Математические
структуры и моделирование
2000, вып. 6, с. 12–20

УДК 517.5

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АППРОКСИМАЦИОННОГО ГРАДИЕНТА

С.И. Бигильдеев

Approximate gradient is used for investigation of extremal properties of nondifferential functions. In this paper approximate gradient is presented as convolution operator of investigated function and some weight function. The connection between this concept and garmonic analysis is established. Proposed interpretation of approximate gradient demonstrates it connection with Riesz transformation. It is shown that approximate gradient is the gradient of Poisson integral, Bessel and Riesz potentials when the weight function is specially chosen.

Введение

Понятие аппроксимационного градиента было введено В.Д. Батухтиным и Л.А. Майбородой [1]. Решая прикладные задачи недифференцируемой и разрывной оптимизации, они предложили исследовать экстремальные свойства недифференцируемой функции нескольких переменных с помощью градиента линейной функции, имеющей наименьшее среднеквадратическое отклонение вблизи рассматриваемой точки исследуемой функции.

В случае дифференцируемой функции этот вектор будет являться среднеквадратической аппроксимацией ее градиента, а при стягивании области интегрирования в точку будет с ним совпадать. Когда же функция не является дифференцируемой, то аппроксимационный градиент определяется неоднозначно и представляет собой интегральный оператор, зависящий от того, по какой мере и по какой области осуществляется интегрирование.

Исследования последних двадцати лет, проводимые В.Д. Батухтиным, Л.А. Майбородой и их учениками, показывают, насколько эта достаточно простая идея оказалась плодотворной и эффективной при исследовании экстремальных свойств функций.

С одной стороны, являясь в определенном смысле аналогом градиента дифференцируемой функции, аппроксимационный градиент позволил создавать аппарат, обобщающий классический анализ и методы численного решения задач недифференцируемой оптимизации, в которых он играл соответствующую роль. И первоначальное развитие основной идеи осуществлялось в этом направлении. Был получен ряд интересных теоретических результатов, которые послужили основой для написания монографий [1, 2]. На базе теории были

E-mail: sbig@math.cgu.chel.su
Челябинский государственный университет

созданы достаточно эффективные численные методы решения разрывных экстремальных задач, не имеющие аналогов ни у нас в стране, ни за рубежом [3, 4].

С другой стороны, неоднозначность определения аппроксимационного градиента позволяет создавать методы оптимизации, основанные на идеях выпуклого анализа и многозначных отображений. Это направление представляется достаточно перспективным. Оно позволяет расширить понятие дифференцируемости, распространяя его и на класс суммируемых функций, дифференциальные свойства которых более размытые, чем у выпуклых и локально липшицевых функций.

Такой подход к анализу экстремальных свойств суммируемых функций естественным образом вписывается в исследования в этой области. В этом направлении получен ряд интересных результатов [5–7]. Была установлена связь с субдифференциалом Ф. Кларка, с производными Соболева и усреднением по Стеклову, с дифференцированием в L^p и гармоническом смыслах. Часть этих результатов еще не отражена в публикациях.

В настоящей работе аппроксимационный градиент представлен как интегральный оператор свертки исследуемой и так называемой весовой функции. Здесь установлена связь этого понятия с гармоническим анализом. В предлагаемой интерпретации преобразования Рисса градиенты интеграла Пуассона и бесселевых потенциалов представляют собой аппроксимационные градиенты при соответствующем выборе весовой функции.

1. Основные понятия

Обозначим через $\mid s \mid$ евклидову норму вектора s, а B_r - шар радиуса r с центром в начале координат и введем несколько понятий.

Определение 1. $p_r(s) = \tilde{p}_r(\mid s \mid)$ - весовая функция, если

1^o для $\forall r > 0 \quad p_r(s) \geq 0 \ \ \forall s \in R^n$, $0 < d_r = \frac{1}{n} \int\limits_{R^n} \mid s \mid^2 p_r(s) ds < \infty$ и p_r может иметь особенность только в нуле, т. е. $p_r \in L^\infty(A)$ – для любого измеримого множества A, для которого $0 \notin \overline{A}$;

2^o для любой суммируемой финитной функции ($supp\ \varphi$ - компакт) [8] такой, что $\varphi(s) = \circ(\mid s \mid)$ при $\mid s \mid \to 0$ выполняется:

$$J_r = \frac{1}{d_r} \int\limits_{R^n} \mid s \mid \mid \varphi(s) \mid p_r(s) ds \ \to \ 0 \ \text{ при } \ r \to +0.$$

В дальнейшем множество весовых функций будем обозначать буквой P.

Отметим, что во 2^o пункте определения для $\forall r > 0$ $J_r < \infty$. Действительно, для функции φ с указанными свойствами $\exists c$, $0 < c < \infty$ и $\exists a > \delta > 0$ такие, что $supp\ \varphi \subseteq B_a$ и $\mid \varphi(s) \mid \leq c \mid s \mid \ \ \forall s \in B_\delta$. Представим интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$J_r = J_{1r} + J_{2r}, \tag{1}$$

где

$$J_{1r} = \frac{1}{d_r} \int\limits_{B_a \setminus B_\delta} \mid s \mid\mid \varphi(s) \mid p_r(s) ds, \quad J_{2r} = \frac{1}{d_r} \int\limits_{B_\delta} \mid s \mid\mid \varphi(s) \mid p_r(s) ds.$$

Но интеграл J_{2r} ограничен постоянной c, а

$$J_{1r} \leq \frac{a}{d_r} \parallel p_r \parallel_{L^\infty(B_a \setminus B_\delta)} \parallel \varphi \parallel_{L^1(B_a \setminus B_\delta)} < \infty \qquad (2)$$

в силу неравенства Гельдера [8].

Условие принадлежности весовой функции пространству $L^\infty(A)$ в пункте 1^o определения сужает множество весовых функций, но расширяет множество функций φ, для которых можно применять свертку с весовой функцией.

Нетрудно заметить, что пункт 2^o будет выполнен, если для $\forall r > 0$ $supp\, p_r \subseteq B_r$.

Действительно, в этом случае для любой функции φ из этого пункта

$$\left| \frac{1}{d_r} \int\limits_{R^n} \mid s \mid \varphi(s) p_r(s) ds \right| = \left| \frac{1}{d_r} \int\limits_{|s| \leq r} \mid s \mid \varphi(s) p_r(s) ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{d_r} \int\limits_{|s| \leq r} \mid s \mid \mid \varphi(s) \mid p_r(s) ds = \frac{1}{d_r} \int\limits_{|s| \leq r} \mid s \mid \circ(\mid s \mid) p_r(s) ds = \circ(1)$$

при $r \to +0$, так как здесь $d_r = \frac{1}{n} \int\limits_{|s| \leq r} \mid s \mid^2 p_r(s) ds$.

Следующее утверждение дает более общее достаточное условие того, что функция является весовой.

Предложение 1. *Пусть функция p_r удовлетворяет условиям пункта 1^o определения 1 и для любого измеримого множества A такого, что $0 \notin \overline{A}$ выполняется:*

$$\frac{1}{d_r} \parallel p_r \parallel_{L^\infty(A)} \to 0 \qquad (3)$$

при $r \to +0$. Тогда функция p_r является весовой.

Доказательство. Пусть суммируемая финитная функция $\varphi(s) = \circ(\mid s \mid)$ при $\mid s \mid \to 0$ и $supp\, \varphi \subseteq B_a$ для некоторого $a > 0$.

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $\delta < a$ такое, что $\mid \varphi(s) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} \mid s \mid$ для $\forall s \in B_\delta$.

Так же, как в (1), интеграл J_r представим в виде суммы интегралов J_{1r} и J_{2r}. В силу оценки (2) и условия (3) на функцию p_r $\lim\limits_{r \to +0} J_{1r} = 0$. Выберем $r^\star > 0$ и настолько малое, что $J_{1r} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $r \in (0; r^\star)$.

В результате $J_r \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ для $0 < r < r^\star = r^\star(\varepsilon)$ и, следовательно, $\exists \lim\limits_{r \to +0} J_r = 0$. ■

Определение 2. Пусть f - с компактным носителем суммируемая функция по мере Лебега на всем пространстве R^n, т.е. $f \in L^1(R^n)$. Аппроксимационным градиентом функции f в точке x будем называть интегральный оператор свертки

$$a_r(f)(x) = K * f = \int\limits_{R^n} K(s) f(x+s) ds,$$

где ядро $K(s) = \frac{1}{d_r} s p_r(s)$, $p_r \in P$.

Рассмотрим некоторые примеры весовых функций и интегральных операторов, связанных с аппроксимационным градиентом.

В работах [1, 2] аппроксимационный градиент определяется на функциях $p_r(s)$, которые задают вероятностную меру, сосредоточенную в шаре B_r. При этом не требуется, чтобы функции p_r зависели только от $\mid s \mid$. Однако, как показано в [6], более сложная зависимость функции p_r от вектора s может привести к тому, что при $r \to +0$ аппроксимационный градиент не будет принадлежать субдифференциалу даже для выпуклой функции f. Если же $p_r(s) = \tilde{p}_r(\mid s \mid)$, то для локально липшицевой функции f при $(y, r) \to (x, +0)$ аппроксимационный градиент $a_r(f)(y) \to \xi \in \partial_{Cl} f(x)$, где $\partial_{Cl} f(x)$ - субдифференциал Ф. Кларка [6].

Как будет показано ниже, данное здесь определение аппроксимационного градиента позволяет его рассматривать как некоторое семейство преобразований функции f. Прежде всего рассмотрим интеграл Пуассона.

2. Интеграл Пуассона

Интеграл Пуассона представляет собой свертку следующего вида [9]:

$$u(x, r) = \int\limits_{R^n} P_r(t)\, f(x - t) dt = P_r * f,$$

где $r > 0$, $P_r(t)$ - пуассоновское ядро,

$$P_r(t) = \frac{c_n r}{(\mid t \mid^2 + r^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}},$$

Γ - гамма-функция.

Интеграл Пуассона дает решение задачи Дирихле для $R^{n+1}_+ = \{(x, r) : \ x \in R^n, \ r > 0\}$: найти гармоническую функцию на R^{n+1}_+, граничным значением которой на R^n является $f(x)$.

Свойства пуассоновского ядра детально изучены. Напомним некоторые из них [10]:

1) $P_r(t) > 0$.
2) $\int\limits_{R^n} P_r(t) dt = P_r^{\wedge}(0) = 1$, где $P_r^{\wedge}(t) = e^{-2\pi |t| r}$ - преобразование Фурье.
3) $P_r \in L^p(R^n)$, $1 \le p < \infty$.
4) Если $f \in L^p(R^n)$ при $1 \le p \le \infty$, то $\triangle u = 0$ т.е. u - гармоническая функция в R^{n+1}_+.
5) $\lim\limits_{r \to +0} u(x, r) = f(x)$ п.в. для $f \in L^p(R^n)$, $1 \le p \le \infty$. Если $p < \infty$, то $\parallel u(x, r) - f(x) \parallel_{L^p} \to 0$ при $r \to 0$.

Осуществляя замены переменной интегрирования $t = -s$ и $s = y - x$, можно соответственно для интеграла Пуассона получить:

$$u(x, r) = \int\limits_{R^n} P_r(s)\, f(x + s) ds = \int\limits_{R^n} P_r(y - x)\, f(y) dy.$$

Так как
$$\frac{\partial P_r(y-x)}{\partial x_i} = \frac{c_n r(n+1)}{(\mid y-x\mid^2+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}(y_i-x_i),$$
то
$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int\limits_{R^n} s_i f(x+s)\frac{c_n r(n+1)}{(\mid s\mid^2+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}ds.$$

Функция $p_r(s)=\frac{c_n r(n+1)}{(|s|^2+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}\geq 0$ и $d_r=\frac{1}{n}\int\limits_{R^n}\mid s\mid^2 p_r(s)ds=1$. Действительно,
$$\int\limits_{R^n}\mid s\mid^2 p_r(s)ds = cJ_n,$$
где $c=c_n r(n+1)$; $J_n=\int\limits_{R^n}\frac{|s|^2}{(|s|^2+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}ds = \int\limits_0^\infty \frac{\rho^2}{(\rho^2+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}\rho^{n-1}d\rho\int\limits_S d\sigma$; $d\sigma$ - мера Лебега на единичной сфере $S=\{t\in R^n:\mid t\mid=1\}$ и $\int\limits_S d\sigma=\mu(S)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ [11].

Для интеграла J_n получим:
$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}}J_n = r^{-1}\int\limits_0^\infty\frac{\tau^{n+1}}{(\tau^2+1)^{\frac{n+3}{2}}}d\tau=$$
$$=(2r)^{-1}\int\limits_0^\infty\frac{t^{\frac{n}{2}}}{(t+1)^{\frac{n+3}{2}}}dt=(2r)^{-1}\beta\left(\frac{n+2}{2},\frac{1}{2}\right),$$
где $\beta(p,q)=\int\limits_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(t+1)^{p+q}}dt=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ - полная бета-функция.

Так как $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ и $\Gamma(\frac{1}{2})=\pi^{\frac{1}{2}}$, то
$$\int\limits_{R^n}\mid s\mid^2 p_r(s)ds=cJ_n=\frac{c_n r(n+1)2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}(2r)^{-1}\beta\left(\frac{n}{2}+1,\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\,\frac{(n+1)\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)}=\frac{n+1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\,\frac{\frac{n}{2}\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{n+1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}=n$$
и $d_r=1$.

Чтобы доказать, что функция $p_r(s)=\frac{c_n r(n+1)}{(|s|^2+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}$ является весовой, осталось проверить выполнение пункта 2^o определения 1. Эта функция удовлетворяет условиям предложения 1. Действительно, при любом $r>0$ функция $\tilde{p}_r(\mid s\mid)$ непрерывна и монотонно убывает по $\mid s\mid$. Для любого фиксированного $a>0$ $\tilde{p}_r(a)\to 0$ при $r\to+0$, а $d_r=1$. Следовательно, для любого измеримого множества $A\ :\ 0\notin\overline{A}$ будет выполнено $\frac{1}{d_r}\parallel p_r\parallel_{L^\infty(A)}=\tilde{p}_r(\inf\limits_{s\in A}\mid s\mid)\to 0$ при $r\to+0$ в силу задания нормы в классе функций L^∞ [12].

Сомножители, не зависящие от s, в весовой функции могут быть отброшены. Функцию $p_r(s)=(\mid s\mid^2+r^2)^{-\frac{n+3}{2}}$ назовем пуассоновской весовой функцией.

Таким образом, интеграл Пуассона представляет собой потенциал аппроксимационного градиента, вычисленного на пуассоновской весовой функции. В следующей части статьи будет показано, что подобными потенциалами являются и потенциалы Рисса.

3. Преобразования Рисса

Преобразованиями Рисса [13] называются следующие интегральные операторы для функции $f \in L^p(R^n)$ и $1 \leq p < \infty$:

$$R_j(f)(x) = c_n \int\limits_{R^n} \frac{y_j}{\mid y \mid^{n+1}} f(x-y)dy,$$

где $j = \overline{1, n}$,

$$c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

При $n = 1$ преобразование Рисса совпадает с преобразованием Гильберта [14]:

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{R} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Преобразования Рисса представляют собой ограниченные линейные операторы для $1 < p < \infty$. Они не сохраняют классы ограниченных и суммируемых на всем пространстве функций [9].

Потенциалами Рисса ($0 < \alpha < n$) называются следующие операторы свертки:

$$I_\alpha(f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{R^n} \mid x-y \mid^{-n+\alpha} f(y)dy,$$

где $\gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}$.

Формальное дифференцирование потенциалов Рисса дает:

$$\frac{\partial I_\alpha(f)(x)}{\partial x_j} = \frac{n-\alpha}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{R^n} \frac{y_j - x_j}{\mid x-y \mid^{n-\alpha+2}} f(y)dy =$$

$$= \frac{n-\alpha}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{R^n} \frac{s_j}{\mid s \mid^{n-\alpha+2}} f(x+s)ds.$$

Следовательно, $\frac{\partial I_1(f)}{\partial x_j} = -R_j(f)$, по крайней мере для бесконечно дифференцируемой функции f с компактным носителем.

Однако

$$\int\limits_{R^n} \mid s \mid^2 \frac{1}{\mid s \mid^{n-\alpha+2}} ds = const \int\limits_0^\infty \rho^2 \rho^{-n-2+\alpha} \rho^{n-1} d\rho = const\ \rho^\alpha \mid_0^\infty = \infty$$

для любого $\alpha > 0$, т.к. ядра потенциалов Рисса недостаточно быстро убывают на бесконечности.

Потенциалы Рисса приводят к очень элегантным и полезным формулам и обладают рядом замечательных свойств. Но они имеют и существенный недостаток. Их важность прежде всего состоит в том, что они играют роль «сглаживающих операторов». В то время как локальное поведение ($\mid x \mid \to 0$) ядер $\mid x \mid^{-n+\alpha}$ вполне подходит для этой цели, глобальное их поведение ($\mid x \mid \to \infty$) хуже и приводит к неудобствам, возрастающим с ростом α. Недостаточное убывание ядер преобразований Риса при $\mid x \mid \to \infty$ порождает у них особенность не только в нуле, но и на бесконечности. Этого недостатка нет у бесселевых потенциалов, которые будут рассмотрены ниже.

С учетом сказанного, весовыми функциями Рисса-Гильберта назовем следующие сосредоточенные в шаре B_r функции:

$$p_r(s) = \begin{cases} \mid s \mid^{-n+\alpha-2}, & \text{если } s \in B_r \\ 0, & \text{если } s \notin B_r \end{cases},$$

для которых

$$d_r = \frac{1}{n} \int\limits_{B_r} \mid s \mid^2 \mid s \mid^{-n+\alpha-2} ds = const \int\limits_0^r \rho^2 \rho^{n-1} \rho^{-n+\alpha-2} d\rho =$$

$$= r^{\alpha-1} const \int\limits_0^1 t^{\alpha-1} dt = r^{\alpha-1} const < \infty.$$

При $\alpha = 1$ компоненты аппроксимационного градиента для рассматриваемой весовой функции будут отличаться только на знак от преобразований Рисса, если $supp\ f \subseteq B_r(x)$.

4. Бесселевы потенциалы

Бесселевы потенциалы [15] также представляют собой свертки $\Im_\alpha(f) = G_\alpha * f$, ($\alpha > 0$). Ядра потенциалов задаются следующей формулой:

$$G_\alpha(x) = (4\pi)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \ell^{-\frac{\pi|x|^2}{\delta}} \ell^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{\left(\frac{-n+\alpha}{2}\right)} \frac{d\delta}{\delta}.$$

Они обладают рядом замечательных свойств. Так, для $\forall \alpha > 0$, $G_\alpha \in L^1(R^n)$ и $\int\limits_{R^n} G_\alpha(x) dx = 1$. Они достаточно быстро убывают при $\mid x \mid \to \infty$:

$$G_\alpha(x) = \bigcirc\left(\ell^{-c|x|}\right),$$

где $c > 0$, а при $\mid x \mid \to 0$ имеют такую же асимптотику, что и ядра потенциалов Рисса:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \mid x \mid^{-n+\alpha} + \circ\left(\mid x \mid^{-n+\alpha}\right).$$

Для ядра G_α имеем

$$\frac{\partial G_\alpha\left(\frac{y-x}{r}\right)}{\partial x_j} = (4\pi)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{2\pi}{r^2\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}(y_j - x_j)\int\limits_0^\infty \ell^{-\frac{\pi|y-x|^2}{\delta r^2}} \ell^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{\left(\frac{-n+\alpha}{2}\right)} \frac{d\delta}{\delta^2}$$

и

$$\frac{\partial \Im_\alpha}{\partial x_j} = \int\limits_{R^n} s_j f(x+s) p_r(s) ds,$$

где

$$p_r(s) = (4\pi)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{2\pi}{r^2\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \ell^{-\frac{\pi|s|^2}{\delta r^2}} \ell^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{\left(\frac{-n+\alpha}{2}\right)} \frac{d\delta}{\delta^2} = \frac{1}{r^2}\tilde{p}_1\left(\frac{|\, s\,|}{r}\right) > 0$$

для любых $\alpha > 0$ и $s \in R^n$.

При этом

$$s_j \tilde{p}_1(|\, s\,|) = -\frac{\partial G_\alpha(s)}{\partial s_j}$$

и

$$d_r = \frac{1}{n}\int\limits_{R^n} |\, s\,|^2 p_r(s) ds = \int\limits_{R^n} s_j^2 \frac{1}{r^2}\tilde{p}_1\left(\frac{|\, s\,|}{r}\right) ds = \int\limits_{R^n} \tau_j^2 p_1(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{R^{n-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau_j^2 p_1(\tau) d\tau_j\right) d\tau^{n-1} = \int\limits_{R^{n-1}} \left(-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau_j \frac{\partial G_\alpha(\tau)}{\partial \tau_j} d\tau_j\right) d\tau^{n-1} =$$

$$= \int\limits_{R^{n-1}} \left(-\tau_j G_\alpha(\tau) \,|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(\tau) d\tau_j\right) d\tau^{n-1},$$

где j – любое число от 1 до n, а τ_j и τ^{n-1} - ортогональные составляющие вектора τ.

Учитывая нормировку и асимптотику бесселевых ядер, получим:

$$d_r = \int\limits_{R^{n-1}} \left(\tau_j \bigcirc \left(\ell^{-c|\tau|}\right) |_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_\alpha(\tau) d\tau_j\right) d\tau^{n-1} = \int\limits_{R^n} G_\alpha(\tau) d\tau = 1.$$

Пункт 2^o определения 1 для данной функции $p_r(s)$ также выполняется в силу предложения 1. Это следует, как и в случае пуассоновского ядра, из монотонности $\tilde{p}_r$ как функции от $|\, s\,|$ и из асимптотики бесселевых ядер на бесконечности, которая будет совпадать с асимптотикой функции $\tilde{p}_r$ при $r \to 0$ и фиксированном $|\, s\,|$.

Сомножители, не зависящие от s, в весовой функции могут быть отброшены. Поэтому весовыми функциями Бесселя назовем следующие функции:

$$p_r(s) = \int\limits_0^\infty \ell^{-\frac{\pi|s|^2}{\delta r^2}} \ell^{-\frac{\delta}{4\pi}} \delta^{\left(\frac{-n+\alpha}{2}\right)} \frac{d\delta}{\delta^2},$$

где $\alpha > 0$.

В результате мы видим, что и бесселевые потенциалы, как и интеграл Пуассона и потенциалы Рисса, представляют собой потенциалы аппроксимационного градиента для весовых функций специального вида.

Литература

1. Батухтин В.Д., Майборода Л.А. *Оптимизация разрывных функций.* М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1984.
2. Батухтин В.Д., Майборода Л.А. *Разрывные экстремальные задачи.* С.-П.: Гиппократ, 1995.
3. Батухтин В.Д., Бигильдеев С.И., Бигильдеева Т.Б. *Численные методы решения разрывных экстремальных задач* // Изв.РАН. Теория и системы управления. 1997. N3. С.113–120.
4. Batukhtin V.D., Bigil'deev S.I., Bigil'deeva T.B. *Approximate Gradient Methods and the Necessary Conditions for the Extremum of Discontinuous Functions* // Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization (NDPCO'98). Proceeding volume from the IFAC Workshop. Chelyabinsk. June 1998. P.25–34.
5. Бигильдеев С.И. *Аппроксимационная производная как многозначное отображение* // Вестн. Челябинского гос. ун-та. Сер. «Математика, механика.» 1996. №1(3). С.21–33.
6. Бигильдеев С.И., Рольщиков В.Е. *Свойства аппроксимационного градиента в зависимости от весовой функции* // Изв.РАН. Теория и системы управления. 1997. №4. С.89–94.
7. Бигильдеев С.И. *Существенная оптимизация функций* // Оптимизация численных методов: Труды межд. конф., посв. 90-летию со дня рожд. С.Л. Соболева. / Отв.ред. М.Д. Рамазанов. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2000. Ч.1. С.40–50.
8. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука, 1975.
9. Стейн И.М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М.: Мир, 1973.
10. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton, 1971.
11. Мысовских И.П. *Интерполяционные кубатурные формулы.* М.: Наука, 1981.
12. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* М.: Мир, 1979.
13. Riesz M. *L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy* // Acta Math. 1949. №81. P.1–233.
14. Weyl H. *Bemerkungen zum Begriff der Differentialquotienten gebrochener Ordnung* // Vier. Natur. Gesellschaft. Zurich. 1917. №62. P.296–302.
15. Aronszajn N., Smith K.T. *Theory of Bessel potentials* // I, Ann. Inst. Fourier. 1961. №11. P.385–475.