Математические структуры и моделирование
2000. Вып. 5, с.31–39.

УДК 517.55

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЗВЕЗДООБРАЗНОГО АНАЛИЗА

Г.И. Сечкин

The paper is concerned with some fundamental problems in several complex variables for starlike domains

Е.М.Чирка показал, что оболочка голоморфности полузвездной области с хорошим основанием однолистна и полузвездна и что всякая функция, голоморфная в полузвездной области в $\mathbf{C}^n$, приближается многочленами на компактных подмножествах.

Опираясь на результаты Е.М.Чирки, автор в данной работе доказал существование однолистной оболочки голоморфности для звездообразных областей, основание которых является областью голоморфности; решил для подобных областей обобщенную проблему полиномиальной аппроксимации голоморфных функций, получил достаточные условия разрешимости первой проблемы Кузена, проблемы Пуанкаре и $\bar{\partial}$-проблемы; доказал критерий разрешимости второй проблемы Кузена в терминах групп когомологий де Рама.

1. Проблема существования однолистной оболочки голоморфности звездообразной области

Определение 1.1. [1] Область $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}^n$ называется *звездной* относительно $a \in \mathbf{G}$, если всякая (действительная) прямая, проходящая через a, имеет с $\mathbf{G}$ связное пересечение. Область вида $\mathbf{G} = \{('z, z') : 'z \in {'\mathbf{G}} \subset \mathbf{C}^{n-k}, z' \in G_{'z} \subset \mathbf{C}^k\}$, где $G_{'z}$ при каждом $'z \in {'\mathbf{G}}$ – звездная область относительно фиксированной точки $a' \in \mathbf{C}^k (1 \leq k \leq n)$, называется *полузвездной* областью.

Область $'\mathbf{G}$ называется *основанием* полузвездной области G.

Основание $'\mathbf{G}$ называется *хорошим*, если $'\mathbf{G}$ представимо в виде объединения областей $'\mathbf{G}_v \Subset {'\mathbf{G}}$ с однолистными оболочками голоморфности в $\mathbf{C}^n$ (в частности, само $'\mathbf{G}$ должно иметь однолистную оболочку голоморфности).

E-mail: sechkin@omgpu.omsk.edu
Омский государственный педагогический университет

Определение 1.2. Область $D \subset \mathbf{C}^n$, $n \geq 1$, называется *звездной по набору координат* $z_1, \dots, z_k$, $k \in \{1, 2, \dots n\}$ относительно $(a_1, \dots, a_k)$, если вместе с любой точкой $z = (z_1, \dots, z_n)$ ей принадлежат для любого ε из $[0; 1]$ и все точки вида

$$(\varepsilon z_1 + (1 - \varepsilon)a_1, \dots, \varepsilon z_k + (1 - \varepsilon)a_k, z_{k+1}, \dots, z_n). \tag{1}$$

Область $D \subset \mathbf{C}^n$, $n \geq 1$, называется *покоординатно звездной по набору координат* $z_1, \dots, z_k$, $k \in \{1, 2, \dots n\}$ относительно $(a_1, \dots, a_k)$, если вместе с любой точкой $z = (z_1, \dots, z_n)$ ей принадлежат для любых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ из $[0; 1]$ и все точки вида

$$(\varepsilon_1 z_1 + (1 - \varepsilon_1)a_1, \dots, \varepsilon_k z_k + (1 - \varepsilon_k)a_k, z_{k+1}, \dots, z_n). \tag{2}$$

Класс областей с условием (1) обозначим $\mathcal{A}(k; n)$, с условием (2) – $\mathcal{B}(k; n)$. Области, принадлежащие классу $\mathcal{A}(k; n)$ или классу $\mathcal{B}(k; n)$, будем называть *звездообразными областями*, а вопросы многомерного комплексного анализа в звездообразных областях – *звездообразным анализом.*

Из определений 1.1 и 1.2 вытекает, что всякая звездообразная область является полузвездной областью; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Лемма 1.1. *[1] Оболочка голоморфности полузвездной области* $\mathbf{G}$ *с хорошим основанием* $'\mathbf{G}$ *однолистна и полузвездна.* ■

Из леммы 1.1 и определений 1 и 2 сразу вытекает

Лемма 1.2. *Оболочка голоморфности звездообразной области* $\mathbf{G}$ *с хорошим основанием* $'\mathbf{G}$ *однолистна и полузвездна.* ■

Однако тщательный анализ доказательства леммы 1.1 показывает, что, заменяя в нем термин «полузвездная область» на термин «звездообразная область», можно доказать и следующую лемму, решающую проблему существования однолистной оболочки голоморфности звездообразной области с хорошим основанием:

Лемма 1.3. *Оболочка голоморфности звездообразной области* $\mathbf{G}$ *с хорошим основанием* $'\mathbf{G}$ *однолистна и звездообразна.* ■

Из леммы 1.3 как следствие вытекает

Лемма 1.4. *Оболочка голоморфности* $\widehat{\mathbf{G}}$ *звездообразной области* $\mathbf{G}$*, основание* $'\mathbf{G}$ *которой есть область голоморфности, является звездообразной однолистной областью голоморфности.*

Доказательство. Покажем, что из условия «$'\mathbf{G}$ есть область голоморфности» следует условие «$'\mathbf{G}$ – хорошее основание». В самом деле, пусть $'\mathbf{G}$ – область голоморфности. Тогда $'\mathbf{G}$ – псевдовыпуклая область и, в силу предложений II и III [6, с. 272], $'\mathbf{G} = \cup_{\nu=1}^{\infty} {'\mathbf{G}_\nu}$, где $'\mathbf{G}_\nu$ – строго псевдовыпуклые области, которые суть области голоморфности, совпадающие со своими однолистными оболочками голоморфности, причем

$$('\mathbf{G}_\nu \Subset {'\mathbf{G}_{\nu+1}} \subset {'\mathbf{G}}) \Rightarrow ('\mathbf{G}_\nu \Subset {'\mathbf{G}}, \nu = 1, 2, \dots),$$

то есть $'\mathbf{G}$ – хорошее основание.

По лемме 1.3 оболочка голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$ однолистна, значит, по фундаментальной теореме об оболочках голоморфности, $\widehat{\mathbf{G}}$ – область голоморфности. ■

2. Обобщенная проблема полиномиальной аппроксимации голоморфных функций

Известны два подхода к проблеме полиномиальной аппроксимации голоморфных функций многих комплексных переменных.

Определение 2.1. [1] Область $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}^n$ называется *областью Рунге*, если всякая функция, голоморфная в $\mathbf{G}$, приближается многочленами равномерно на компактных подмножествах $\mathbf{G}$.

Определение 2.2. [2] Область голоморфности $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ называется *областью Рунге*, если многочлены плотны в $A(\Omega)$, то есть всякую функцию $f \in A(\Omega)$ можно приблизить равномерно на компактных подмножествах из Ω аналитическими многочленами.

Здесь $A(\Omega)$ – множество функций, аналитических в области Ω, причем аналитичность в Ω равносильна голоморфности в Ω.

Всякая область Рунге в смысле определения 2.2. (ОХ) есть область Рунге в смысле определения 2.1 (ОЧ); обратное, вообще говоря, неверно.

Синтез двух указанных подходов приводит к новому подходу: *обобщенную проблему полиномиальной аппроксимации* будем трактовать как задачу для произвольной (в частности, для полузвездной или звездообразной) области G определить, является ли область $\mathbf{G}$ или ее оболочка голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$ областью Рунге в смысле ОЧ либо в смысле ОХ.

Теорема 2.1. *[1] Пусть* $\mathbf{G}$ *– полузвездная область в* $\mathbf{C}^n$*, основание которой* $'\mathbf{G}$ *– область Рунге в смысле ОЧ в* $\mathbf{C}^{n-k}$*.*

Тогда $\mathbf{G}$ *- область Рунге в смысле ОЧ.* ■

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathbf{G}$ *– звездообразная область в* $\mathbf{C}^n$*, основание которой* $'\mathbf{G}$ *– область Рунге в смысле ОЧ в* $\mathbf{C}^{n-k}$*.*

Тогда $\mathbf{G}$ *- область Рунге в смысле ОЧ.* ■

Обобщенную проблему полиномиальной аппроксимации в случае звездообразных областей пространства $\mathbf{C}^n$ решает следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{G}$ *– звездообразная область в* $\mathbf{C}^n$*, основание которой* $'\mathbf{G}$ *– область Рунге в смысле ОХ в* $\mathbf{C}^{n-k}$*.*

Тогда $\mathbf{G}$ *- область Рунге в смысле ОЧ, а оболочка голоморфности* $\widehat{\mathbf{G}}$ *области* $\mathbf{G}$ *– область Рунге в смысле ОХ.*

Доказательство. Если $'\mathbf{G}$ – область Рунге в смысле ОХ, то $'\mathbf{G}$ есть область Рунге и в смысле ОЧ. Кроме того, всякая звездообразная область в $\mathbf{C}^n$ является полузвездной областью в $\mathbf{C}^n$. Поэтому по теореме 2.1 область $\mathbf{G}$ есть область Рунге в смысле ОЧ.

По лемме 1.4 область $\mathbf{G}$ обладает однолистной звездообразной оболочкой голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$, которая является областью голоморфности в $\mathbf{C}^n$.

Покажем, что $\widehat{\mathbf{G}}$ есть область Рунге в смысле ОЧ. Действительно, так как, по условию, $'\mathbf{G}$ есть область голоморфности, то $(\widehat{'\mathbf{G}}) = {'\mathbf{G}}$ ([7, с. 209]). По теореме Вейля ($'\mathbf{G}$ - область Рунге в смысле ОХ и, тем более, в смысле ОЧ) область $(\widehat{'\mathbf{G}}) = {'\mathbf{G}}$ полиномиально выпукла ([7, с. 256]). Кроме того, $'\mathbf{G} \times \mathbf{C}^k$ полиномиально выпукло в $\mathbf{C}^n$ и $'\mathbf{G} \times \mathbf{C}^k$ как область голоморфности есть многообразие Штейна ([2, с. 146]).

Звездообразная область $\widehat{\mathbf{G}}$, как и всякая полузвездная область, раздуваема с $'\mathbf{G} \times \mathbf{C}^k$. По теореме 1 [1], всякая функция, голоморфная в окрестности $\widehat{\mathbf{G}}$, приближается в $'\mathbf{G} \times \mathbf{C}^k$ функциями, голоморфными в $'\mathbf{G} \times \mathbf{C}^k$, равномерно на компактных подмножествах в $\widehat{\mathbf{G}}$.

В силу полиномиальной выпуклости $'\mathbf{G} \times \mathbf{C}^k$, всякая голоморфная в $'\mathbf{G} \times \mathbf{C}^k$ функция, в свою очередь, по теореме Ока-Вейля ([8, с. 58]) равномерно аппроксимируется полиномами на компактных подмножествах в $'\mathbf{G} \times \mathbf{C}^k$, следовательно, и на компактных подмножествах области $\widehat{\mathbf{G}}$, то есть $\widehat{\mathbf{G}}$ – область Рунге в смысле ОЧ.

Наконец, $\widehat{\mathbf{G}}$ – область голоморфности и область Рунге в смысле ОЧ, следовательно, $\widehat{\mathbf{G}}$ – область Рунге в смысле ОХ. Теорема 2.2. доказана. ∎

3. $\bar{\partial}$-проблема в полузвездных и звездообразных областях

$\bar{\partial}$-проблема состоит в исследовании уравнения

$$\bar{\partial} u = f,$$

где f – дифференциальная форма типа $(p, g+1)$, удовлетворяющая условию $\bar{\partial} f = 0$ $(p, q \geq 0)$, u – искомая функциональная форма типа (p, g), то есть

$$u = \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \ldots < j_p \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_q}} u_{i,j} (dz)_j \wedge (d\bar{z})_i,$$

$$j = (j_1, \ldots, j_p), i = (i_1, \ldots, i_q), (dz)_j = dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p}, (d\bar{z}_j) = d\bar{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_q},$$

$$\bar{\partial} u = \sum_{j,i} \bar{\partial} u_{j,i} \wedge (dz)_j \wedge (d\bar{z}_i) = \sum_{j,i} \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial u_{j,i}}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu \Big) \wedge (dz)_j \wedge (d\bar{z})_i.$$

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbf{G}$ – полузвездная (звездообразная) область голоморфности в $\mathbf{C}^n$, основание которой $'\mathbf{G}$ – область Рунге в смысле ОЧ в пространстве $\mathbf{C}^{n-k}$.*

Тогда уравнение в области $\mathbf{G}$

$$\bar{\partial}u = f$$

имеет решение $u \in \mathbf{C}^{\infty}_{(p,g)}(\mathbf{G})$ *для всякой формы* $f \in \mathbf{C}^{\infty}_{(p,g+1)}(\mathbf{G})$ *такой, что* $\bar{\partial}f = 0$ $(p, q \geq 0)$.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 (следствию 2.1), $\mathbf{G}$ - область Рунге в смысле ОЧ и, по условию, $\mathbf{G}$ – область голоморфности. Следовательно, $\mathbf{G}$ – область Рунге в смысле ОХ.

Применяя к области $\mathbf{G}$ теорему К.Ока ([2], теорема 2.7.8, с.85), получаем существование решения $\bar{\partial}$-уравнения с указанными свойствами в полузвездной (звездообразной) области $\mathbf{G}$. ■

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathbf{G}$ *– звездообразная область в* $\mathbf{C}^n$*, основание которой* $'\mathbf{G}$ *– область Рунге в смысле ОХ в пространстве* $\mathbf{C}^{n-k}$.

Тогда уравнение в области $\widehat{\mathbf{G}}$

$$\bar{\partial}u = f$$

имеет решение $u \in \mathbf{C}^{\infty}_{(p,g)}(\widehat{\mathbf{G}})$ *для всякой формы* $f \in \mathbf{C}^{\infty}_{(p,g+1)}(\widehat{\mathbf{G}})$ *такой, что* $\bar{\partial}f = 0$ $(p, q \geq 0)$.

Доказательство. По теореме 2.2 оболочка голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$ области $\mathbf{G}$ есть область Рунге в смысле ОХ.

По теореме К.Ока ([2], теорема 2.7.8, с.85) имеем указанный для области Рунге $\widehat{\mathbf{G}}$ результат по решению $\bar{\partial}$-проблемы. ■

Замечание 3.1. При дополнительном условии строгой псевдовыпуклости области $\mathbf{G}$ и ее оболочки голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$ результаты в теоремах 3.1 и 3.2 можно существенно дополнить: с помощью формулы Лере-Стокса (Г.М.Хенкин) выписать в явном виде решения $\bar{\partial}$-уравнения и найти важные в приложениях оценки этих решений в равномерной метрике [9, с. 119].

4. Проблемы Кузена в полузвездных и звездообразных областях. Проблема Пуанкаре

Первая (аддитивная) проблема Кузена формулируется следующим образом: дано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ комплексного многообразия, и в каждой U_α задана мероморфная функция f_α, причем в любом непустом пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ разность $f_\alpha - f_\beta = h_{\alpha\beta} \in O(U_{\alpha\beta})$, то есть является голоморфной функцией в $U_{\alpha\beta}$; надо построить на всем многообразии функцию f такую, что $f - f_\alpha \in O(U_\alpha)$ для всех $\alpha \in A$.

Тот факт, что не всякая полузвездная или звездообразная область есть область голоморфности, создает некоторые трудности в решении фундаментальных проблем, к которым, в частности, относятся и проблемы Кузена. Одним из способов преодоления этих трудностей служит переход от области D

к ее однолистной оболочке голоморфности $\widehat{D}$ (если таковая существует), которая обязательно является областью голоморфности. Этот прием автор уже применил в пп.2–3 данной статьи.

Теорема 4.1. *Пусть область* $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}^n$ *– полузвездная область с хорошим основанием* $'\mathbf{G}$*, а* K *– компактное подмножество области* $\mathbf{G}$*,* $K \Subset \mathbf{G}$*.*

Тогда: 1) для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ *оболочки голоморфности* $\widehat{\mathbf{G}}$ *области* $\mathbf{G}$ *в области* $\widehat{\mathbf{G}}$ *разрешима любая первая проблема Кузена* $\{f_\alpha\}$*; 2) для любого открытого покрытия* $\{U_\alpha\}$ *множества* K *в нем разрешима любая первая проблема Кузена* $\{f_\alpha\}$*.*

Доказательство. По лемме 1.1. и фундаментальной теореме об оболочках голоморфности оболочка голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$ области $\mathbf{G}$ есть полузвездная область голоморфности. По теореме 2.5.5 [2] всякая область голоморфности представляет собой многообразие Штейна. Поэтому, согласно теореме А.Картана, для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия Штейна $\widehat{\mathbf{G}}$ первая проблема Кузена $\{f_\alpha\}$ разрешима.

Далее, K – замкнутое подмножество области $\mathbf{G}$, $K \Subset \mathbf{G}$. Следовательно, по транзитивности отношения «содержится в ...», K есть замкнутое подмножество области $\widehat{\mathbf{G}}$, являющейся многообразием Штейна ([2], теорема 5.1.5, с.147). Многообразие K как замкнутое подмногообразие многообразия Штейна само является многообразием Штейна ([2], теорема 5.1.5, с.147). По теореме А.Картана на множестве K для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия Штейна K любая первая проблема Кузена $\{f_\alpha\}$ разрешима. ■

Аналогично, но с использованием леммы 1.4 доказывается следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}^n$ *– звездообразная область, основание* $'\mathbf{G}$ *которой есть область голоморфности, а* K *– компактное подмножество области* $\mathbf{G}$*,* $K \Subset \mathbf{G}$*.*

Тогда: 1) для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ *оболочки голоморфности* $\widehat{\mathbf{G}}$ *области* $\mathbf{G}$ *в области* $\widehat{\mathbf{G}}$ *разрешима любая первая проблема Кузена* $\{f_\alpha\}$*; 2) для любого открытого покрытия* $\{U_\alpha\}$ *множества* K *в нем разрешима любая первая проблема Кузена* $\{f_\alpha\}$*.* ■

Вторая (мультипликативная) проблема Кузена формулируется следующим образом: дано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ комплексного многообразия M, и в каждой U_α задана функция $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}^*)$, то есть мероморфная функция, не равная тождественно нулю, причем в любом непустом пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ частное $f_\alpha/f_\beta \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, O^*)$, то есть является голоморфной функцией, не обращающейся в нуль. Надо построить на всем многообразии M такую мероморфную функцию f, что $f/f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, O^*)$ для всех $\alpha \in A$.

Вторая проблема Кузена для покрытия эквивалентна задаче построения мероморфной функции по заданному дивизору.

Напомним, что совокупность $\mathcal{F}^r$ форм степени r на гладком многообразии M можно рассматривать как абелеву группу с операцией покоэффициентного сложения форм. В этой группе есть подгруппа Z^r, состоящая из замкнутых форм ω, для которых $d\omega = 0$. В силу идемпотентности оператора d ($d^2\omega = d(d\omega) = 0$) совокупность B^r точных форм степени r, которые являются дифференциалами форм из $\mathcal{F}^{r-1}$, является подгруппой группы Z^r. Фактор-группа

$$H^r(M) = Z^r/B^r$$

называется r-ой группой когомологий многообразия M относительно оператора d (группой де Рама). Если в формах допускаются комплексные коэффициенты, то эта группа обозначается $H^r(M, \mathbf{C})$ [10, с. 76].

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathbf{G}$ *– звездообразная область, основание* $'\mathbf{G}$ *которой есть область голоморфности, а* K *– замкнутое подмножество области* $\mathbf{G}$*,* $K \Subset \mathbf{G}$*.*

Тогда: 1) вторая проблема Кузена на оболочке голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$ *области* $\mathbf{G}$ *разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда*

$$H^2('(\widehat{\mathbf{G}}), \mathbf{Z}) = 0;$$

2) вторая проблема Кузена на K *разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда*

$$H^2(K, \mathbf{Z}) = 0.$$

Доказательство. 1) Область $\widehat{\mathbf{G}}$ есть однолистная звездообразная область голоморфности (лемма 1.4), по теореме 2.5.5 [2] область $\widehat{\mathbf{G}}$ есть многообразие Штейна, а по теореме Ж.П.Серра (теорема 7.4.4 [2, с. 242]) вторая проблема Кузена на $\widehat{\mathbf{G}}$ разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда

$$H^2(\widehat{\mathbf{G}}, \mathbf{Z}) = 0.$$

Но $H^2(\widehat{\mathbf{G}}, \mathbf{Z}) \cong H^2('(\widehat{\mathbf{G}}), \mathbf{Z})$, где $'(\widehat{\mathbf{G}})$ – основание звездообразной области $\widehat{\mathbf{G}}$, так как $'(\widehat{\mathbf{G}})$ есть деформационный ретракт области $\widehat{\mathbf{G}}$. Поэтому

$$H^2('(\widehat{\mathbf{G}}), \mathbf{Z}) = 0.$$

2) K как замкнутое подмножество области голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$ есть многообразие Штейна, поэтому по теореме Ж.П.Серра имеем: вторая проблема Кузена разрешима на многообразии Штейна K для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда

$$H^2(K, \mathbf{Z}) = 0.$$

■

Аналогично, с использованием леммы 1.1 и леммы 1.2, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathbf{G}$ *– полузвездная или звездообразная область с хорошим основанием* $'\mathbf{G}$, *а* K *– компактное подмножество области* $\mathbf{G}$, $K \Subset \mathbf{G}$.

Тогда: 1) вторая проблема Кузена на $\widehat{\mathbf{G}}$ *разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда*

$$H^2('(\widehat{\mathbf{G}}), \mathbf{Z}) = 0;$$

2) вторая проблема Кузена на K *разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда*

$$H^2(K, \mathbf{Z}) = 0.$$

■

Из многочисленных возможных приложений полученных результатов остановимся на *проблеме Пуанкаре*: представить мероморфную на многообразии функцию в виде отношения функций, голоморфных на этом многообразии (напомним, что локально такое представление следует из самого определения мероморфной функции, здесь же речь идет о глобальном представлении).

Теорема 4.5. *Пусть* $\widehat{\mathbf{G}}$ *– оболочка голоморфности звездообразной области* $\mathbf{G}$, *основание которой* $'\mathbf{G}$ *есть область голоморфности.*

Тогда каждая функция f, *мероморфная на* $\widehat{\mathbf{G}}$, *представляется на* $\widehat{\mathbf{G}}$ *как отношение функций, голоморфных на* $\widehat{\mathbf{G}}$, *то есть на* $\widehat{\mathbf{G}}$ *положительно решается проблема Пуанкаре.*

Доказательство. По лемме 1.4 оболочка голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$ области $\mathbf{G}$ есть область голоморфности. По теореме 2.5.5 [2, с. 62] область $\widehat{\mathbf{G}}$ есть многообразие Штейна, на котором, согласно теореме 4 [10, с. 261], положительно решается проблема Пуанкаре. ■

Аналогично, с использованием леммы 1.1 и леммы 1.2, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.6. *Пусть* $\widehat{\mathbf{G}}$ *– оболочка голоморфности полузвездной или звездообразной области* $\mathbf{G}$ *с хорошим основанием* $'\mathbf{G}$.

Тогда каждая функция f, *мероморфная на* $\widehat{\mathbf{G}}$, *представляется на* $\widehat{\mathbf{G}}$ *как отношение функций, голоморфных на* $\widehat{\mathbf{G}}$, *то есть положительно решается проблема Пуанкаре на* $\widehat{\mathbf{G}}$. ■

Звездообразные области введены автором в работе [3]; некоторые из проблем, затронутых в данной статье, нашли отражение в материалах научных конференций [4, 5]. Автор благодарен А.К.Циху, А.М.Кытманову и А.П.Южакову за внимание к работе.

Литература

1. Чирка Е.М. *Приближение многочленами на звездных подмножествах в* $\mathbf{C}^n$ // Математические заметки. 1973. Т.14, N 1. С.55-60.

2. Хёрмандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Мир, 1979. 279 с.

3. Сечкин Г.И. *Операторный метод в звездообразных областях.* Деп. в ВИНИТИ 30.07.90. N4314–B90. 5 с.

4. Сечкин Г.И. *Проблема полиномиальной аппроксимации и $\bar\partial$-проблема в звездообразных и выпуклообразных областях* // Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (INPRIM-98): Тез. докл. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1998. Часть I. С.93–94.

5. Сечкин Г.И. *Проблемы многомерного комплексного анализа в полузвездных, звездообразных и выпуклообразных областях* // Международная конференция «Математические модели и методы их исследования»: Тез. докл. Красноярск, 1999. С.182.

6. Айзенберг Л.А. Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1979. 366 с.

7. Владимиров В.С. *Методы теории функций многих комплексных переменных.* М.: Наука, 1964. 411 с.

8. Ганнинг Р., Росси Х. *Аналитические функции многих комплексных переменных.* М.: Мир, 1969. 395 с.

9. Хенкин Г.М., Чирка Е.М. *Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.:ВИНИТИ, 1975. Т.4.

10. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* Ч.II. М.: Наука, 1976. 400 с.