	10	2	28	5	38	8	9	11	17	14	20	18	33	23	22	28	29	37	40
1	13	2	29	6	2	8	10	11	20	14	38	18	40	23	24	28	32	38	40
1	15	2	31	6	5	8	11	11	27	14	46	18	46	23	35	29	5	38	46
1	17	3	5	6	7	8	12	11	28	14	47	19	14	23	36	29	32	38	47
1	18	3	15	6	13	8	25	11	29	15	2	19	20	23	41	30	26	39	1
1	19	3	17	6	15	8	30	11	30	15	3	19	26	23	42	30	31	39	38
1	21	3	18	6	16	8	33	11	31	15	16	19	27	23	43	30	32	39	40
1	22	3	20	6	19	8	34	11	32	15	17	19	38	23	44	30	33	40	45
1	23	3	22	6	21	9	10	11	33	15	18	20	16	23	45	30	34	40	46
1	24	4	23	6	24	9	11	11	34	15	20	20	31	23	46	31	5	40	47
1	25	4	35	6	30	9	25	12	8	15	29	20	33	23	47	31	32	41	42
1	26	4	36	6	35	9	26	12	11	15	46	20	34	24	10	31	33	41	43
1	30	4	38	6	36	9	27	12	30	16	3	21	1	24	23	31	34	41	44
1	34	4	40	6	37	9	28	13	14	16	17	21	3	24	34	32	28	41	45
1	35	4	43	6	38	9	29	13	15	16	18	21	7	24	35	32	33	41	46
1	36	4	46	6	40	9	31	13	16	16	19	21	10	24	38	32	34	41	47
1	37	4	47	6	47	9	32	13	17	16	20	21	11	24	43	33	30	42	43
1	38	5	2	7	6	9	34	13	18	16	31	21	19	24	46	33	31	42	44
1	39	5	6	7	8	10	5	13	19	16	33	21	22	25	26	33	34	43	44
1	40	5	7	7	10	10	11	13	20	17	2	21	23	25	28	34	30	43	45
1	44	5	8	7	11	10	12	13	31	17	18	21	24	25	29	34	31	43	46
1	45	5	9	7	21	10	14	13	38	17	20	21	37	25	30	35	4	43	47
1	46	5	10	7	25	10	21	13	39	17	37	21	41	25	32	35	21	44	45
1	47	5	11	7	26	10	25	13	40	17	38	21	42	25	34	35	36	45	47
2	3	5	25	7	27	10	26	13	46	17	39	21	43	26	27	35	37	46	47
2	4	5	28	7	28	10	27	13	47	17	40	21	44	26	28	35	38	47	16
2	5	5	29	7	29	10	28	14	2	17	46	21	45	26	29	35	39	47	20
2	13	5	30	7	30	10	29	14	3	18	14	21	46	26	30	35	40		

2. Рассмотрим задачу построения оптимальной последовательности учебной дисциплины.

Будем минимизировать функцию F:

$$F = \sum_i t_i \cdot K_{1i} \to \min, \tag{16}$$

где t_i – время начала изучения i-го раздела, определяемое от начального периода обучения и равное сумме объемов в учебных часах всех предыдущих разделов по допустимой последовательности; K_{1i} – число логических связей в интервале $[i-1, i]$. В данном случае допустимой последовательностью называется последовательность номеров в том порядке, в котором расположены разделы изучаемой дисциплины.

Таким образом, оптимальной последовательностью является такая допустимая последовательность изучения разделов учебной дисциплины, для которой суммарный интервал времени между окончанием изучения каждого предыдущего раздела и началом изучения каждого последующего раздела, логически связанного по содержанию с предыдущим, является минимальным.

Будем решать задачу оптимизации последовательности (16) с помощью модификации метода ветвей и границ [11].

Сначала составляется матрица логических связей A между разделами учебных дисциплин. После этого проводится операция удаления контуров графа G, изоморфного матрице логических связей A, после чего матрица приводится к верхнетреугольному виду.

Введем понятие потенциала i-го раздела в соответствие с формулой:

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}, \tag{17}$$

где a_{ij} – элементы матрицы A. Фактически потенциал K_i равен разности количества исходящих и входящих дуг для i-й вершины.

На следующем этапе построения оптимальной последовательности для каждой вершины графа G определяются все вершины, в которые можно попасть из нее, а также все вершины, из которых можно попасть в эту вершину. Таким образом, определяется множество вершин графа, перестановочных с данной вершиной.

Далее следует включить в рассмотрение объем часов $\mathbf{v}$, необходимый для изучения разделов дисциплины. С этой целью введем в рассмотрение матрицу Q, на главной диагонали которой расположены величины, обратно пропорциональные объемам изучаемых разделов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Все внедиагональные элементы матрицы Q равны нулю.

На основе построенных матриц Q и A определим две матрицы:

$$D_1 = A \cdot Q \text{ и } D_2 = A^T \cdot Q. \tag{18}$$

Матрицы D_1 и D_2 используются для вычисления окончательных значений потенциалов разделов учебных дисциплин в следующем порядке:

1. Вычисляются векторы $\mathbf{z}_k$ $(k = 1, 2)$:

$$\mathbf{z}_k^T = (\lambda E - D_k)^{-1} \cdot A^T - \frac{A^T}{\lambda}, \tag{19}$$

где λ – максимальное собственное значение матрицы A, определяемое на основе итерационного процесса (8), (9).

2. Векторы $\mathbf{z}_k$ нормируются в соответствии с количеством часов, выделенных на изучение разделов:

$$\bar{\mathbf{z}}_{kk} = \mathbf{z}_k \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} z_{ki}}. \tag{20}$$

3. Определяется вектор окончательных значений потенциалов $\mathbf{z}$:

$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}_{11} - \bar{\mathbf{z}}_{22}. \tag{21}$$

На основе полученного вектора $\mathbf{z}$ проводится определение оптимальной последовательности изучения разделов следующим образом.

В исходной матрице A определяются все нулевые столбцы, которые заносятся в порядке определения в рабочий вектор $\mathbf{u}$. Для вершин этого вектора вычисляются потенциалы $K(i)$:

$$K(i) = \sum_{K_i} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{K_i}), \tag{22}$$

где $\mathbf{z}_i$ – потенциал вершины, соответствующей нулевому столбцу матрицы A; $\mathbf{z}_{K_i}$ – потенциалы тех вершин, которые перестановочны с анализируемой i-й вершиной.

Составляется вектор оптимальной последовательности $\mathbf{w}$, в который заносится номер той вершины, значение потенциала $K(i)$ которой минимально. Если таких вершин несколько, то из вектора $\mathbf{u}$ в вектор $\mathbf{w}$ заносится номер вершины, который стоит первым по порядку в векторе $\mathbf{u}$. После этого все элементы строки матрицы A приравниваются нулю при занесении раздела с соответствующим номеров в вектор $\mathbf{u}$. Указанная операция продолжается до тех пор, пока в вектор $\mathbf{w}$ не будут занесены все номера разделов учебных дисциплин.

3. На основе алгоритмов, разработанных в п. 1 и 2, была построена оптимальная последовательность изучения разделов дисциплины «Алгебра». Изучаемый материал отбирался в соответствии с государственным образовательным стандартом по специальности 03.21.00 - «Учитель математики». Объем лекционных часов, отводимых на изучение этой дисциплины, составляет 140 часов. Разделы курса «Алгебра» приведены в таблицах 1 и 2. В таблице 3 представлены индексы ненулевых элементов матрицы логических связей между разделами курса. Следует напомнить, что $a_{ij} = 1$, если при изучении j-го раздела используется информация из i-го. В третьем столбце таблиц 1 и 2 указан объем часов $\mathbf{y}$, выделенных на изучение разделов в соответствии с числом дидактических единиц (вектор внешней значимости). Четвертый столбец представляет собой вектор **v** - результирующий объем часов, полученный на основе алгоритма п. 1. Объем часов, отведенных на практические занятия по каждому разделу, пропорционален объему лекционных часов. Указанная в таблицах 1 и 2 последовательность изучения разделов является оптимальной с точки зрения алгоритма, описанного в п. 2.

Алгоритм решения задачи построения оптимальной учебной программы изучаемой дисциплины реализован в среде символьных вычислений *Maple V Power Edition* [13, 14] с применением пакетов *linalg* и *networks* [15]. Время структуризации учебного материала на компьютере AMD Athlon K7 600 MHz составляет 3 мин.

На основе структуры курса «Алгебра» (табл. 1, 2) составлена учебная программа, которая успешно реализуется в Нижневартовском государственном педагогическом институте.

Литература

1. Берсенадзе Б.В. *Оценка эффективности и оптимизация учебного процесса на основе вероятностных моделей: Дис. ... канд. пед. наук.* М., 1980. 177 с.
2. Терещенко Л.Я., Панов В.Н., Майоркин С.Г. *Управление обучением с помощью ЭВМ.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 168 с.
3. *Применение математических методов для оптимизации последовательности изучения дисциплин.* М.: Изд-во НИИ ВШ, 1982. 40 с.
4. Нерсесов Т.В. *Построение моделей и разработка алгоритмов дискретной оптимизации автоматизированного решения задач управления: на примере управления подготовкой инженерных кадров:* Дис. ... канд. техн. наук. М., 1983. 134 с.
5. Кочкин Н.Н. *Аналитические методы проектирования учебных планов и программ высшей школы:* Дис. ... канд. пед. наук. М., 1985. 176 с.
6. Оре О. *Графы и их применение.* Новокузнецк: НФМИ, 2000. 168 с.
7. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1967. 575 с.
8. Шевцов Г.С. *Линейная алгебра.* М.: Гардарика, 1999. 360 с.
9. Ракитин В.И., Первушин В.Е. *Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров.* М.: Высшая школа, 1998. 383 с.
10. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. *Матричные вычисления.* М.: Мир, 1999. 548 с.
11. Черкасов Б.П. *Совершенствование учебных планов и программ на базе сетевого планирования.* М.: Высшая школа, 1975. 78 с.
12. *Государственный образовательный стандарт по специальности 03.21.00 - «Учитель математики».* М.: Министерство образования РФ, 2000. `http://db.informika.ru/spe/os_zip/032100.zip.`
13. Манзон Б.М. *Maple V Power Edition.* М.: Филинъ, 1998. 240 с.
14. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. *Введение в Maple. Математический пакет для всех.* М.: Мир, 1997. 208 с.
15. Дьяконов В.П. *Математическая система Maple V R3/R4/R5.* М.: Солон, 1998. 400 с.