Математические структуры и моделирование
2000, вып. 6, с. 21–28

УДК 513.813

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВА БИАНКИ

Ю.Ф. Борисов

The geometric proof of Bianchi identity in the Riemannian geometry without torsion is given.

В римановой геометрии известно тождество Бианки для тензора кривизны

$$\nabla_m R^i_{kl,n} + \nabla_k R^i_{lm,n} + \nabla_l R^i_{mk,n} = 0. \tag{1}$$

В данной статье дается новое доказательство тождества (1) в пространстве без кручения. Оно позволяет вскрыть геометрический смысл тождества.

1. Аналитическое доказательство тождества Бианки

Во всех учебниках тождество Бианки доказывается следующим образом [1, с.131]. В локально-геодезических координатах в некоторой точке можно обратить символы Кристоффеля в нуль. Поэтому

$$\nabla_m R^i_{kl,n} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m \partial x^n} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{km}}{\partial x^l \partial x^n}\ .$$

Аналогично:

$$\nabla_k R^i_{lm,n} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{lm}}{\partial x^k \partial x^n} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{lk}}{\partial x^m \partial x^n},$$

$$\nabla_l R^i_{mk,n} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{mk}}{\partial x^l \partial x^n} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{ml}}{\partial x^k \partial x^n}.$$

Складывая эти три выражения и учитывая, что кручение равно нулю, т.е. $\Gamma^i_{mk} = \Gamma^i_{km}$, получаем тождество (1). Как видим, доказательство простое, но, какой геометрический смысл скрывается за тождеством – остается не известным.

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск.

Статья подготовлена к печати преподавателями кафедры математического моделирования на основе записей лекций Ю.Ф. Борисова, сделанных в 1968 г.

2. Приближенные формулы для параллельного переноса вектора

Параллельным переносом вектора ξ_0^i по кусочно гладкому контуру $\mathcal{L} = \{x^i = x^i(t) : t \in [0,1]\}$ называется векторное поле $\xi^i(e)$, являющееся решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi^i}{dt} = -\Gamma^i_{kl}\xi^k\dfrac{dx^l}{d\tau} \ ; \\ \xi_0^i = \xi_0^i. \end{cases} \qquad (2)$$

Будем считать, что векторное поле $\xi^i(t)$ ограничено на $\mathcal{L}$, т.е.

$$|\xi_i(t)| \leq C. \qquad (3)$$

Интегрируя (1), получаем

$$\xi^i(t) = \xi_0^i - \int\limits_0^t \Gamma^i_{kl}\xi^k(\tau)\frac{dx^l}{d\tau}d\tau. \qquad (4)$$

Интегральное уравнение (4) решаем методом итераций. Взяв за начальное приближение значение ξ_0^i, имеем на 1-м шаге

$$\xi_1^i(t) = \xi_0^i - \int\limits_0^t \Gamma^i_{kl}\xi_0^k(\tau)\frac{dx^l}{d\tau}d\tau.$$

Оценим погрешность

$$[\xi_1^i(t) - \xi^i(t)] = \int\limits_0^t \Gamma^i_{kl}(\xi^k(\tau) - \xi_0^k(\tau))\frac{dx^l}{d\tau}d\tau.$$

С учетом (2)

$$|\xi_1^k(t) - \xi^k(t)| \leqslant A_1 \cdot t^2.$$

На 2-м шаге итерации

$$\xi_2^i(t) = \xi_0^i - \int\limits_0^t \Gamma^i_{kl}\xi_1^k(\tau)\frac{dx^l}{d\tau}d\tau,$$

поэтому

$$|\xi_2^i(t) - \xi^i(t)| \leqslant A_2 \cdot t^3.$$

Делаем еще шаг:

$$\xi_3^i(t) = \xi_0^i - \int\limits_0^t \Gamma^i_{kl}\xi_2^k(\tau)\frac{dx^l}{d\tau}d\tau,$$

для которого ошибка
$$|\xi_3^i(t) - \xi^i(t)| \leqslant A_3 \cdot t^4.$$
Таким образом,
$$\xi^i(t) = \xi_3^i(t) + o(t^3).$$
Приостановим выполнение итераций и выпишем явно $\xi_2^i(t)$.

Имеем
$$\xi_2^i(t) = \xi_0^i - \int\limits_0^t \Gamma_{kl}^i \left(\xi_0^k - \int\limits_0^\tau \Gamma_{\alpha\beta}^k \xi_0^\alpha \frac{dx^\beta}{dy} dy \right) \frac{dx^l}{d\tau} d\tau =$$
$$= \xi_0^i - \int\limits_0^t \Gamma_{kl}^i \xi_0^k \frac{dx^l}{d\tau} d\tau + \xi_0^\alpha \int\limits_0^t \Gamma_{kl}^i \left[\int\limits_0^\tau \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{dx^\beta}{dy} dy \right] \frac{dx^l}{d\tau} d\tau =$$
$$= \xi_0^i + \xi_0^\alpha f_\alpha^i(t),$$
где
$$f_\alpha^i(t) = -\int\limits_0^t \Gamma_{\alpha l}^i \frac{dx^l}{d\tau} d\tau + \int\limits_0^t \Gamma_{kl}^i \left[\int\limits_0^\tau \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{dx^\beta}{dy} dy \right] \frac{dx^l}{d\tau} d\tau.$$
Выпишем следующее приближение:
$$\xi_3^i(t) = \xi_0^i - \int\limits_0^t \Gamma_{kl}^i \left(\xi_0^k + \xi_0^\alpha f_\alpha^k(\tau) \right) \frac{dx^l}{d\tau} d\tau = \xi_0^i - \xi_0^k \int\limits_0^t \Gamma_{kl}^i \frac{dx^l}{d\tau} d\tau -$$
$$-\xi_0^\alpha \int\limits_0^t \Gamma_{kl}^i f_\alpha^k(\tau) \frac{dx^l}{d\tau} d\tau = \xi_0^i + \xi_0^\alpha g_\alpha^i(t), \tag{5}$$
где
$$g_\alpha^i(t) = -\int\limits_0^t \Gamma_{\alpha l}^i \frac{dx^l}{d\tau} d\tau - \int\limits_0^t \Gamma_{kl}^i f_\alpha^k(\tau) \frac{dx^l}{d\tau} d\tau.$$
При вычислении g_α^i мы будем пренебрегать слагаемыми, содержащими t^m с показателем степени $m > 3$. Это означает, что при вычислении f_α^k можно делать ошибки порядка > 2, так как при интегрировании «ошибок» для f_α^k порядка 3 получаем «ошибки» для g_α^i порядка 4 (т.е. порядок ошибки увеличится на 1).

Поэтому во 2-м слагаемом выражения для g_α^i символы Γ_{jk}^i меняем на $\left(\Gamma_{jk}^i\right)_0 = \left(\Gamma_{jk}^i\right)(x^1(0), ..., x^n(0))$, а в 1-м слагаемом символы Γ_{jk}^i заменяем на $\left(\Gamma_{jk}^i\right)_0 + (\partial\Gamma_{jk}^i/\partial x^m)_0 \Delta x^m$.

Тогда вместо $f_\alpha^k(t)$ имеем $\tilde{f}_\alpha^k(t)$, где
$$\tilde{f}_\alpha^i(t) = -\int\limits_0^t \left[\left(\Gamma_{\alpha l}^i\right)_0 + \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha l}^i}{\partial x^\gamma}\right)_0 \Delta x^\gamma \right] \frac{dx^l}{d\tau} d\tau + \left(\Gamma_{kl}^i\right)_0 \left(\Gamma_{\alpha\beta}^k\right)_0 \int\limits_0^t \Delta x^\beta \frac{dx^l}{d\tau} d\tau.$$

Пусть

$$\tilde{g}^i_\alpha(t) = -\int\limits_0^t \Gamma^i_{\alpha l}\frac{dx^l}{d\tau}d\tau - \int\limits_0^t \Gamma^i_{kl}\tilde{f}^k_\alpha(\tau)\frac{dx^l}{d\tau}d\tau.$$

При этом имеем:

$$g^i_\alpha(t) = \tilde{g}^i_\alpha(t) + o(t^3).$$

Во втором слагаемом в $\tilde{g}^i_\alpha(t)$ делаем замену Γ^i_{jk} на $\left(\Gamma^i_{jk}\right)_0 + \left(\partial\Gamma^i_{jk}/\partial x^\gamma\right)_0\Delta x^\gamma$, что дает ошибку 1-го порядка, умножаемую на f с ошибкой > 1; с учетом интегрирования получается допустимая ошибка порядка > 3.

В таком случае

$$\Gamma^i_{kl}\tilde{f}^k_\alpha(\tau) = \left\{\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 + \left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^\gamma}\right)_0\Delta x^\gamma\right\}\{-(\Gamma^k_{\alpha j})_0\Delta x^j - (\frac{\partial\Gamma^k_{\alpha j}}{\partial x^s})_0\int\limits_0^\tau \Delta x^s\frac{dx^j}{dy}dy+$$

$$+(\Gamma^k_{rj})_0\left(\Gamma^r_{\alpha\beta}\right)_0\int\limits_0^\tau \Delta x^\beta\frac{dx^j}{dy}dy\} + o(\tau^2) =$$

$$= -\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0\left(\Gamma^k_{\alpha j}\right)_0\Delta x^j - \left(\Gamma^i_{kl}\right)_0\left(\frac{\partial\Gamma^k_{\alpha j}}{\partial x^s}\right)_0\int\limits_0^\tau \Delta x^s\frac{dx^j}{dy}dy-$$

$$-\left(\Gamma^k_{\alpha j}\right)_0\left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^\gamma}\right)\Delta x^\gamma\Delta x^j - \left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^\gamma}\right)_0\left(\frac{\partial\Gamma^k_{\alpha j}}{\partial x^s}\right)_0\Delta x^\gamma\int\limits_0^\tau \Delta x^s\frac{dx^j}{dy}dy+$$

$$+\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0\left(\Gamma^k_{rj}\right)_0(\Gamma^r_{\alpha\beta})_0\int\limits_0^\tau \Delta x^\beta\frac{dx^j}{dy}dy + \left(\Gamma^k_{rj}\right)_0\left(\Gamma^r_{\alpha\beta}\right)_0\left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^\gamma}\right)_0\Delta x^\gamma\int\limits_0^\tau \Delta x^\beta\frac{dx^j}{dy}dy + o(\tau^2)$$

или

$$\Gamma^i_{kl}\tilde{f}^k_\alpha(\tau) = -\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0\left(\Gamma^k_{\alpha\beta}\right)_0\Delta x^\beta - \left(\Gamma^i_{kl}\right)_0\left(\frac{\partial\Gamma^k_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)_0\int\limits_0^\tau \Delta x^\gamma\frac{dx^\beta}{dy}dy-$$

$$-\left(\Gamma^i_{\alpha\beta}\right)_0\left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^\gamma}\right)_0\int\limits_0^\tau \Delta x^\gamma\frac{dx^\beta}{dy}dy + o(\tau^2).$$

Используя это, получаем:

$$\tilde{g}^i_\alpha(t) = -\int\limits_0^t \Gamma^i_{kl}\frac{dx^l}{d\tau}d\tau + \left(\Gamma^i_{kl}\right)_0\left(\Gamma^k_{\alpha\beta}\right)_0\int\limits_0^t \Delta x\frac{dx}{d\tau}d\tau+$$

$$+\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0\left(\frac{\partial\Gamma^k_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)_0\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\tau \Delta x^\gamma\frac{dx^\beta}{dy}dy\right)\frac{dx^l}{d\tau}d\tau+$$

$$+ (\Gamma^k_{\alpha\beta})_0 \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^\gamma}\right)_0 \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau \Delta x^\gamma \frac{dx^\beta}{dy} dy\right) \frac{dx^l}{d\tau} d\tau + o(t^3).$$

Интегрируя по частям

$$\int\limits_0^t \underbrace{\left(\int\limits_0^\tau \Delta x^\gamma \frac{dx^\beta}{dy} dy\right)}_{u(\tau)} \quad \underbrace{\frac{dx^l}{d\tau} d\tau}_{\substack{dv(\tau) \\ v(\tau) = \Delta x^l}} \quad = [uv]\Big|_0^t - \int\limits_0^t \Delta x^l \Delta x^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau} d\tau =$$

$$= (\Delta x^l)(t) \int\limits_0^t \Delta x^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau} d\tau - \int\limits_0^t \Delta x^l \Delta x^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau} d\tau.$$

Следовательно:

$$g^i_\alpha(t) = -\int\limits_0^t \Gamma^i_{\alpha l} \frac{dx^l}{d\tau} d\tau + (\Gamma^i_{kl})_0 (\Gamma^k_{\alpha\beta})_0 \int\limits_0^t \Delta x^\beta \frac{dx^l}{d\tau} d\tau +$$

$$+ \left\{ (\Gamma^i_{kl})_0 \left(\frac{\partial \Gamma^k_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)_0 + (\Gamma^k_{\alpha\beta})_0 \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^\gamma}\right)_0 \right\} \Delta x^l \int\limits_0^t \Delta x^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau} d\tau -$$

$$- \left\{ (\Gamma^i_{kl})_0 \left(\frac{\partial \Gamma^k_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}\right)_0 + (\Gamma^k_{\alpha\beta})_0 \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^\gamma}\right)_0 \right\} \int\limits_0^t \Delta x^l \Delta x^\gamma \frac{dx^\beta}{d\tau} d\tau + o(t^3) =$$

$$= I + II + III + IV + o(t^3), \tag{6}$$

где в последней строке римскими цифрами обозначено каждое из четырех слагаемых в формуле для $g^i_\alpha(t)$.

Формулы (5), (6) дают приближенное решение уравнений (2), описывающих параллельное перенесение вектора по некоторому контуру $\mathcal{L}$.

3. Вывод тождества Биянки

Возьмем точку x_0, в окрестности которой введены локально-геодезические координаты $x^1, x^2, ..., x^n$, причем

$$(\Gamma^i_{kl})_0 = 0. \tag{7}$$

Зададим в точке x_0 вектор ξ_0.

Фиксируем какие-либо три координатные линии, взятые в определенном порядке. Присвоим этим линиям номера 1,2 и 3 и рассмотрим координатный куб K с вершиной в некоторой точке x_0:

$$K = \{(x^1, x^2, x^3, ...) : x^i_0 \le x^1 \le x^i_0 + h (i = 1,2,3) \ \& \ x_k = const \ (k > 3)\}.$$

Ориентируем кубик тремя векторами, идущими по ребрам, и ориентируем его грани с помощью индуцированной ориентации, а также введем индуцированные ориентации граней этих граней.

Рассмотрим ориентированные контуры (рис.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{1,2} &: \Gamma_{(1,2)} + l_3 + \Gamma^1_{(1,2)} + l_3^-, \\ \mathcal{L}_{2,3} &: \Gamma_{(2,3)} + l_1 + \Gamma^1_{(2,3)} + l_1^-, \\ \mathcal{L}_{3,1} &: \Gamma_{(3,1)} + l_2 + \Gamma^1_{(3,1)} + l_2^-. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь контур $\Gamma_{(1,2)}$ лежит в грани $x^3 = 0$ и является произведением четырех ребер, т.е. последовательно обходятся ребра куба; контур $\Gamma^1_{(1,2)}$ в грани $x^3 = h$ аналогичен контуру $\Gamma_{(1,2)}$; отрезок l_3 идет вдоль оси x от значения 0 до значения h, а отрезок l_3^- – это отрезок l_3, но проходимый в обратном направлении (см. левый куб на рис.1). Аналогично определяются остальные контуры в формулах (8).

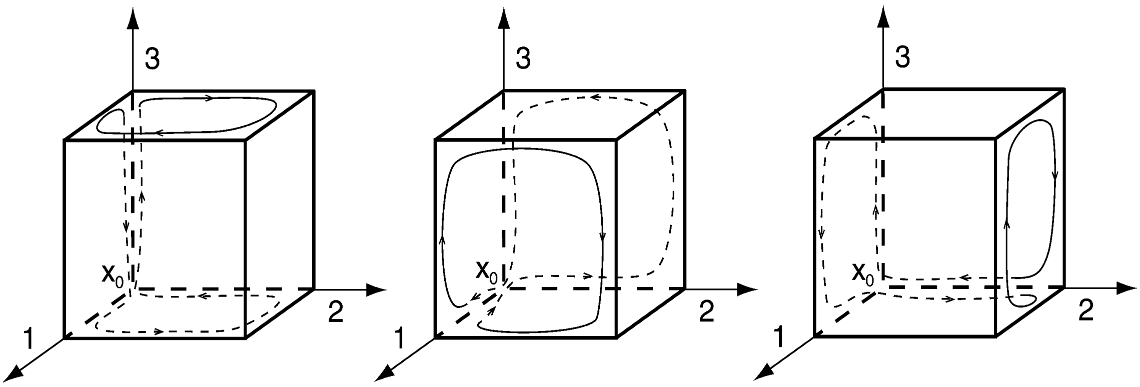

Рис. 1. Контуры $\mathcal{L}_{1,2}$, $\mathcal{L}_{2,3}$ и $\mathcal{L}_{3,1}$

Рассмотрим контур, который является произведением этих трех:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{3,1}\mathcal{L}_{2,3}\mathcal{L}_{1,2}.$$

Перенесем параллельно вектор ξ_0 по контуру $\mathcal{L}$. Воспользуемся формулами (5), (6), в которых вместо t подставим $30h$ (30 – число прохождений ребер, входящих в контур $\mathcal{L}$). Тогда разница $(\Delta\xi)_{\mathcal{L}} = \xi_3 - \xi_0$ между исходным вектором ξ_0 и результатом его параллельного перенесения по замкнутому $\mathcal{L}$ имеет порядок малости выше, чем h^3.

Формула (6) представляет собой сумму криволинейных интегралов вида

$$\int \phi(X)\frac{dx^j}{d\tau}d\tau,$$

где $\phi(X)$ – функция точки, τ – естественная параметризация ориентированной дуги. Слагаемые вида

$$b_j\Delta x^j \int \phi(X)\frac{dx^j}{d\tau}d\tau = 0,$$

так как $\Delta x^j = 0$ для всего контура $\mathcal{L}$.

Поскольку контур $\mathcal{L}$ состоит из ориентированных ребер и каждое ребро проходится одинаковое число раз в противоположных направлениях, то

$$\underbrace{(\Delta\xi)_{\mathcal{L}}}_{=0} = \underbrace{\xi_0^\alpha[g^i_\alpha(\mathcal{L}_{1,2}) + g^i_\alpha(\mathcal{L}_{2,3}) + g^i_\alpha(\mathcal{L}_{3,1})]}_{=0} + o(h^3) = 0. \qquad (9)$$

Вычислим теперь $(\Delta\xi)_{\mathcal{L}_{1,2}}$, используя формулы (5), (6) и (7). Получаем, что

$$\Delta\xi^i = -\xi_0^\beta \int\limits_0^{10h} \Gamma^i_{\beta l}\frac{dx^l}{d\tau}d\tau + o(h^3).$$

Пусть $\mathcal{L}'_{1,2}$, $\mathcal{L}''_{1,2}$ – части контура $\mathcal{L}_{1,2}$, соответствующие нижней и верхней граням.

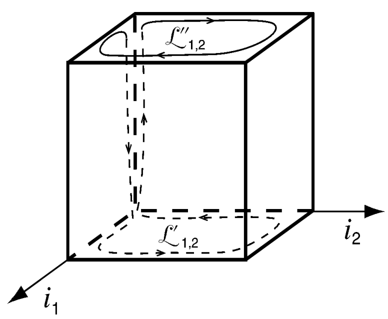

Рис. 2. Контур $\mathcal{L}_{1,2}$

Для $\mathcal{L}'_{1,2}$ имеем

$$\int\limits_0^{10h} \Gamma^i_{\beta q}\frac{dx^q}{d\tau}d\tau = \oint\limits_{\mathcal{L}'_{1,2}} \Gamma^i_{\beta q}\frac{\partial x^q}{\partial u^1}du^1 + \Gamma^i_{\beta q}\frac{\partial x^q}{\partial u^2}du^2 =$$

$$= \int\limits_D\int \frac{\partial\Gamma^i_{\beta q}}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial x^\gamma}{\partial u^1}\frac{\partial x^q}{\partial u^2} - \frac{\partial x^\gamma}{\partial u^2}\frac{\partial x^q}{\partial u^1}\right)du^1du^2 = \int\limits_D\int\left(\frac{\partial\Gamma^i_{\beta q}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma^i_{\beta\gamma}}{\partial x^q}\right)x^{\gamma q}du^1du^2 =$$

$$= \iint\limits_D\left(\frac{\partial\Gamma^i_{\beta i_2}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial\Gamma^i_{\beta i_1}}{\partial x^{i_2}}\right)\frac{1}{2}du^1du^2 + \iint\limits_D\left(\frac{\partial\Gamma^i_{\beta i_1}}{\partial x^{i_2}} - \frac{\partial\Gamma^i_{\beta i_2}}{\partial x^{i_1}}\right)(-\frac{1}{2})du^1du^2 =$$

$$= \iint\limits_D\left(\frac{\partial\Gamma^i_{\beta i_2}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial\Gamma^i_{\beta i_1}}{\partial x^{i_2}}\right)du^1du^2,$$

так как мы интегрируем по площадке, нижней грани, составленной из координатных линий i_1 и i_2.

Для $\mathcal{L}''_{1,2}$ проводим аналогичные выкладки, но с учетом того, что для верхнего контура ориентация задается противоположная (но и символы Кристоффеля Г конечно «свои», т.к. они вычисляются в других точках)

$$\mathcal{L}''_{1,2} : \iint\limits_D - \left(\frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_2}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_1}}{\partial x^{i_2}} \right) du^1 du^2.$$

По «перемычке» $l_3 \cup l_3^-$ вклад в $(\Delta\xi^i)_{\mathcal{L}_{1,2}}$ очевидно нулевой, поэтому интеграл по $\mathcal{L}_{1,2}$ складывается из интегралов по $\mathcal{L}'_{1,2}$ и $\mathcal{L}''_{1,2}$.

Итак

$$(\Delta\xi^i)_{\mathcal{L}_{1,2}} = -\xi_0^\beta \iint\limits_D \Delta \left(\frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_2}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_1}}{\partial x^{i_2}} \right) du^1 du^2, \tag{10}$$

где приращение берется при переходе с нижней грани на верхнюю, т.е. при изменении координаты x_{i_3} на h.

Предполагаем, что поле связности является гладким, точнее класса C^2. Тогда

$$\Delta \left(\frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_2}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_1}}{\partial x^{i_2}} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x^{i_3}} \left(\frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_2}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_1}}{\partial x^{i_2}} \right) \right]_0 h + o(h).$$

Подставляя это в (10), имеем с учетом выражения для тензора кривизны

$$(\Delta\xi^i)_{\mathcal{L}_{1,2}} = -\xi_0^\beta \left[\frac{\partial}{\partial x^{i_3}} \left(\frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_2}}{\partial x^{i_1}} - \frac{\partial \Gamma^i_{\beta i_1}}{\partial x^{i_2}} \right) \right]_0 h^3 + o(h^3) =$$

$$= -\xi_0^\beta \nabla_{i_3} R^i_{i_2 i_1,\ \beta} h_\sigma + o(h^3) = \xi_0^\beta \nabla_{i_3} R^i_{i_1 i_2,\ \beta} h_\sigma + o(h^3).$$

Ввиду того, что для контуров $\mathcal{L}_{3,1}$ и $\mathcal{L}_{2,3}$ можно выполнить подобные вычисления, в результате получим, учитывая (9):

$$(\Delta\xi^i)_{\mathcal{L}} = (\Delta\xi^i)_{\mathcal{L}_{1,2}} + (\Delta\xi^i)_{\mathcal{L}_{2,3}} + (\Delta\xi^i)_{\mathcal{L}_{3,1}} =$$

$$= \xi_0^\beta (\nabla_{i_3} R^i_{i_1 i_2,\beta} + \nabla_{i_3} R^i_{i_2 i_3,\beta} + \nabla_{i_3} R^i_{i_3 i_1,\beta}) h^3 + o(h^3) = o(h^3). \tag{11}$$

Деля (11) на h^3 и переходя к пределу при $h \to 0$, получаем в силу произвольности вектора ξ_0^β

$$\nabla_{i_3} R^i_{i_1 i_2,\beta} + \nabla_{i_3} R^i_{i_2 i_3,\beta} + \nabla_{i_3} R^i_{i_3 i_1,\beta} = 0.$$

Тем самым тождество Бианки доказано.

Замечание 1. Для вывода тождества Биянки для пространства с кручением необходимо воспользоваться формулами (5), (6) без каких-либо упрощений.

Литература

1. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* М.: Наука, 1976.