Математические структуры и моделирование
2000. Вып. 5, с.23–30.

УДК 513.573:513.81

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО КОНУСА

А.В. Парамонов

In present paper the problems of three-dimensional cone visualization are considered. In particular the behavior of 3-cone geodesics is analyzed. Besides in the paper formulae of the Ricci and the scalar curvatures of 3-cone have been obtained. Also the bounds of the sectional curvature are given.

Трехмерное многообразие представляет собой интересный объект исследования. Это связано прежде всего с тем, что его можно «увидеть». Конечно, не для всякого 3-многообразия эта задача легко решаема, в том смысле, что не всегда удается создать достаточно красивый зрительный образ многообразия. И тем не менее, есть случаи, когда это сделано особенно изящно. Например, У. Терстон в работе [4] приводит одно из таких описаний 3-тора и 3-сферы. Математически задача визуализации сводится к изучению поведения геодезических, или, более широко, к изучению геометрии многообразия, как локальной, так и глобальной. Автор данной статьи взял в качестве объекта такого исследования 3-конус, многообразие не менее интересное, чем, скажем, 3-сфера. В 3-конусе, например, существуют самопересекающиеся геодезические. Хотя понять это не так просто, глядя только на уравнения последних. Но в данном случае дело облегчается тем, что в 3-конусе есть семейство геодезических, которые являются таковыми и на 2-конусе, где изучать их достаточно легко. В связи с этим структура данной статьи следующая: в первой главе мы исследуем геодезические 2-конуса, причем для этого мы пользуемся достаточно простой, но удобной моделью, с помощью которой и доказываем утверждение о самопересечении. Во второй главе мы говорим о визуализации 3-конуса, опираясь на результаты первой главы. В заключительном разделе приводится анализ метрических свойств 3-конуса, в частности, выводятся формулы скалярной кривизны и кривизны Риччи. Также здесь даны оценки секционной кривизны.

1. Геодезические двумерного конуса

Прежде всего, чтобы избежать лишних технических сложностей, будем рассматривать конусы вращения, т.е. конусы, заданные уравнением

E-mail: paramon@univer.omsk.su
Омский государственный университет

$$x^2 + y^2 - \frac{t^2}{a^2} = 0. \tag{1}$$

Этот 2-конус мы считаем изометрично погруженным в 3-конус

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{t^2}{a^2} = 0, \tag{2}$$

на котором берется метрика g, индуцированная из $\mathbf{R}^4$. Данный подход, конечно, не является единственно возможным. Например, можно рассмотреть погружение 2-конуса в многообразие, изометричное пространству Минковского (см. [2]). В этом случае уравнение (2) представляло бы метрику в данном пространстве. Но для наших целей годится и евклидово пространство в качестве объемлющего.

Как известно, конус (1) является поверхностью, разворачивающейся на плоскость, и его развертка суть бесконечный сектор с некоторым углом $\alpha < 2\pi$ при вершине, причем зависимость между a и α следующая:

$$a^2 = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 - 1, \qquad 0 < \alpha < 2\pi. \tag{3}$$

Выберем угол α так, чтобы он составлял целую часть от 2π, т.е. $2\pi = n\alpha$, где $n > 1$ - целое число. Тогда уравнение (1) примет вид

$$x^2 + y^2 - \frac{t^2}{n^2 - 1} = 0. \tag{4}$$

Далее для наших целей достаточно будет рассмотреть лишь верхнюю половину этого конуса. Поэтому введем такое обозначение:

$$K_n := \left\{ (x, y, 0, t) \in \mathbf{R}^4 : x^2 + y^2 - \frac{t^2}{n^2 - 1} = 0, \quad t > 0 \right\}, \qquad n > 1. \tag{5}$$

Для этой поверхности мы построим следующую модель. Возьмем n разверток конуса K_n и склеим их вместе так, чтобы в итоге у нас получилась проколотая плоскость $\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}^2 \backslash \{0\}$. Таким образом, каждой точке конуса K_n будет соответствовать n точек плоскости $\mathbf{R}_0^2$. Отождествив эти n точек, мы и получим «плоскую» модель конуса. А именно, справедливо следующее равенство:

$$K_n = \mathbf{R}_0^2 / C_n, \tag{6}$$

где C_n - подгруппа группы $SO(2)$, порожденная матрицей

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ -\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Нетрудно видеть тогда, что геодезической конуса в нашей модели будет служить семейство n прямых:

$$l: \quad x\cos\left(\beta + \frac{2\pi k}{n}\right) + y\sin\left(\beta + \frac{2\pi k}{n}\right) - p = 0, \qquad k = 0, ..., n-1 \qquad (8)$$

Докажем теперь несколько простых утверждений, касающихся 2-конуса.

Утверждение 1. *Для каждой точки конуса K_n существует $[\frac{n-1}{2}]$ различных самопересекающихся в этой точке геодезических.*

Доказательство. Пусть A - произвольная точка на конусе K_n. В нашей модели ей будет соответствовать n точек $A_1, ..., A_n$ на плоскости $\mathbf{R}_0^2$, лежащих в вершинах правильного n-угольника с центром в 0. Возьмем точку A_1 и соединим ее с оставшимися $n-1$ точками отрезками прямых. Заметим сразу, что если n - четно, мы не сможем соединить прямой точку A_1 с противоположной ей, т.к. 0 исключен из плоскости; т.е. в любом случае мы получим четное число прямых (либо $n-1$, если n - нечетно, либо $n-2$, если n - четно). Очевидно, эти прямые образуют пары симметричных относительно образующей $0A_1$ прямых, а именно: симметричны A_1A_2 и A_1A_n, A_1A_3 и A_1A_{n-1} и т.д. Причем каждую из этих прямых можно перевести в симметричную с помощью одного или нескольких преобразований вида (7). С несимметричными же прямыми этого сделать нельзя. Таким образом, с учетом отождествления (8), мы получаем k различных прямых на $\mathbf{R}_0^2/C_n$, где $k = \frac{n-1}{2}$, если n - нечетно и $k = \frac{n-2}{2}$, если n - четно. Если теперь обозначить целую часть a через $[a]$, то получим $k = [\frac{n-1}{2}]$ для любого целого $n > 1$, что и требовалось доказать. ■

Утверждение 2. *Каждая отличная от образующей геодезическая на конусе K_n имеет $[\frac{n-1}{2}]$ точек самопересечения.*

Доказательство. Пусть l - произвольная геодезическая на конусе K_n. На плоскости $\mathbf{R}_0^2$ ей будет соответствовать семейство n прямых $l_1, ..., l_n$, причем l_{i+1} получается из l_i поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{2\pi}{n}$. Возьмем прямую l_1. Тогда прямые $l_2, ..., l_n$ пересекают l_1 в точках $A_1, ..., A_k$, где $k = n-1$, если n - нечетно и $k = n-2$, если n - четно, т.к. в этом случае существует прямая l_{i_0}, параллельная l_1. Заметим, что точку A_i можно перевести в A_{k-i+1} с помощью отображения вида (7). Т.е. на конусе K_n эти точки совпадут. Таким образом, мы получаем $\frac{k}{2}$ различных точек пересечения прямой l_1 с $l_2, ..., l_n$ на $\mathbf{R}_0^2/C_n$. Для конуса это означает, что геодезическая l имеет $\frac{k}{2}$ различных точек самопересечения, что и требовалось доказать. ■

Замечание 1. Утверждение справедливо не только для K_n, но и для конуса (1) с произвольным a. В этом случае число самопересечений геодезической равно наибольшему целому числу, меньшему $\frac{\pi}{\alpha}$, где $\alpha \in (0, 2\pi)$ связан с a соотношением (3).

Замечание 2. Хотя геодезические на 2-конусе и имеют точки самопересечения, они, тем не менее, не являются замкнутыми кривыми.

Утверждение 3. *Пусть на конусе K_n $(n > 2)$ даны отличная от образующей геодезическая l и точка $A \notin l$. Тогда любая геодезическая, проходящая через точку A, будет пересекать l.*

Доказательство. Пусть l - произвольная геодезическая конуса K_n и точка $A \notin l$. На плоскости $\mathbf{R}_0^2$ им соответствуют семейство прямых $l_1, ..., l_n$ и множество точек $A_1, ..., A_n$. Выберем среди прямых $\{l_i\}$ две пересекающиеся, например: l_1 и l_2. Понятно, что такие прямые существуют, если $n > 2$. Из множества $\{A_i\}$ также возьмем произвольную точку A_{i_0}. Очевидно, что через A_{i_0} нельзя провести прямую, параллельную одновременно двум данным l_1 и l_2. Таким образом, на конусе K_n нельзя провести через A геодезическую, параллельную l, что и требовалось доказать. ■

Как видим, конус K_n является неевклидовым пространством, если $n > 2$. Кроме того, нетрудно понять, что на конусе K_2 пятый постулат Евклида верен. Таким образом, K_2 стоит особняком в семействе конусов вида (5). Кроме описанного отличия, у него есть и еще одно, а именно: на K_2 можно ввести прямоугольную координатную сетку из геодезических.

В силу этих обстоятельств здесь нужно отметить отличие конуса от, скажем, сферы или тора. Если свойства сферы не зависят качественно от ее радиуса, то геометрия конуса существенно определяется углом при его вершине. Поэтому во всех наших утверждениях постоянно фигурирует параметр n.

2. Взгляд изнутри конуса

Для визуализации 3-конуса необходимо понять, каким видит 2-конус K_n двумерный наблюдатель, находящийся на нем[1]. Но сначала нужно сделать вот какое замечание.

1. У конуса есть особая точка - вершина. Находиться в ней может лишь точечный объект, т.к. твердые 2-тела, не допускающие самопересечений, не могут приближаться вплотную к вершине. Причем, чем больше их размеры, тем дальше они должны находиться от вершины. Точечный же наблюдатель, оказавшийся в вершине, не обнаружит никаких видимых отличий окружающего его пространства от евклидова, т.к. геодезическими, проходящими через вершину, являются только образующие. В силу этих причин мы исключили вершину из рассмотрения в нашей модели.

Теперь мы можем приступить к описанию тех эффектов, которые возникают на K_n вследствие самопересечения геодезических. Представим, что вы находитесь на конусе K_n, причем не в вершине.

2. Тогда вы сразу заметите $n-1$ своих изображений-двойников. Причем противоположного двойника вы увидите, если будете недалеко от вершины. В противном случае вам помешает сделать это «черная дыра», находящаяся в ней. Все двойники будут находиться на одинаковом расстоянии от вершины, т.е. визуально на некоторой окружности, к тому же еще симметрично относительно той образующей, что проходит через вас.

[1]В связи с этим нам хотелось бы отметить книгу [5], в которой автор в научно-популярной форме рассказывает о «двумерном» зрении, хотя его идеи в этом плане несколько отличаются от наших.

3. К сожалению, подойти к какому-либо своему двойнику вам не удастся, т.к. они приходят в движение одновременно с вами. Двигаясь же в направлении двойника, вы будете приближаться к вершине, в окрестности которой находиться твердому телу запрещено.

4. Таким образом, исследовать своих двойников нельзя. Но можно это сделать с двойниками кого-нибудь еще. Итак, представим теперь, что в коническом мире вместе с вами нахожусь и я. Естественно, у меня будет столько же дубликатов, сколько и у вас. Если я буду стоять на месте, то вы сможете подойти по очереди к ним ко всем. При этом каждый раз вы будете убеждаться, что мой дубликат является не чем-то иллюзорным, наподобие отражения в зеркале, а им являюсь я сам. Иными словами, вы всякий раз, двигаясь к моему двойнику, будете подходить ко мне. И в этом нет ничего удивительного, т.к. вы будете перемещаться по геодезическим, а они, как доказано ранее, самопересекаются.

Мы описали, конечно, не все визуальные эффекты конического двумерного мира. Но читатель с образным мышлением сможет найти и другие, пользуясь рассуждениями, подобными нашим.

5. Что же касается 3-конуса, то все, о чем мы говорили выше, справедливо и для него, т.к. 2-конус является вполне геодезической поверхностью в 3-конусе (см. ниже теорему 4). Здесь только нужно заметить, что двойников в 3-конусе будет уже не конечное число, а континуум. Это объясняется увеличением числа самопересекающихся геодезических. Они получаются из геодезических 2-конуса движениями 3-конуса, которые образуют группу, изоморфную $SO(3)$.

6. Следующее замечание касается перемещения тел в 3-конусе. В силу того, что скалярная кривизна 3-конуса отрицательна (см. ниже теорему 3), «жесткие» движения трехмерных тел в нем, отличные от движений самого конуса, невозможны. А для «двумерных» тел жесткие нетривиальные движения существуют, т.к. они существуют на 2-конусе. Таким образом, можно сказать, что в коническом мире, чем объект тоньше, тем он подвижней.

7. И в конце этого раздела опишем еще один эффект, наблюдаемый в 3-конусе, который отсутствует у 2-конуса. В первом существуют двумерные направления, на которых секционная кривизна отрицательна. Следовательно, поверхность, образованная геодезическими, проходящими через фиксированную точку и касающимися этой двумерной площадки, имеет отрицательную гауссову кривизну (см. [3]). Это явление позволяет наблюдателю распознать неевклидовость 3-конуса даже вдали от вершины, где скалярная кривизна близка к нулю.

3. Кривизны трехмерного конуса

В этом разделе мы исследуем секционную и скалярную кривизны 3-конуса и его кривизну Риччи. Кроме этого докажем вполне геодезичность 2-конуса.

Рассмотрим трехмерный конус вращения M:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{t^2}{a^2} = 0, \tag{9}$$

вложенный в $\mathbf{E}^4$. Перепишем уравнение (9) в параметрическом виде:

$$x = \frac{t}{a}\cos\phi\cos\psi, \quad y = \frac{t}{a}\sin\phi\cos\psi, \quad z = \frac{t}{a}\sin\psi, \quad t = t, \tag{10}$$

где координаты берутся в следующем порядке $t \neq 0$, $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Тогда индуцированная метрика на конусе M имеет вид

$$\|g_{ij}\| = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2\cos^2\psi \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Ненулевых коэффициентов связности ∇ будет 9:

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{t}, \tag{12}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{t}{a^2+1}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = -\frac{\sin\psi}{\cos\psi}, \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{t\cos^2\psi}{a^2+1}, \quad \Gamma^2_{33} = \cos\psi\sin\psi. \tag{13}$$

Ненулевых компонент тензора Римана будет 4:

$$R^2_{323} = -R^2_{332} = -\frac{a^2}{a^2+1}\cos^2\psi, \quad R^3_{232} = -R^3_{223} = -\frac{a^2}{a^2+1}. \tag{14}$$

Столько же ненулевых компонент и у тензора кривизны:

$$R_{2323} = R_{3232} = -R_{2332} = -R_{3223} = -\frac{t^2}{a^2+1}\cos^2\psi. \tag{15}$$

Теорема 1. *Справедливы следующие точные оценки секционной кривизны K конуса M:*

$$-\frac{a^4}{t^2(a^2+1)} \leq K \leq 0. \tag{16}$$

Доказательство. Обозначим через e_1, e_2, e_3 - базис TM_x, составленный из векторов, касательных к координатным линиям. Пусть в этом базисе даны два произвольных вектора $X = (\eta_1, \xi_1, \zeta_1)$ и $Y = (\eta_2, \xi_2, \zeta_2)$, тогда

$$K(X \wedge Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2} = \frac{(\xi_1^2\zeta_2^2 - 2\xi_1\xi_2\zeta_1\zeta_2 + \xi_2^2\zeta_1^2)R_{2323}}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2} =$$

$$= \frac{-a^4t^2\cos^2\psi(\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1)^2}{b^2[b^2t^2(\eta_1\xi_2 - \eta_2\xi_1)^2 + b^2t^2\cos^2\psi(\eta_2\zeta_1 - \eta_1\zeta_2)^2 + t^4\cos^2\psi(\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1)^2]} ,$$

где $b^2 := a^2 + 1$. Отсюда следуют искомые оценки.

Из этого же выражения видно, что левое равенство достигается на бивекторе $e_2 \wedge e_3$, правое - на бивекторе $e_1 \wedge X$, где $X \in TM_x$ - произвольный. Таким образом, оценки (16) точные. ■

Замечание. В силу своей экстремальности, бивекторы $e_2 \wedge e_3$ и $e_1 \wedge X$ являются стационарными для секционной кривизны K. Нетрудно проверить, что других стационарных бивекторов нет.

Найдем теперь общую формулу для кривизны Риччи r_X в точке $x \in M$ по направлению $X = x^i e_i \in TM_x$. По определению

$$r_X = \frac{x^j x^k \sum\limits_{i=1}^{3} R_{ijik}}{g_{lm} x^l x^m},$$

отсюда, в силу равенств (15), получаем

$$r_X = -\frac{a^2 t^2 \cos^2\psi[(x^2)^2 + (x^3)^2]}{(a^2+1)[(a^2+1)(x^1)^2 + t^2(x^2)^2 + t^2\cos^2\psi(x^3)^2]} \ . \tag{17}$$

Вычислим по этой формуле кривизны Риччи по базисным направлениям e_1, e_2, e_3:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{a^2}{a^2+1}\cos^2\psi, \quad r_3 = -\frac{a^2}{a^2+1}.$$

Заметим, что эти кривизны являются собственными для тензора Риччи, который имеет вид:

$$\|R_{ij}\| = -\frac{a^2}{a^2+1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\psi \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Базисные векторы e_1, e_2, e_3 являются стационарными для кривизны Риччи.*

Теорема 3. *Скалярная кривизна конуса M равна:*

$$R = -\frac{2a^4}{t^2(a^2+1)}. \tag{19}$$

Доказательство. По определению скалярная кривизна является сверткой тензора Риччи, поэтому, в силу (11) и (18), имеем:

$$R = g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} = -\frac{a^2}{t^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+1} - \frac{a^2}{t^2\cos^2\psi}\cdot\frac{a^2}{a^2+1}\cos^2\psi,$$

откуда и следует искомая формула. ■

Теорема 4. *2-конус (1) является вполне геодезической поверхностью в 3-конусе (2).*

Доказательство. Пусть $N-$ 2-конус, заданный уравнением (1), с локальными координатами u, v. Погружение $f : N \to M$ в координатах имеет вид: $t = u, \psi = 0, \phi = v$. При этом базисные векторы $\partial_u, \partial_v \in TN_x$, касательные к координатным линиям u, v, совпадают с векторами $e_1, e_3 \in TM_x$ соответственно.

Возьмем два произвольных вектора $X = (x^1, x^2), Y = (y^1, y^2) \in TN_x$. Тогда, в силу (12) и (13), имеем:

$$\nabla_X Y = -\frac{x^2 y^2 t}{a^2+1} e_1 + \frac{x^1 y^2 + x^2 y^1}{t} e_3 \in TN_x. \tag{20}$$

Таким образом, $\forall X, Y \in TN_x \ \ \nabla_X Y = \nabla'_X Y$, где $\nabla'-$ связность на N. Это равенство и доказывает вполне геодезичность N. ■

Литература

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом.* М.: Мир, 1971.

2. Кантор Б.Е., Франгулов С.А. *Об изометричном погружении двумерных римановых многообразий в псевдоевклидово пространство* // Мат. заметки. 1984. Т.36. N 3. С.447–455.

3. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* М.: Наука, 1967.

4. Thurston W.P. *Three-dimensional geometry and topology. Draft.* The Geometry Center, University of Minnesota, The National Science and Technology Research Center for Computation and Visualization of Geometric Structures.

5. Эбботт Э.Э. *Флатландия.* Бюргер Д. *Сферландия.* М.: Мир, 1976.