Математические структуры и моделирование
2000. Вып. 5, с.72–81.

УДК 517.958

ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЕЕ РЕШЕНИЙ

Н.В. Перцев, А.Н. Перцева

The paper is concerned with a generalization of Lotka-Volterra model, arising under the consideration of some populations with a limited life span of its individuals. The system of nonlinear integral equations of the renewal type is used for the construction of the model. Some properties of the model solutions are established

1. Постановка задачи

В работах [1], [2] предложен вариант модели Лотки-Вольтерра, описывающей динамику конкурирующих популяций с учетом их плотностной и возрастной структуры. Система уравнений модели имеет следующий вид:

$$x_i(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda_i(x(s))ds} \int\limits_{<t,\tau_i>}^{\tau_i} R_i(a)\varphi_i(a-t)da + \int\limits_0^{<t,\tau_i>} R_i(a)\, e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda_i(x(s))ds} b_i(t-a)da,$$

$$b_i(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda_i(x(s))ds} \int\limits_{<t,\tau_i>}^{\tau_i} \mu_i(a)R_i(a)\varphi_i(a-t)da+ \tag{1}$$

$$+\int\limits_0^{<t,\tau_i>} \mu_i(a)R_i(a)\, e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda_i(x(s))ds} b_i(t-a)da, \quad 1 \le i \le m, \quad t \ge 0.$$

Здесь принято, что для фиксированного $1 \le i \le m$ численность популяции индивидуумов i-го вида равна $x_i(t) = \int_0^{\tau_i} x_i(a,t)da$, где $x_i(a,t)$ означает плотность численности популяции индивидуумов i-го вида возраста a в момент времени t, $0 \le a \le \tau_i$, $t \ge 0$. Параметр $0 < \tau_i < \infty$ задает максимальную продолжительность времени жизни индивидуумов i-го вида, $< t, \tau_i >= min(t, \tau_i)$,

E-mail: pertsev@univer.omsk.su
Омский государственный университет

$t \geq 0$. Переменная $b_i(t)$ означает интенсивность рождения новых индивидуумов i-го вида нулевого возраста в момент времени $t \geq 0$. Принято, что $b_i(t) = \int_0^{\tau_i} \mu_i(a)x_i(a,t)da$, где неотрицательная функция $\mu_i(a)$ задает специфическую возрастную рождаемость индивидуумов i-го вида в зависимости от их возраста, $0 \leq a \leq \tau_i$. Процесс старения индивидуумов i-го вида описывается с помощью функции выживаемости $R_i(a)$, которая принята невозрастающей и положительной на $[0,\tau_i)$, $R_i(0) = 1$, $R_i(a) = 0$ при $a \geq \tau_i$. Выражение $\bar{\tau_i} = \int\limits_0^{\tau_i} R_i(a)da$ означает среднюю продолжительность времени жизни индивидуумов i-го вида. Распределение по возрасту первоначально существующих индивидуумов i-го вида задается неотрицательной функцией $x_i(a,0) = R_i(a)\varphi_i(a)$ так, что их начальная численность равна $x_i(0) = \int\limits_0^{\tau_i} R_i(a)\varphi_i(a)da$. Интенсивность гибели индивидуумов i-го вида вследствие самолимитирования и конкуренции (независимо от их возраста) описывается неотрицательной функцией $\lambda_i(x(t))$, где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$.

В уравнениях (1) функции $R_i(a)$, $\mu_i(a)$, $\varphi_i(a)$ предполагаются непрерывными на $[0,\tau_i]$, причем $\mu_i(a)$ тождественно не равны нулю, $1 \leq i \leq m$. Считается, что функции $\lambda_i(x)$ определены при всех $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R_+^m$ и удовлетворяют условию Липшица: для всех $x, y \in R_+^m \quad |\lambda_i(x) - \lambda_i(y)| \leq M_i|x-y|$, $1 \leq i \leq m$, (здесь и далее под $|x|$ понимается норма вектора $x \in R^m$).

В работе [2] детально исследованы свойства решений модели (1) для одного из ее вариантов, когда

$$R_i(a) = \int\limits_a^{\tau_i} p_i(s)ds,\ 0 \leq a \leq \tau_i,\ \lambda_i(x) = \sum_{k=1}^m c_{i,k}x_k,\ c_{i,k} \geq 0,\ c_{i,i} > 0,\ 1 \leq k,\ i \leq m,$$

где функции $p_i(a)$ описывают интенсивность гибели индивидуумов i-го вида в зависимости от их возраста $0 \leq a \leq \tau_i$, $1 \leq i \leq m$. Этот вариант системы (1) может рассматриваться как интегральный аналог классической модели Лотки – Вольтерра в дифференциальной форме [2].

В приложениях часто используются обобщенные модели Лотки – Вольтерра, в которых $\lambda_i(x) = \sum_{k=1}^m c_{i,k}h_k(x_k)$, $c_{i,k} \geq 0$, $c_{i,i} > 0$, $1 \leq k,\ i \leq m$, где $h_k(x_k)$ определены, неотрицательны, непрерывно дифференцируемы для всех $x_k \geq 0$ и $h_k(0) = 0$, $h'_k(x_k) > 0$, $1 \leq k \leq m$. Последнее неравенство учитывает усиление интенсивности гибели индивидуумов за счет конкуренции и самолимитирования при возрастании численностей индивидуумов как отдельной, так и вместе взятых популяций [3]. Примеры указанных функций приведены в работе [4].

Целью настоящей работы является исследование некоторых свойств решений системы уравнений (1), в которой функции $\lambda_i(x)$ удовлетворяют следующему условию:

H) $\lambda_i(0) = 0$ и для всех $x, y \in R_+^m$ таких, что $x_1 \leq y_1, ..., x_i \leq y_i, ..., x_m \leq y_m$, причем хотя бы одно из неравенств строгое, верно

$$\lambda_i(x_1, ..., x_i, ..., x_m) < \lambda_i(y_1, ..., y_i, ..., y_m), \quad 1 \leq i \leq m.$$

2. Некоторые свойства решений интегральной модели

Решением системы уравнений (1) будем называть непрерывные вектор-функции $x(t) = col(x_1(t), ..., x_m(t))$ и $b(t) = col(b_1(t), ..., b_m(t))$, удовлетворяющие покомпонентно уравнениям (1) на некотором полуинтервале $[0, \delta)$, $\delta > 0$. Следуя [2], для фиксированного $1 \le i \le m$ введем функции $z_i(t)$, $y_i(t)$ по следующим формулам:

$$x_i(t) = y_i(t)\; e^{-\int\limits_0^t \lambda_i(x(s))ds}, \quad b_i(t) = z_i(t)\; e^{-\int\limits_0^t \lambda_i(x(s))ds}, \quad 1 \le i \le m, \quad t \ge 0. \qquad (2)$$

Используя в (1) замену (2), получаем, что функции $z_i(t)$, $y_i(t)$ удовлетворяют линейным интегральным уравнениям

$$y_i(t) = \int\limits_{<t,\tau_i>}^{\tau_i} R_i(a)\varphi_i(a-t)da + \int\limits_0^{<t,\tau_i>} R_i(a)z_i(t-a)da, \qquad (3)$$

$$z_i(t) = \int\limits_{<t,\tau_i>}^{\tau_i} \mu_i(a)R_i(a)\varphi_i(a-t)da + \int\limits_0^{<t,\tau_i>} \mu_i(a)R_i(a)z_i(t-a)da, \qquad (4)$$

$$1 \le i \le m, \quad t \ge 0.$$

Уравнения (3), (4) относятся к одномерным уравнениям восстановления, свойства решений которых приведены в [2]. Решения $z_i(t)$, $y_i(t)$ этих уравнений определены на $[0, \infty)$, являются неотрицательными и непрерывными функциями. Асимптотическое поведение решений $z_i(t)$, $y_i(t)$ при $t \to +\infty$ тесно связано с параметром

$$Bi = \int\limits_0^{\tau_i} \mu_i(a)R_i(a)da, \qquad (5)$$

а также с единственным действительным корнем β_i уравнения

$$\int\limits_0^{\tau_i} \mu_i(a)R_i(a)e^{-\beta_i a}da = 1. \qquad (6)$$

Из соотношений (5), (6) следует, что $\beta_i > 0$, $\beta_i = 0$, $\beta_i < 0$, если, соответственно, $B_i > 1$, $B_i = 1$, $B_i < 1$. В работах по экологической тематике параметр B_i называют репродуктивным числом индивидуума, а β_i – внутренней скоростью естественного роста популяции i-го вида, $1 \le i \le m$ [4, с. 119]. Можно показать, что при $t \to +\infty$ $z_i(t)$, $y_i(t) \sim \exp(\beta_i t)$.

Перейдем теперь к некоторым свойствам решений модели (1), которую будем рассматривать в форме системы (2). Как отмечено выше, в этой системе функции $y_i(t)$, $z_i(t)$ можно считать известными из уравнений (3), (4), $1 \le i \le m$,

$0 \le t < \infty$. Обозначим через $f(t) = col(f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t))$ вектор-функцию, компоненты которой состоят из решений уравнений (3), т.е. $f_i(t) = y_i(t)$, $1 \le i \le m$. Пусть далее, $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t))$,

$$F_x(t) = A_x(t) f(t), \quad t \ge 0, \tag{7}$$

где $A_x(t)$ – диагональная матрица следующего вида:

$$A_x(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda(x(s))ds} = diag(\, e^{-\int\limits_0^t \lambda_1(x(s))ds}, e^{-\int\limits_0^t \lambda_2(x(s))ds}, \dots, e^{-\int\limits_0^t \lambda_m(x(s))ds}).$$

Очевидно, что для исследования системы (2) достаточно рассмотреть систему уравнений

$$x(t) = F_x(t), \quad t \ge 0, \tag{8}$$

решения которой ищутся в пространстве $C_{[0,T]}$ вектор-функций $x(t)$, определенных и непрерывных на некотором отрезке $[0,\,T]$, $0 < T < \infty$. Применим к системе уравнений (8) принцип сжимающих отображений, используя следующую норму для $x \in C_{[0,T]}$: $||x||_* = sup_{t\in[0,T]}\, e^{-Lt}\, |x(t)|$, где $L > 0$ – некоторая константа, $|\cdot|$ – норма векторов из R^m [5, с. 11].

Теорема 1. *Система уравнений (8) имеет единственное решение $x(t)$, определенное и неотрицательное (покомпонентно) на $[0, \infty)$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое $0 < T < \infty$. Пусть $x, y \in C_{[0,T]}$. Имеем, что

$$|F_x(t) - F_y(t)| = |(A_x(t) - A_y(t)) f(t)| \le ||A_x(t) - A_y(t)||_M \, |f(t)| =$$

$$= max_{i=1,m} |\, e^{-\int\limits_0^t \lambda_i(x(s))ds} - e^{-\int\limits_0^t \lambda_i(y(s))ds}\, |\, |f(t)| \le$$

$$\le max_{i=1,m} |\int\limits_0^t \lambda_i(x(s))ds - \int\limits_0^t \lambda_i(y(s))ds|\, |f(t)| \le$$

$$\le max_{i=1,m} \int\limits_0^t |\, \lambda_i(x(s)) - \lambda_i(y(s))| ds\, |f(t)| \le max_{i=1,m} \int\limits_0^t M_i |\, x(s) - y(s)| ds\, |f(t)|.$$

Здесь символом $||\cdot||_M$ обозначена матричная норма, которая выбирается согласованной с нормой $|\cdot|$ векторов из R^m. Повторяя выкладки, получаем, что

$$e^{-Lt}\, |F_x(t) - F_y(t)| \le e^{-Lt}\, max_{i=1,m} \int\limits_0^t M_i |\, x(s) - y(s)| ds\, |f(t)| =$$

$$= e^{-Lt}\, max_{i=1,m} \int\limits_0^t M_i\, e^{Ls} (\, e^{-Ls} |\, x(s) - y(s)|) ds\, |f(t)| \le$$

$$\leq max_{i=1,m} M_i \; |f(t)| \; ||x-y||_* \; (1-e^{-Lt})/L \leq M_* \; |f(t)| \; ||x-y||_* \; (1-e^{-LT})/L,$$

где $M_* = max_{i=1,m} M_i$. Выбирая константу $L = M_* sup_{[0,T]} \, |f(t)|$, получаем, что $||F_x - F_y||_* \leq q \, ||x-y||_*$, причем $0 < q < 1$. Используя произвольность выбора T и неотрицательность компонент вектор-функции $f(t)$, завершаем доказательство. ■

Теорема 2. *Решение $x(t)$ системы (8) непрерывным образом зависит от функции $f(t)$ на любом конечном отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Пусть решения $x^1 = x^1(t)$, $x^2 = x^2(t)$ соответствуют функциям $f^1 = f^1(t)$, $f^2 = f^2(t)$, входящим в (7), $t \in [0,T]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $||f^1 - f^2||_* < \delta$ будет следовать неравенство $||x^1 - x^2||_* < \varepsilon$. Имеем:

$$e^{-Lt} \, (x^1(t) - x^2(t)) = e^{-Lt} \, e^{-\int_0^t \lambda(x^1(s))ds} \, (f^1(t) - f^2(t)) +$$

$$+ \, e^{-Lt} \, (\, e^{-\int_0^t \lambda(x^1(s))ds} - e^{-\int_0^t \lambda(x^2(s))ds} \,) \, f^2(t).$$

Используя оценки из теоремы 1, получаем, что

$$||x^1 - x^2||_* \leq ||f^1 - f^2||_* + M_* sup_{[0,T]} \, |f^2(t)| \; ||x^1 - x^2||_* \, (1 - e^{-LT})/L.$$

Полагая $L = M_* max\{sup_{[0,T]} \, |f^2(t)|, \, sup_{[0,T]} \, |f^1(t)|\}$, приходим к неравенству $||x^1 - x^2||_* \leq ||f^1 - f^2||_* + (1 - \exp(-LT)) \, ||x^1 - x^2||_*$. Отсюда $||x^1 - x^2||_* \leq \exp(LT)) \, ||f^1 - f^2||_*$. Выбирая затем $\delta = \varepsilon \exp(-LT))$, получаем требуемую оценку. ■

Приведем далее некоторые свойства решений системы уравнений (1), которые непосредственно вытекают из результатов работы [2]. Нетрудно заметить, что система (1) допускает решение с нулевыми компонентами $x_k(t) = b_k(t) = 0$, $t \geq 0$, если только для некоторого $1 \leq k \leq m$ выполнено соотношение $x_k(0) = \int_0^{\tau_k} R_k(a)\varphi_k(a)ds = 0$, эквивалентное тому, что $\varphi_k(a) \equiv 0$. Это означает, что если начальная численность k-ой популяции равнялась нулю, то и в дальнейшем (при отсутствии иммиграции) ее численность также будет равняться нулю.

Пусть теперь при фиксированном $1 \leq j \leq m \;\; x_j(0) > 0$, но функция

$$\nu_j(t) = \int_t^{\tau_j} \mu_j(a) R_j(a) \varphi_j(a-t) da, \quad 0 \leq t \leq \tau_j \tag{9}$$

такова, что $\nu_j(t) = 0$ для всех $0 \leq t \leq \tau_j$. Эта ситуация возникает в том случае, когда первоначально существующие индивидуумы j-ой популяции не могут производить потомство (их возраст «не согласуется» с функцией специфической возрастной рождаемости). Тогда из (4) следует, что $z_j(t) = 0$ для всех

$t \geq 0$. Из (2) получаем, что $0 \leq x_j(t) \leq y_j(t) = \int\limits_t^{\tau_j} R_j(a)\varphi_j(a-t)da$ при $0 \leq t \leq \tau_j$ и $x_j(t) = 0$ при $t \geq \tau_j$. Последнее означает, что за время τ_j j-ая популяция вырождается, т.е. ее численность становится равной нулю.

Предположим, что $x_j(0) > 0$ и существует $t_* \in [0, \tau_j)$ такой, что $\nu_j(t_*) > 0$. Можно показать, что из этих неравенств следует, что $y_j(t) > 0$, $x_j(t) > 0$ для всех $0 \leq t < \infty$. Вместе с тем, при выполнении указанных неравенств также возможно вырождение популяций, что устанавливает следующая

Теорема 3. *Пусть для некоторого* $1 \leq k \leq m$ *выполняется неравенство* $B_k \leq 1$, *либо* $\nu_k(t) \equiv 0$, $t \geq 0$. *Тогда любое решение* $x(t)$ *системы (1) таково, что существует* $\lim_{t\to+\infty} x_k(t) = 0$.

Доказательство. Предположим, что выполнены условия: $x_k(0) = 0$ или $x_k(0) > 0$, $\nu_k(t) \equiv 0$, $t \geq 0$. Используя полученные выше результаты относительно поведения $x_k(t)$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Пусть далее $x_k(0) > 0$, $\nu_k(t)$ не равна тождественно нулю на $[0, \tau_k]$ и $B_k \leq 1$. Используя [2], имеем, что решение уравнения (3) $y_k(t)$ таково, что $y_k(t) \to \bar{y}_k$ при $t \to +\infty$, где $0 \leq \bar{y}_k < \infty$ – некоторая константа. При $B_k < 1\,(\beta_k < 0)$ $\bar{y}_k = 0$ и из неравенств $0 \leq x_k(t) \leq y_k(t)$, $t \geq 0$, получаем, что $x_k(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Пусть теперь $0 < \bar{y}_k < \infty$, что соответствует случаю $B_k = 1$, $(\beta_k = 0)$. Зафиксируем $\Delta t > 0$. Учитывая положительность $y_k(t)$ и $x_k(t)$, из уравнений (2) имеем, что при всех $t \geq 0$ верно

$$\frac{x_k(t+\Delta t)}{x_k(t)} = \frac{y_k(t+\Delta t)}{y_k(t)} \exp(-\int\limits_t^{t+\Delta t} \lambda_k(x(s))ds).$$

Это соотношение может быть записано в виде

$$\frac{x_k(t+\Delta t)}{x_k(t)} = \exp(-\int\limits_t^{t+\Delta t} \lambda_k(x(s))ds) + \xi_k(t), \tag{10}$$

где $\lim_{t\to+\infty} \xi_k(t) = 0$. Пользуясь неотрицательностью решения $x(t)$, условием H) и тем, что $x_k(t) > 0$, получаем, что подынтегральная функция в (10) удовлетворяет неравенствам $0 < \lambda_k(0, ..., x_k(s), ..., 0) \leq \lambda_k(x_1(s), ..., x_k(s), ..., x_m(s))$, $0 \leq s < \infty$. Отсюда верно неравенство

$$\frac{x_k(t+\Delta t)}{x_k(t)} \leq \exp(-\int\limits_t^{t+\Delta t} \lambda_k(0, ..., x_k(s), ..., 0)ds) + \xi_k(t). \tag{11}$$

Тогда при достаточно больших t для любого $\Delta t > 0$ из неравенства (11) имеем $x_k(t+\Delta t)/x_k < 1$ и, следовательно, существует $\lim_{t\to+\infty} x_k(t) = u_k \geq 0$. Предположим, что $u_k > 0$. Зафиксировав $\Delta t > 0$ и переходя в (11) к пределу при $t \to +\infty$, получим противоречие: $1 \leq \exp(-\lambda_k(0, ..., u_k, ..., 0)\,\Delta t)$. Отсюда следует, что $u_k = 0$. ■

Обратимся теперь к вопросу об ограниченности решений $x(t)$ модели (1). Приведенные ниже результаты опираются на изучение одномерной модели для переменной $u_k(t)$, где k - некоторый фиксированный индекс. Обозначим $\tilde\lambda_k(u_k) = \lambda_k(0,...,u_k,...,0)$, $u_k \geq 0$. Из условия H) следует, что $\tilde\lambda_k(u_k)$ является возрастающей функцией, а уравнение

$$u_k\,(\beta_k - \tilde\lambda_k(u_k)) = 0,\ \ u_k \geq 0 \tag{12}$$

при $\beta_k > 0$ имеет не более двух корней u_k^*, причем один из них равен нулю, а второй, если существует, то положителен.

Примем далее, что для всех $1 \leq k \leq \ \ m \ \ x_k(0) > 0, \ \ B_k > 1\,(\beta_k > 0)$, функции $\nu_k(t)$ тождественно не равны нулю на $[0, \tau_k]$. Рассмотрим частный случай системы (8), а именно уравнение

$$u_k(t) = f_k(t)\, e^{-\int\limits_0^t \tilde\lambda_k(u_k(s))ds},\ \ t \geq 0, \tag{13}$$

в котором непрерывная положительная функция $f_k(t)$ имеет следующий вид: $f_k(t) = e^{\beta_k t}(q_k + \varepsilon_k(t))$, где $q_k > 0$ – константа, $\varepsilon_k(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $\beta_k > 0$ (указанное представление вытекает из свойств решений уравнений (3), (4) [2]).

Лемма 1. *Пусть уравнение (12) имеет только один корень $u_k^* = 0$. Тогда решение $u_k(t)$ уравнения (13) является неограниченной на $[0, \infty)$ функцией.*

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что для всех $u_k \geq 0$ верно $\beta_k - \tilde\lambda_k(u_k) > 0$. Примем, что $u_k(t)$ является ограниченной на $[0, \infty)$ функцией, т.е. существует $0 < P_k < \infty$ такое, что для всех $0 \leq t < \infty$ верно $0 \leq u_k(t) \leq P_k$. Из (13) имеем, что $u_k(t) = (q_k + \varepsilon_k(t)) \exp(\int\limits_0^t (\beta_k - \tilde\lambda_k(u_k(s)))ds)$, $t \geq 0$. Тогда справедлива оценка $\beta_k - \tilde\lambda_k(u_k(s)) \geq \beta_k - \tilde\lambda_k(P_k) = c_k > 0$, $0 \leq s < \infty$. Отсюда получаем неравенство $u_k(t) \geq (q_k + \varepsilon_k(t)) \exp(c_k t)$, которое противоречит предположению об ограниченности этой функции. ■

Лемма 2. *Пусть уравнение (12) имеет корень $u_k^* > 0$. Тогда при любом начальном значении $u_k(0) = f_k(0) > 0$ решение $u_k(t)$ уравнения (13) таково, что существует $\lim_{t\to+\infty} u_k(t) = u_k^*$.*

Доказательство. Зафиксируем $\Delta t > 0$ и запишем, что

$$f_k(t+\Delta t)/f_k(t) = \ e^{\beta_k \Delta t}(q_k + \varepsilon_k(t+\Delta t))/(q_k + \varepsilon_k(t)) = \ e^{\beta_k \Delta t} + \varepsilon_{k0}(t),$$

где $\varepsilon_{k0}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Отсюда получаем следующее соотношение:

$$\frac{u_k(t+\Delta t)}{u_k(t)} = \exp(\beta_k \Delta t)\ \exp(-\int\limits_t^{t+\Delta t} \tilde\lambda_k(u_k(s))ds) + \alpha_k(t) =$$

$$= \exp(\int\limits_t^{t+\Delta t} (\beta_k - \tilde\lambda_k(u_k(s)))ds) + \alpha_k(t),\ \ t \geq 0, \tag{14}$$

где $\alpha_k(t) = \varepsilon_{k0}(t)\exp(-\int\limits_t^{t+\Delta t}\tilde{\lambda}_k(u_k(s))ds)$, $\lim_{t\to+\infty}\alpha_k(t) = 0$. Из (14) видно, что поведение $u_k(t)$ на некотором промежутке $[0,T)$, $0 < T < \infty$, может носить как монотонный, так и колебательный характер. Действительно, пусть $\alpha_k(t)$ достаточно мало, $t \in [0,T)$. Если $0 < u_k(t) < u_k^*$ при всех $0 \le t < t+\Delta t < T$, то имеем, что $u_k(t+\Delta t)/u_k(t) > 1$ и $u_k(t)$ – возрастающая функция, $t \in [0,T)$. Если учитывать влияние слагаемого $\alpha_k(t)$, то, очевидно, $u_k(t)$ может пересекать уровень $u_k = u_k^*$ при некоторых $0 < t_* < T$. Аналогичные выводы справедливы и для случая, когда $u_k(t) > u_k^*$ при всех $0 \le t < t+\Delta t < T$.

Покажем далее, что существует $\lim_{t\to+\infty} u_k(t) = u_k^*$. Пусть t достаточно велико и $u_k(t) < u_k^*$. Может оказаться, что при всех $\Delta t > 0$ верно $u_k(t+\Delta t) \le u_k^*$. Тогда $u_k(t+\Delta t)/u_k(t) > 1$ и, следовательно, указанный предел существует. Предположим теперь противное. Обозначим через $t+s_1$ момент первого пересечения функцией $u_k(t)$ уровня $u_k = u_k^*$, иначе, $u_k(t+s) < u_k^*$, $0 \le s < s_1$, $u_k(t+s_1) = u_k^*$, $u_k(t+s) > u_k^*$, $s_1 < s \le s_1+s_2$, где $s_2 > 0$ – некоторое число. Из (14) получаем, что

$$\frac{u_k(t+s_1+s_2)}{u_k(t+s_1)} = \exp(\int\limits_{t+s_1}^{t+s_1+s_2}(\beta_k - \tilde{\lambda}_k(u_k(s)))ds) + \alpha(t+s_1) < 1,$$

откуда приходим к противоречию: $u_k(t+s_1+s_2) < u_k(t+s_1) = u_k^*$. Аналогично рассматривается случай $u_k(t) > u_k^*$. Следовательно, если при достаточно больших t верно $u_k(t) < u_k^*$ $(u_k(t) > u_k^*)$, то при всех $\Delta t > 0$ также верно $u_k(t+\Delta t) \le u_k^*$ $(u_k(t+\Delta t) \ge u_k^*)$. Отсюда вытекает существование $\lim_{t\to+\infty} u_k(t)$, который, очевидно, равен u_k^*. Если же при некотором достаточно большом t окажется, что $u_k(t) = u_k^*$, то либо при всех $\Delta t > 0$ $u_k(t+\Delta t) = u_k^*$ и $\lim_{t\to+\infty} u_k(t) = u_k^*$, либо найдется такой $t_1 > t$, что $u_k(t_1) < u_k^*$ или $u_k(t_1) > u_k^*$, что сводится к ранее рассмотренным случаям. Это завершает доказательство леммы. ■

Теорема 4. *Пусть для всех* $1 \le k \le m$ *верно* $B_k > 1\,(\beta_k > 0)$ *и уравнения (12) имеют корни* $u_k^* > 0$. *Тогда любое решение* $x(t)$ *системы (8) является ограниченным на* $[0,\infty)$.

Доказательство. Зафиксируем индекс $1 \le k \le m$ и покажем ограниченность на $[0,\infty)$ k – ой компоненты решения $x_k(t)$ системы (8). Примем, что $x_k(0) > 0$, а $\nu_k(t)$ тождественно не равна нулю на $[0,\tau_k]$ (в противном случае ограниченность $x_k(t)$ следует из теоремы 3). Докажем, что для всех $0 \le t < \infty$ верно неравенство $x_k(t) \le u_k(t)$, где $u_k(t)$ – решение уравнения (13). Имеем, что $x_k(0) = u_k(0)$. Предположим, что существуют такие $0 \le t_1 < \infty$, $s_1 > 0$, что выполнены соотношения

$$0 \le x_k(t) \le u_k(t), \quad 0 \le t \le t_1, \quad x_k(t_1) = u_k(t_1),$$

$$x_k(t_1+s) > u_k(t_1+s), \quad s \in (0,s_1). \tag{15}$$

Перепишем (15), используя следующие выражения для $x_k(t_1+s)$ и $u_k(t_1+s)$:

$$x_k(t_1+s) = \exp(-\int_{t_1}^{t_1+s} \lambda_k(x(a))da)\, x_k(t_1) f_k(t_1+s)/f_k(t_1),$$

$$u_k(t_1+s) = \exp(-\int_{t_1}^{t_1+s} \tilde{\lambda}_k(u_k(a))da)\, u_k(t_1) f_k(t_1+s)/f_k(t_1).$$

Поскольку $x_k(t_1) = u_k(t_1) > 0$, $f_k(t_1+s)/f_k(t_1) > 0$, то неравенство (15) равносильно тому, что

$$\exp(-\int_{t_1}^{t_1+s} \lambda_k(x(a))da) > \exp(-\int_{t_1}^{t_1+s} \tilde{\lambda}_k(u_k(a))da),\ s \in (0, s_1). \tag{16}$$

Из (15) и условия H) следует, что $\lambda_k(x(a)) > \tilde{\lambda}_k(u_k(a))$ для всех $t_1 < a < t_1 + s_1$. Это противоречит неравенству (16). Поэтому для всех $0 \le t < \infty$ верно $x_k(t) \le u_k(t)$. Поскольку функция $u_k(t)$ имеет конечный предел при $t \to +\infty$, то она ограничена на $[0, \infty)$. Отсюда вытекает ограниченность решения $x(t)$ системы (8) на $[0, \infty)$. ■

3. Заключение

В работе рассмотрена интегральная модель Лотки – Вольтерра, построенная с учетом возрастной и плотностной структуры конкурирующих популяций. Приведенные выше результаты устанавливают общие свойства решений модели (1), которые указывают на корректность ее применения для описания динамики численности конкурирующих популяций.

При определенных условиях от уравнений интегральной модели можно перейти к модели в дифференциальной форме. Действительно, пусть для всех $1 \le i \le m$ $x_i(0) > 0$, $B_i > 1$ и $\nu_i(t)$, заданные формулами (9), тождественно не равны нулю на $[0, \tau_i]$. Следуя [2], примем, что $\varphi_i(a) = \varphi_i^*(a) = K_i \exp(-\beta_i a)$, $a \in [0, \tau_i]$, $K_i > 0$ – некоторый параметр, $\beta_i > 0$. Очевидно, что функция $y_i(t) = K_i \hat{\tau}_i \exp(\beta_i t)$, $t \ge 0$, является решением i-го уравнения (3), где $\hat{\tau}_i = \int_0^{\tau_i} R_i(s) \exp(-\beta_i s) ds$, $1 \le i \le m$. Подставляя $y_i(t)$ в уравнения (2) для $x_i(t)$ и находя производные, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i(t) = \beta_i x_i(t) - \lambda_i(x(t))\, x_i(t), \quad t \ge 0,$$

$$x_i(0) = K_i \hat{\tau}_i, \quad 1 \le i \le m, \tag{17}$$

которая представляет собой один из вариантов обобщенной системы Лотки – Вольтерра [3]. Если $\varphi_i(a) \ne \varphi_i^*(a)$, $1 \le i \le m$, то при некоторых предположениях относительно функций выживаемости интегральная модель (1) может быть приведена к системе неавтономных дифференциальных уравнений, которая отличается от (17) наличием дополнительных слагаемых, существенно влияющих на поведение решений. Отсюда следует, что интегральная модель Лотки – Вольтерра может иметь более разнообразное поведение решений, чем классическая модель, как на конечных промежутках времени, так и при $t \to +\infty$.

Одним из основных свойств решений модели является наличие положительных и устойчивых по Ляпунову стационарных решений, которым соответствует ситуация конкурентного равновесия видов. В рамках сделанных предположений указанные стационарные решения находятся как положительные корни системы уравнений $\beta_i - \lambda_i(x) = 0$, $1 \le i \le m$. Существование и устойчивость таких решений в рамках интегральной модели (1) является предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Перцев Н.В. *Об одном классе интегродифференциальных уравнений в моделях динамики популяций* // Математические структуры и моделирование / Под ред. А.К. Гуца. Омск: ОмГУ, 1998. Вып.1. С.72–85.

2. Перцев Н.В. *Исследование решений интегральной модели Лотки – Вольтерра* // Сибирский журнал индустриальной математики. 1999. Т.2. N.2(4). С.153–167.

3. Пых Ю.А. *Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики.* М.: Наука, 1983. 182 с.

4. Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. *Динамические модели экологических систем.* Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 288 с.

5. Красносельский М.А. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Наука, 1969. 455 с.