

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

Выпуск 5

УДК 51, 513, 515, 517, 519, 519, 530, 621, 681

Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр.
/ Под ред. А.К. Гуца. – Омск: Омск. гос. ун-т, 2000. – Вып. 5. –
199 с.

ISBN 5 – 7779 – 0109 – 1

Сборник составлен из статей преподавателей и аспирантов математического факультета Омского государственного университета и других вузов.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакционная коллегия

А.К. Гуц

д-р физ.-мат.наук, профессор

Н.Ф. Жихалкина

аспирант

Адрес научной редакции

Россия, 644077, Омск - 77, пр. Мира, 55 – А,
Омский государственный университет,
математический факультет
Кафедра математического моделирования

E-mail: guts@univer.omsk.su

zihal@univer.omsk.su

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
и
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

В серии сборников публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике и размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества.

Публикуются также статьи по философии и истории математики, по методике преподавания математики.

Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Сборник является реферируемым. Рефераты статей публикуются в журнале "Zentralblatt für Mathematik".

Электронная версия сборника представлена в сети «Интернет» по адресу:

<http://cmm.univer.omsk.su/>

Сборник издается на коммерческие средства кафедры математического моделирования Омского государственного университета.

Кафедра готова к сотрудничеству в издании сборника. Наш E-mail:

cmm@univer.omsk.su

Подробную информацию можно найти на Web-сервере кафедры

<http://cmm.univer.omsk.su>

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика

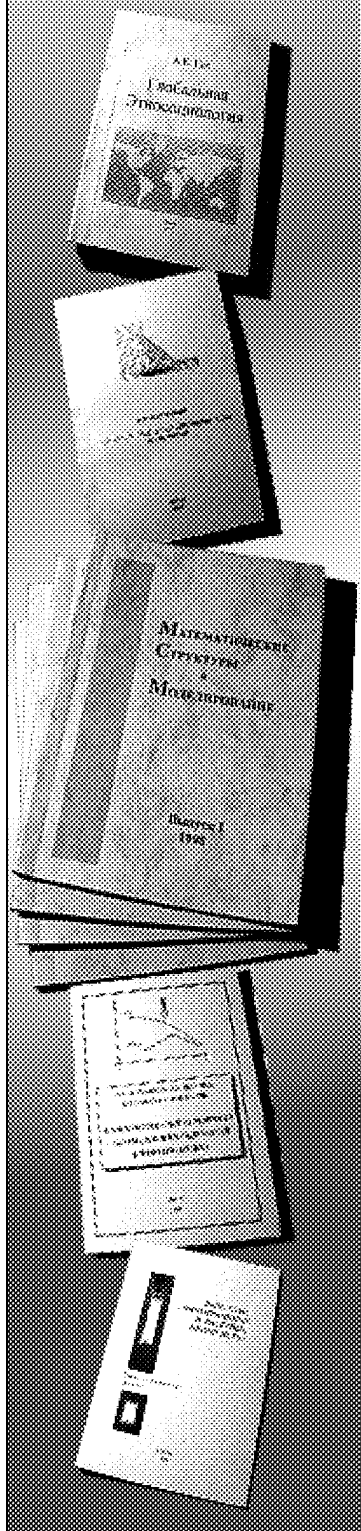
- О.В.Величко, А.И.Задорин. Численное решение уравнения с точечным источником на бесконечном интервале 5
- А.И.Задорин. Разностная схема для эллиптического уравнения со степенным пограничным слоем в полосе 11
- Е.В.Мельников. О продолжении равномерно непрерывных отображений 18
- А.В.Парамонов. Геометрия трехмерного конуса 23
- Г.И.Сечкин. Фундаментальные проблемы звездообразного анализа 31
- С.Д.Симонженков. О вычислении эллиптических интегралов третьего рода 40

Моделирование

- В.В.Коробицын. Модель территориального распределения пассионарной энергии этноса ... 44
- В.В.Коробицын. Доказательство теоремы существования и единственности решения для одного параболического уравнения 54
- Д.Н.Лавров. Алгоритм параллельной обработки многошкальных фазовых измерений нескольких источников излучения 61
- Н.В.Перцев, А.Н.Перцева. Интегральная модель Лотки-Вольтерра и некоторые свойства ее решений 72
- О.А.Реутова, О.В.Ирискина. Модель реактора риформинга. I. Кинетическая модель для полифункционального катализатора ... 82
- Ю.В.Фролова. Мульти-агентное моделирование социальных процессов в SWARM. 90
- Ю.В.Фролова, В.В.Коробицын, А.А.Лаптев. Компьютерная модель влияния ресурсобеспечения мужчин на поведение женщин 97

(продолжение на след. странице)

НАШИ ИЗДАНИЯ



Математическая социология

- А.К.Гуц, Р.Т.Файзуллин. *Математическое исследование методики организации одного социального мониторинга* 104
- Н.Ф. Жихалкина. *Динамический подход к задаче кластеризации* 133

Эконометрика

- И.П.Герашенко. *Методы прогнозирования в регрессионных и адаптивных моделях при анализе динамических рядов* 140

Методика преподавания

- Т.Н.Алешкова. *Гуманитаризация общего математического образования* 155
- Т.Н.Алешкова. *Психолого-педагогические основы обучения истории математики.* 162
- Л.И.Боженкова. *Модели взаимосвязи знаний и приемов учебно-познавательных действий их усвоения* 173
- Н.А.Бурова. *Историко-математический информационный поток* 178

Образование

- В.А.Далингер. *От педагогики авторитарной к педагогике авторитетной* 189

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

О.В. Величко, А.И. Задорин

The second order equation of the type reaction-diffusion with a small parameter effecting a higher derivative and a point source on the infinite interval is considered. The question of the transformation of the boundary conditions to the finite interval is investigated. For reduced to finite interval problem difference scheme is constructed. The uniform convergence of the difference scheme is proved.

При математическом моделировании стационарного распространения примеси от точечного источника возникает краевая задача для уравнения с малым параметром при старшей производной и источниковым членом в виде δ -функции Дирака. Краевые условия для такой задачи могут ставиться на бесконечном удалении от источника. При применении к такой задаче конечно-разностной схемы необходимо предварительно решить вопрос редукции краевых условий к ограниченной области.

В данной работе эти вопросы рассматриваются в случае обыкновенного дифференциального уравнения типа реакция-диффузия. В случае уравнения типа диффузия-конвекция данный вопрос был рассмотрен в [1]. Точечному источнику соответствует условие на скачок производной.

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу:

$$Lu = \varepsilon^2 u''(x) - c^2(x)u(x) = f(x), \quad x \neq 0, \quad (1a)$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \quad (1б)$$

$$u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \quad u(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1в)$$

Предполагаем, что

$$c(x) \geq \beta > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad Q > 0.$$

© 2000 О.В. Величко, А.И. Задорин

E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru

Омский государственный университет

Омский филиал Института математики СО РАН

$$c(x) \rightarrow c_1, f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty, c(x) \rightarrow c_2, f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

функции a, c, f — достаточно гладкие.

Решение $u(x)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода.

При моделировании распространения примеси предполагается, что $u(x)$ — концентрация примеси, ε — коэффициент диффузии, $c(x)$ — коэффициент поглощения примеси, Q — мощность точечного источника, $f(x)$ — несосредоточенный источник или сток примеси.

Всюду ниже под C будут подразумеваться положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и шагов разностной сетки. Под нормой функции непрерывного аргумента $p(x)$ будем понимать $\|p(x)\| = \max |p(x)|$, где x пробегает область определения функции.

1. Анализ решения исходной задачи

Нетрудно показать, что для оператора задачи (1) справедлив принцип максимума:

Пусть $\Psi(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция всюду, кроме точки $x = 0$, где производная может иметь разрыв первого рода. Тогда из условий

$$L\Psi(x) \leq 0, L_0\Psi(x) \leq 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Psi(x) \geq 0 \quad (3)$$

следует $\Psi(x) \geq 0, |x| < \infty$.

Нетрудно показать, что при $f(x) = 0$ $u(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$.

Лемма 1. При всех x

$$|u(x)| \leq \frac{Q}{2\beta} \exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|) + \frac{\|f(x)\|}{\beta^2}.$$

Доказательство. Определим функцию

$$\Psi(x) = \frac{Q}{2\beta} \exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|) + \frac{\|f(x)\|}{\beta^2} \pm u(x).$$

Можно показать, что тогда выполнены условия (3). В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает лемму. ■

Лемма 2. Для некоторой постоянной C

$$|u^{(j)}(x)| \leq C \left[1 + \frac{1}{\varepsilon^j} \exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|) \right]. \quad (4)$$

Доказательство. Докажем (4) для $j = 1, x < 0$. Перейдем к краевой задаче на полубесконечном интервале:

$$Lu(x) = \varepsilon^2 u''(x) - c^2(x)u(x) = f(x), \quad u(x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty, u(0) = A, \quad (5)$$

где в соответствии с леммой 1 $|A| \leq C$. Покажем, что

$$|u'(0)| \leq C/\varepsilon. \quad (6)$$

Определим

$$u_{\pm}(x) = u(0) \pm C\{1 - \exp(\varepsilon^{-1}x)\}, \quad z(x) = u_+(x) - u(x).$$

Несложно показать, что

$$Lz(x) \leq 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) \geq 0, \quad z(0) = 0.$$

В силу принципа максимума $z(x) \geq 0$. Таким образом, $u_+(x) \geq u(x)$, $u_+(0) = u(0)$. Следовательно, $u'(0) \geq -C/\varepsilon$. Аналогично можно показать, что $u_-(x) \leq u(x)$, $u_-(0) = u(0)$. Это доказывает оценку (6). Определим

$$\Psi(x) = C_1 + \frac{C_2}{\varepsilon} \exp(\beta \varepsilon^{-1}x) \pm u'(x).$$

Дифференцируя уравнение (5) и применяя принцип максимума к полученному уравнению, убедимся, что для некоторых C_1 и C_2 $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает (4) при $j = 1, x < 0$. Другие случаи аналогичны. Лемма доказана. ■

2. Перенос краевых условий из бесконечности

Рассмотрим вопрос переноса краевых условий из $\pm\infty$. Выделим многообразия решений исходного уравнения (1a), которые удовлетворяют предельным условиям на $(+\infty)$ и $(-\infty)$. Для этого используем подход [2]. Начнем с переноса условия из $(-\infty)$. Многообразие решений уравнения (1a) зададим уравнением первого порядка:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_1(x)u(x) + \beta_1(x), \quad (7)$$

где функции γ_1 и β_1 являются решениями задач:

$$\varepsilon \gamma_1'(x) + \gamma_1^2(x) - c^2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma_1(x) = c_1, \quad (8)$$

$$\varepsilon \beta_1'(x) + \beta_1(x)\gamma_1(x) = f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \beta_1(x) = 0. \quad (9)$$

Аналогичным образом предельное краевое условие на $+\infty$ выделяет многообразие решений:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_2(x)u(x) + \beta_2(x), \quad (10)$$

где функции γ_2 и β_2 являются решениями задач:

$$\varepsilon \gamma_2'(x) + \gamma_2^2(x) - c^2(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma_2(x) = -c_2, \quad (11)$$

$$\varepsilon \beta_2'(x) + \beta_2(x)\gamma_2(x) = f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta_2(x) = 0. \quad (12)$$

Лемма 3. *Справедливы оценки:*

$$\gamma_1(x) \geq \beta, \quad x \leq 0; \quad \gamma_2(x) \leq -\beta, \quad x \geq 0. \quad (13)$$

Доказательство. Докажем первую оценку в (13). Так как $\gamma_1(x)$ не зависит от $f(x)$, положим $f(x) = 0$. Тогда из (7) получим:

$$u(x) = u(0) \exp \left(\int_0^x \frac{\gamma_1(s)}{\varepsilon} ds \right).$$

С другой стороны, согласно лемме 1

$$u(x) \leq u(0) \exp \left(\frac{\beta}{\varepsilon} x \right),$$

Из этих двух соотношений следует:

$$\int_x^0 [\gamma_1(s) - \beta] ds \geq 0$$

для произвольного $x \leq 0$. Следовательно, $\gamma_1(0) \geq \beta$. Учитывая, что $c_1 \geq \beta$, а в точках экстремума $\gamma_1(s) = c(s)$, получим первую оценку в (13). Вторая оценка доказывается аналогично. Лемма доказана. ■

Используя соотношения (7), (10), от задачи (1) можно перейти к задаче на конечном интервале:

$$\varepsilon^2 u''(x) - c^2(x)u(x) = f(x), \quad x \neq 0, \quad \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q,$$

$$\varepsilon u'(L_1) = \gamma_1(L_1)u(L_1) + \beta_1(L_1), \quad \varepsilon u'(L_2) = \gamma_2(L_2)u(L_2) + \beta_2(L_2). \quad (14)$$

Можно показать, что вследствие условий $\gamma_1(x) > 0, \gamma_2(x) < 0$, к дифференциальному оператору задачи (14) можно применять принцип максимума. Используя принцип максимума, нетрудно убедиться, что решения задач (1) и (14) совпадают при всех $x \in [L_1, L_2]$.

Коэффициенты γ_i и β_i из задач (8), (9), (11), (12) могут быть найдены приближенно. Исследуем влияние погрешностей в этих коэффициентах на решение задачи (14).

Теорема 1. *Пусть*

$$|\gamma_1(L_1) - \tilde{\gamma}_1(L_1)| \leq \Delta_1, \quad |\beta_1(L_1) - \tilde{\beta}_1(L_1)| \leq \Delta_1,$$

$$|\gamma_2(L_2) - \tilde{\gamma}_2(L_2)| \leq \Delta_2, \quad |\beta_2(L_2) - \tilde{\beta}_2(L_2)| \leq \Delta_2.$$

Тогда для некоторой постоянной C

$$|u(x) - \tilde{u}(x)| \leq C\Delta_1 \exp(-\beta\varepsilon^{-1}(x - L_1)) + C\Delta_2 \exp(\beta\varepsilon^{-1}(x - L_2)).$$

Доказательство. Определим $z(x) = u(x) - \tilde{u}(x)$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$\begin{aligned} Lz &= \varepsilon^2 z''(x) - c^2(x)z(x) = 0, \quad L_0 z = \varepsilon z'(+0) - \varepsilon z'(-0) = 0, \\ D_1 z &= \tilde{\gamma}_1 z(L_1) - \varepsilon z'(L_1) = \tilde{\beta}_1 - \beta_1 + u(L_1)(\tilde{\gamma}_1 - \gamma_1), \\ D_2 z &= \varepsilon z'(L_2) - \tilde{\gamma}_2 z(L_2) = \beta_2 - \tilde{\beta}_2 + u(L_2)(\gamma_2 - \tilde{\gamma}_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Определим

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{\Delta_1}{\beta} (1 + |u(L_1)|) \exp(-\beta \varepsilon^{-1}(x - L_1)) + \\ &+ \frac{\Delta_2}{\beta} (1 + |u(L_2)|) \exp(\beta \varepsilon^{-1}(x - L_2)) \pm z(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$L\Psi \leq 0, \quad L_0\Psi = 0, \quad D_1\Psi \geq 0, \quad D_2\Psi \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\Psi(x) \geq 0$. Это доказывает теорему. ■

Уравнения (8),(9),(11),(12) содержат малый параметр при старшей производной. В связи с этим решения этих уравнений можно найти на основе асимптотических разложений по параметру ε . Остановимся на первом приближении для этих разложений:

$$\tilde{\gamma}_1(x) = c(x), \quad \tilde{\beta}_1(x) = f(x)/c(x), \quad \tilde{\gamma}_2(x) = -c(x), \quad \tilde{\beta}_2(x) = -f(x)/c(x). \quad (16)$$

Докажем, что формулы (16) определяют коэффициенты с точностью $O(\varepsilon)$.

Остановимся на коэффициенте $\gamma_1(x)$. Докажем, что

$$|\tilde{\gamma}_1(x) - \gamma_1(x)| \leq C\varepsilon. \quad (17)$$

Пусть $z(x) = \gamma_1(x) - \tilde{\gamma}_1(x)$. Тогда $z(x)$ является решением задачи:

$$R_\varepsilon z = \varepsilon z'(x) + (\gamma_1(x) + \tilde{\gamma}_1(x))z(x) = -\varepsilon \tilde{\gamma}_1'(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} z(x) = 0.$$

Определим

$$\Psi(x) = \varepsilon ||\tilde{\gamma}_1'(x)|| / (2\beta) \pm z(x).$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) \geq 0, \quad R_\varepsilon \Psi(x) \geq 0.$$

Тогда, как нетрудно убедиться рассуждениями от противного, $\Psi(x) \geq 0$. Оценка (17) доказана.

3. Построение разностной схемы

Итак, задачу (1) свели к задаче (14), сформулированной на конечном интервале. Построим разностную схему для задачи (14). Пусть $L_2 = -L_1 = L$, h - шаг равномерной сетки $\Omega = \{x_n : -N \leq n \leq N, x_{-N} = -L, x_0 = 0, x_N = L\}$.

Выделим в решении задачи (1) составляющую, задающую экспоненциальный рост решения в окрестности нуля:

$$u(x) = p(x) + V(x),$$

$$V(x) = \theta \exp(-c(0)\varepsilon^{-1}|x|), \quad |p^j(x)| \leq \varepsilon^{1-j} \exp(-\beta\varepsilon^{-1}|x|), \quad j \leq 4. \quad (18)$$

Строя разностную схему на основе того, чтобы она была точной на пограничной функции $V(x)$ [3], получим:

$$\begin{aligned} L_n^h u^h &= \tilde{\varepsilon}^2 \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2} - c_n^2 u_n^h = f_n, \quad n \neq 0, |n| < N, \quad c_n = c(x_n), f_n = f(x_n), \\ L_0^h u^h &= u_1^h - 2u_0^h + u_{-1}^h = -\frac{Q}{c_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{c_0 h}{\varepsilon}\right) \right], \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \frac{c_0 h / (2\varepsilon)}{\sinh(c_0 h / (2\varepsilon))}, \\ L_{-N}^h u^h &= \varepsilon \frac{u_{-N+1}^h - u_{-N}^h}{h} - \gamma_1 u_{-N}^h = \beta_1, \quad L_N^h u^h = \varepsilon \frac{u_N^h - u_{N-1}^h}{h} - \gamma_2 u_N^h = \beta_2. \end{aligned} \quad (19)$$

Теорема 2. Пусть $u(x)$ - решение задачи (14), u^h - решение схемы (19). Тогда для некоторой постоянной C при всех $n = -N, \dots, N$ выполнится

$$|u_n^h - u(x_n)| \leq Ch.$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - [u]$. Учитывая представление решения (18), можно показать:

$$|L_n^h z^h| \leq Ch, \quad n = -N, -N+1, \dots, N].$$

Используя принцип максимума для оператора схемы (19), получим утверждение теоремы. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Задорин А.И. Численное решение уравнения с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале // Сибирский журнал вычислительной математики. 1998. Т.1. N 3. С.249–260.
2. Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1981.
3. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т.6. N 7. С.237–248.

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ В ПОЛОСЕ

А.И. Задорин

Elliptic equation with a power boundary layer in a strip is considered. The difference scheme with the property of the uniform in a small parameter convergence is constructed. Then the scheme is reduced to the finite number of nodes.

При математическом моделировании стационарного распространения примеси в направлении ветра, согласно [1], возникает краевая задача для двумерного эллиптического уравнения в бесконечной полосе. Решение такой задачи содержит степенной пограничный слой. В данной работе для такой задачи строится равномерно сходящаяся схема. По одному из направлений схема содержит бесконечное число узлов. Предлагается способ редукции этой схемы к схеме с конечным числом узлов.

Итак, рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + w(y) \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

$$u(x, 1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0, \quad u(x, 0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad (2)$$

для бесконечной полосы: $D = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < 1\}$. Предполагаем, что

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad a(x, y) \geq \alpha > 0, \quad w(y) > \beta > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad c(x, y) \geq \sigma > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x, y) = a_{\pm\infty}(y), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x, y) = c_{\pm\infty}(y), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, y) = 0. \quad (3)$$

Для оценки производных по x потребуется дополнительное ограничение:

$$c(x, y) + 4a'_x \geq \sigma > 0. \quad (4)$$

Всюду под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от параметров ε_1 и ε_2 . Под нормой функции непрерывного аргумента или сеточной функции будем понимать максимальное по модулю значение, предполагаем, что норма матрицы согласована с векторной нормой.

Нетрудно убедиться, что справедлива оценка:

$$||u(x, y)|| \leq \beta^{-1} ||f(x, y)||.$$

Лемма 1. Для некоторой постоянной C_0 справедливы оценки:

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right| \leq C_0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq \frac{C_0}{\varepsilon_2 + y}. \quad (5)$$

В случае $\beta > 1$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq C_0 + C_0 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y} \right)^{\beta-1} \frac{1}{\varepsilon_2 + y}. \quad (6)$$

■

Доказать данную лемму можно с помощью принципа максимума, по аналогии с тем, как в случае обыкновенного уравнения это делалось в [2], [3].

1. Построение разностной схемы

Остановимся на вопросе построения разностной схемы для задачи (1)-(2). Согласно лемме 1 производные по x равномерно ограничены, а по переменной y имеет место степенной пограничный слой около границы $y = 0$. Для построения разностной схемы используем метод прямых по x . Будем предполагать сетку равномерной по обоим координатным направлениям, с шагами h_1 и h_2 . При применении метода прямых от функции двух аргументов $u(x, y)$ перейдем к бесконечной системе дифференциальных уравнений с решением $u_i(y) = u(x_i, y)$, $-\infty < i < +\infty$, $y \in [0, 1]$.

Итак, перейдем от (1)-(2) к системе уравнений:

$$(\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}(y) + w(y) \frac{\partial u_i}{\partial y}(y) = F(x_i, y, u),$$

$$u_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial u_i}{\partial y}(0) = 0, \quad u_i(1) = 0, \quad |i| < \infty, \quad u_i(y) \rightarrow 0, \quad |i| \rightarrow \infty, \quad (7)$$

где

$$F(x, y, u) = -\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, y)u + f(x, y), \quad u(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Пусть $\Delta_j = (y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, 2, \dots, N_2$, $y_0 = 0$, $y_{N_2} = 1$. Перейдем от (7) к системе уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$(\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial y^2}(y) + \tilde{w}(y) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}(y) = \tilde{F}(x_i, y, \tilde{u}),$$

$$\tilde{u}_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial y}(0) = 0, \quad \tilde{u}_i(1) = 0, \quad \tilde{u}_i(y) \rightarrow 0, \quad |i| \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где при $y \in \Delta_j$ $\tilde{w}(y) = w(y_j)$, $\tilde{u}_{i,j} = \tilde{u}(x_i, y_j)$.

$$\tilde{F}(x_i, y, \tilde{u}) = -\varepsilon_1 \frac{\tilde{u}_{i+1,j} - 2\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1^2} + a(x_i, y_j) \frac{\tilde{u}_{i,j} - \tilde{u}_{i-1,j}}{h_1} + c(x_i, y_j) \tilde{u}_{i,j} + f(x_i, y_j).$$

Для задачи (8), с кусочно-постоянными коэффициентами, построим точную разностную схему. Для этого для каждого i и каждого сеточного интервала Δ_j для уравнений (8) выпишем точное решение. Условие непрерывности производной по y на границе двух соседних интервалов Δ_j и Δ_{j+1} приведет к конечно-разностным соотношениям. Разностную аппроксимацию краевого условия получаем в результате подстановки решения задачи (8) на первом сеточном интервале в левое краевое условие. Построенная разностная схема имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^h - u_{i,j-1}^h - F_{i,j} w_j^{-1} h_2}{(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{w_j} [(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{1-w_j} - (1 + y_{j-1} \varepsilon^{-1})^{1-w_j}]} - \\ & - \frac{u_{i,j+1}^h - u_{i,j}^h - F_{i,j+1} w_{j+1}^{-1} h_2}{(1 + y_j \varepsilon^{-1})^{w_{j+1}} [(1 + y_{j+1} \varepsilon^{-1})^{1-w_j} - (1 + y_j \varepsilon^{-1})^{1-w_j}]} = \left(\frac{F_{i,j+1}}{w_{j+1}} - \frac{F_{i,j}}{w_j} \right) \varepsilon, \\ & u_{i,0}^h - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{F_{i,1}}{w_1} - \beta_2 (1 - w_1) \frac{u_{i,1}^h - u_{i,0}^h - F_{i,1} w_1^{-1} h_2}{(1 + h_2 \varepsilon_2^{-1})^{1-w_1} - 1} = 0, \quad u_{i,N_2}^h = 0, \\ & j = 1, \dots, N_2 - 1, \quad -\infty < i < +\infty, \quad u_{i,j}^h \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$F_{i,j} = -\varepsilon_1 \frac{u_{i+1,j}^h - 2u_{i,j}^h + u_{i-1,j}^h}{h_1^2} + a(x_i, y_j) \frac{u_{i,j}^h - u_{i-1,j}^h}{h_1} + c(x_i, y_j) u_{i,j}^h + f(x_i, y_j).$$

Теорема 1. Для схемы (9) справедлива оценка точности:

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, y_j)| \leq C h_1 + C |\ln(\varepsilon_2 + y_j)| h_2, \quad -\infty < i < +\infty, \quad 0 \leq j \leq N_2. \quad (10)$$

В случае $\beta > 1$

$$|u_{i,j}^h - u(x_i, y_j)| \leq C(h_1 + h_2), \quad -\infty < i < +\infty, \quad 0 \leq j \leq N_2. \quad (11)$$

Доказательство. По построению схема (9) является точной на решении задачи (8), поэтому достаточно оценить близость решений задач (7) и (8).

Пусть $z_i = u_i - \tilde{u}_i$, $-\infty < i < +\infty$. Нетрудно убедиться, что вектор - функция $z(y)$ является решением краевой задачи:

$$Lz = (\varepsilon_2 + y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \tilde{w}(y) \frac{\partial z}{\partial y} - Mz = F(x, y, u) - \tilde{F}(x, y, u) + (\tilde{w}(y) - w(y)) \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$z_i(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \frac{\partial z_i}{\partial y}(0) = 0, \quad z_i(1) = 0, \quad |i| < \infty, \quad z_i(y) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \pm\infty,$$

где M – трехдиагональная матрица бесконечного порядка, ненулевые элементы произвольной i -й строки которой имеют вид:

$$M_{i,i-1} = -\left(\frac{\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a(x_i, y)}{h_1}\right), \quad M_{i,i} = \frac{2\varepsilon_1}{h_1^2} + \frac{a(x_i, y)}{h_1} + c(x_i, y), \quad M_{i,i+1} = -\frac{\varepsilon_1}{h_1^2}.$$

Учитывая оценки производных согласно лемме 1, получим:

$$\max_i |L_i z(y)| \leq C_0 h_1 + \frac{C_0 h_2}{\varepsilon_2 + y}. \quad (12)$$

Можно показать, что для оператора L справедлив принцип максимума и если для какой-либо дважды непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\Psi(y)$ выполнены условия:

$$\Psi(0) - \varepsilon_2 \beta_2 \Psi'(0) \geq 0, \quad \Psi(1) \geq 0, \quad L\Psi(y) \leq 0, \quad \lim_{i \rightarrow \pm\infty} \Psi_i(y) > 0, \quad (13)$$

то $\Psi(y) \geq 0$ при всех $y \in [0, 1]$.

Определим вектор-функцию $\Psi(y)$ с компонентами

$$\Psi_i(y) = Ch_1(1 - y) - C \ln(\varepsilon_2 + y)h_2 \pm z_i(y).$$

Учитывая оценку (12), заключаем, что для некоторой постоянной C для заданной функции $\Psi(y)$ выполняются условия (13). В силу принципа максимума $\Psi(y) \geq 0$. Следовательно, при всех i

$$|z_i(y)| \leq Ch_1 - C \ln(\varepsilon_2 + y)h_2.$$

Это доказывает оценку (10).

Остановимся на случае $\beta > 1$. Учтем оценку производной (6) и получим:

$$\max_i |L_i z(y)| \leq C_0 h_1 + C_0 h_2 + C_0 h_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y}\right)^{\beta-1} \frac{1}{\varepsilon_2 + y}. \quad (14)$$

Определим вектор-функцию $\Psi(y)$ с компонентами:

$$\Psi_i(y) = Ch_1(1 - y) + Ch_2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + y}\right)^{\beta-1} + Ch_2 \pm z_i(y).$$

Учитывая оценку (14), получим, что для некоторой постоянной C для $\Psi_i(y)$ будут выполнены условия (13). Тогда в силу принципа максимума $\Psi_i(y) \geq 0$, $y \in [0, 1]$. Это доказывает оценку (11). Теорема доказана. ■

2. Редукция схемы к конечному числу узлов

Итак, доказали, что схема (9) обладает свойством сходимости, равномерной по малым параметрам. Эта схема может быть записана в виде трехточечной векторной разностной схемы с бесконечным числом узлов по координате x . Для того, чтобы построенную схему можно было использовать для компьютерных вычислений, необходимо решить вопрос редукции этой схемы к конечному числу узлов. Асимптотическое поведение решения скалярных разностных уравнений первого и второго порядка исследуется в [4].

Рассмотрим в векторном виде трехточечную разностную схему:

$$\mathbf{L}_i \mathbf{U} = \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_i, \quad -\infty < i < +\infty, \quad (15)$$

$$\mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow \pm\infty, \quad (16)$$

где относительно входящих в (15) матриц предполагаем выполненными ограничения:

$\mathbf{C}_i, \mathbf{D}_i$ - ненулевые неотрицательные диагональные матрицы порядка N ; матрицы $\mathbf{G}_i$ являются M -матрицами,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i &\rightarrow \mathbf{C}_{\pm\infty}, \quad \mathbf{G}_i \rightarrow \mathbf{G}_{\pm\infty}, \quad \mathbf{D}_i \rightarrow \mathbf{D}_{\pm\infty}, \quad \mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow \pm\infty, \\ \|\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{C}_i\| + \|\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{D}_i\| &\leq \sigma < 1, \\ \mathbf{C}_i \geq \mathbf{D}_i \geq 0, \quad \mathbf{Q}_i &= \mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i - \mathbf{D}_i, \\ Q_i^{j,j} &\geq \sum_{k \neq j} |Q_i^{j,k}| + \Delta, \quad \Delta > 0, \quad i > 0, \quad 1 \leq j \leq N. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим отдельно перенос краевого условия из $(+\infty)$ и из $(-\infty)$. Перенос краевого условия из $(+\infty)$ осуществляем на основе соотношения левой матричной прогонки, а перенос краевого условия из $(-\infty)$ – на основе соотношения правой матричной прогонки. Для переноса условия из $(-\infty)$ определим соотношение:

$$\mathbf{U}_{i-1} = \mathbf{A}_i^{(1)} \mathbf{U}_i + \mathbf{B}_i^{(1)}, \quad (18)$$

где коэффициенты $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ являются решениями задач с предельным условием на $(-\infty)$:

$$\mathbf{A}_{i+1} = (\mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{D}_i, \quad \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_{-\infty}, \quad i \rightarrow -\infty, \quad (19)$$

$$\mathbf{C}_i (\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i) + [\mathbf{G}_i - \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i] \mathbf{B}_{i+1} = -\mathbf{F}_i, \quad \mathbf{B}_i \rightarrow \mathbf{0}, \quad i \rightarrow -\infty, \quad (20)$$

матрица $\mathbf{A}_{-\infty}$ является решением уравнения

$$\mathbf{C}_{-\infty} \mathbf{A}^2 - \mathbf{G}_{-\infty} \mathbf{A} + \mathbf{D}_{-\infty} = \mathbf{0}$$

с нормой, меньшей единицы. Можно показать, что при выполнении условий (17) такое решение существует. Тогда при всех i $\|\mathbf{A}_i^{(1)}\| \leq \sigma < 1$. Из этого следует, что соотношение (18) выделяет многообразие решений разностного уравнения (15), удовлетворяющих предельному условию на $(-\infty)$.

Решения задач (19) и (20) могут быть найдены на основе разложения коэффициентов разностного уравнения (15) в ряд по отрицательным степеням i . Можно доказать, что при этом точность вычисления $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ увеличивается с увеличением $|i|$. Если разностное уравнение (15) вырождается при стремлении некоторого параметра к нулю (что случается при разностной аппроксимации уравнений с малым параметром при старших производных), для нахождения $\mathbf{A}_i^{(1)}$ и $\mathbf{B}_i^{(1)}$ можно использовать асимптотические разложения по малому параметру. При этом точность вычисления этих коэффициентов не зависит от i .

Перейдем точным образом от (15)-(16) к разностной схеме с конечным числом узлов:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{U}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{U}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{U}_{i+1} &= \mathbf{F}_i, \quad M < i < N, \\ \mathbf{U}_M &= \mathbf{A}_{M+1}^{(1)} \mathbf{U}_{M+1} + \mathbf{B}_{M+1}^{(1)}, \quad \mathbf{U}_N = \mathbf{A}_N^{(2)} \mathbf{U}_{N-1} + \mathbf{B}_N^{(2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Коэффициенты в краевых условиях схемы (21) из соответствующих задач могут быть вычислены приближенно. На основании принципа максимума можно показать, что решение схемы (21) устойчиво к возмущению этих коэффициентов. Точнее это можно сформулировать следующим образом.

Лемма 2. Пусть $\tilde{\mathbf{U}}$ – решение схемы (21) в случае возмущенных

$$\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{M+1}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_N^{(2)}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)} - \mathbf{A}_{M+1}^{(1)}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{B}}_{M+1}^{(1)} - \mathbf{B}_{M+1}^{(1)}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)} - \mathbf{A}_N^{(2)}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{B}}_N^{(2)} - \mathbf{B}_N^{(2)}\| &\leq \Delta, \\ \|\tilde{\mathbf{A}}_{M+1}^{(1)}\|, \quad \|\tilde{\mathbf{A}}_N^{(2)}\| &\leq \sigma < 1. \end{aligned}$$

Тогда при всех $i = M, M+1, \dots, N$

$$\max_i \|\tilde{\mathbf{U}}_i - \mathbf{U}_i\| \leq \frac{\Delta}{1-\sigma} (1 + \max_i \|\mathbf{U}_i\|).$$

■

Пусть $\|D_i\| \leq \varepsilon$. Тогда от (15)-(16) можно перейти к схеме с конечным числом узлов:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_i \mathbf{V}_{i-1} - \mathbf{G}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{D}_i \mathbf{V}_{i+1} &= \mathbf{F}_i, \quad M < i < N, \\ \mathbf{C}_{M+1} \mathbf{V}_M - \mathbf{G}_{M+1} \mathbf{V}_{M+1} &= \mathbf{F}_{M+1}, \quad \mathbf{C}_N \mathbf{V}_{N-1} - \mathbf{G}_N \mathbf{V}_N = \mathbf{F}_N. \end{aligned} \quad (22)$$

С помощью принципа максимума можно доказать, что справедлива оценка:

$$\max_i \|\mathbf{U}_i - \mathbf{V}_i\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\sigma} \{ \|\mathbf{G}_{M+1}^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{M+2}\| + \|\mathbf{G}_N^{-1}\| \times \|\mathbf{U}_{N+1}\| \}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Берлянд М.Е. *Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы*. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
2. Багаев Б.М., Солусенко Н.П. *Численное решение для задач со степенным пограничным слоем* // Моделирование в механике. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР. 1989. Т.3. N 1. С.54–59.
3. Лисейкин В.Д. *О численном решении уравнений со степенным погранслоем* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1986. Т.26. N 12. С.1813–1820.
4. Balla K. *On asymptotic behavior of solutions to some difference equations* // Advances in difference equations. Proceedings of the second int. conf. on difference equations. Veszprem, Hungary. 1995. P.67–80. Gordon and Breach science publ. 1997.

О ПРОДОЛЖЕНИИ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Е.В. Мельников

In this paper we prove that each uniformly continuous mapping from one uniform space to other closable and its closure is uniformly continuous. Based on this fact we prove the theorems about extension of uniformly continuous mappings and continuous linear operators having (sequentially) dense domain and (sequentially) complete range. Also it is proved that each uniform space and each (locally convex) topological vector space has a sequential completion.

Широко известные понятия из общей топологии и функционального анализа в работе используются, как правило, без пояснений (см., например, [1, 2, 3, 4]).

Определение 1. Пусть X и Y – топологические пространства, а $f : X \rightarrow Y$ – отображение из X в Y (т.е. $f \subset X \times Y$ является однозначным соответствием). Говорят, что отображение f допускает замыкание, если его замыкание $\text{cl } f$ в $X \times Y$ также является отображением.

Теорема 1. Пусть X и Y – равномерные пространства, причем Y отделимо. Тогда каждое равномерно непрерывное отображение

$$f : \text{dom } f \rightarrow Y \quad (\text{dom } f \subset X)$$

допускает замыкание, причем отображение $\text{cl } f : \text{dom}(\text{cl } f) \rightarrow Y$ равномерно непрерывно.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ – равномерность на X , а $\mathfrak{V}$ – равномерность на Y . Тогда для произвольного окружения $V \in \mathfrak{V}$ найдется такое окружение $V_1 \in \mathfrak{V}$, что $V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. В силу равномерной непрерывности f существует окружение $U_1 \in \mathfrak{U}$ такое, что

$$\forall (x', x'') \in (\text{dom } f)^2 \cap U_1 \quad (f(x'), f(x'')) \in V_1.$$

Пусть окружение $U \in \mathfrak{U}$ таково, что $U \circ U \circ U \subset U_1$. Возьмем $(x', y'), (x'', y'') \in \text{cl } f$ такие, что $(x', x'') \in U$. Тогда найдутся $x'_0, x''_0 \in \text{dom } f$ такие, что

$$(x'_0, x') \in U, \quad (x''_0, x'') \in U, \quad (y', f(x'_0)) \in V_1, \quad (f(x''_0), y'') \in V_1.$$

Поэтому $(x'_0, x''_0) \in U \circ U \circ U \subset U_1$ и, следовательно, $(f(x'_0), f(x''_0)) \in V_1$. Тогда $(y', y'') \in V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. Таким образом,

$$\forall V \in \mathfrak{V} \exists U \in \mathfrak{U} \forall (x', x'') \in U \left((x', y'), (x'', y'') \in \text{cl } f \Rightarrow (y', y'') \in V \right).$$

Отсюда следует, что, во-первых, в силу отделимости Y отображение f допускает замыкание, и, во-вторых, $\text{cl } f$ равномерно непрерывно. ■

Замечание 1. Теорема 1 установлена автором довольно давно (как базовая для доказательства теорем 2 и 5), и более пятнадцати лет она включается им в лекционные курсы для студентов (см., например, [5, с. 27], [6, с. 32]). Эта теорема идейно близка к теореме 26 [1, с. 260] (см. также [2, с. 231]), но ее утверждение является более универсальным и позволяет получать теоремы о продолжении отображений не только в случае полноты, но и в случае секвенциальной полноты их области прибытия. Такие теоремы и приводятся ниже, как для отдельных отображений, так и для множеств отображений.

Определение 2. Подмножество топологического пространства называется секвенциально замкнутым, если оно содержит предел любой своей сходящейся последовательности. Нетрудно заметить, что образ секвенциально замкнутого множества при гомеоморфизме секвенциально замкнут.

Определение 3. Наименьшее секвенциально замкнутое множество, содержащее множество A , называется его секвенциальным замыканием и обозначается $\text{scl } A$. Нетрудно заметить, что $\text{scl } A$ совпадает с пересечением всех секвенциально замкнутых множеств, содержащих A , откуда следует, что

$$\text{scl}(\text{scl } A) = \text{scl } A, \quad \text{scl}(A \cup B) = \text{scl } A \cup \text{scl } B, \quad \text{scl}(A \cap B) \subset \text{scl } A \cap \text{scl } B.$$

Определение 4. Пусть A и B – подмножества топологического пространства. Говорят, что A (секвенциально) плотно в B , если $(\text{s})\text{cl } A \supset B$.

Теорема 2. Пусть X_0 – (секвенциально) плотное подпространство равномерного пространства X , а Y – (секвенциально) полное отделимое равномерное пространство. Тогда каждое равномерно непрерывное отображение $f_0 : X_0 \rightarrow Y$ имеет, и притом единственное, равномерно непрерывное продолжение на все X .

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать, что $\text{dom}(\text{cl } f_0) = X$. Тогда $\text{cl } f_0$ и будет искомым продолжением. Пусть $\{x_j\}$ – направленность (последовательность) в $\text{dom}(\text{cl } f_0)$, сходящаяся к некоторому $x \in X$. Так как $\text{cl } f_0$ равномерно непрерывно, то $\{(\text{cl } f_0)(x_j)\}$ является направленностью (последовательностью) Коши в Y и, следовательно, сходится к некоторому $y \in Y$. В силу замкнутости отображения $\text{cl } f_0$, получаем, что $(x, y) \in \text{cl } f_0$ и, в частности, $x \in \text{dom}(\text{cl } f_0)$. Таким образом, $\text{dom}(\text{cl } f_0)$ (секвенциально) замкнуто в X , откуда в силу включений $X_0 \subset \text{dom}(\text{cl } f_0) \subset X$ и следует требуемое. ■

Замечание 2. Несеквенциальная часть этой теоремы является утверждением теоремы 26[1, с. 260] (см. также [2, с. 231]).

Следствие 1. Если X и Y – (секвенциально) полные отделимые равномерные пространства, X_0 и Y_0 – их (секвенциально) плотные подпространства, наделенные индуцированными равномерностями, а f_0 – равномерный изоморфизм X_0 на Y_0 , то $\text{cl } f_0$ является равномерным изоморфизмом X на Y .

Доказательство. В силу теоремы 2 $\text{cl } f_0$ является равномерно непрерывным отображением X в Y , а $(\text{cl } f_0)^{-1} = \text{cl } f_0^{-1}$ – равномерно непрерывным отображением Y в X , откуда и следует требуемое. ■

Замечание 3. Справедливость утверждения следствия в несеквенциальном случае отмечена в [2, с. 231] (см. также [3, с. 654]).

Теорема 3. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ и $(Y, \mathfrak{V})$ – равномерные пространства, причем Y отделимо. Если $X_0 \subset X$ и множество $\mathcal{F}$ отображений X_0 в Y равностепенно равномерно непрерывно, т.е.

$$\forall V \in \mathfrak{V} \exists U \in \mathfrak{U} \forall f \in \mathcal{F} \forall (x', x'') \in X_0^2 \cap U \quad (f(x'), f(x'')) \in V,$$

то множество $\overline{\mathcal{F}} := \{\text{cl } f \mid f \in \mathcal{F}\}$ равностепенно равномерно непрерывно на $X_1 := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \text{dom}(\text{cl } f)$.

Доказательство. Для произвольного окружения $V \in \mathfrak{V}$ найдется такое окружение $V_1 \in \mathfrak{V}$, что $V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. Согласно условию существует окружение $U \in \mathfrak{U}$ такое, что

$$\forall f \in \mathcal{F} \forall (x', x'') \in X_0^2 \cap U \quad (f(x'), f(x'')) \in V_1.$$

Пусть окружение $U_1 \in \mathfrak{U}$ таково, что $U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U$, и $(x', x'') \in X_1^2 \cap U_1$. Возьмем произвольно $f \in \mathcal{F}$. Поскольку $\text{dom } f = X_0$, а $X_1 \subset \text{dom}(\text{cl } f) \subset \text{cl}(\text{dom } f)$, то найдется пара $(x'_0, x''_0) \in X_0^2$ (зависящая от f) такая, что

$$(x'_0, x') \in U_1, \quad (x'', x''_0) \in U(f(x''_0), \text{cl } f(x'')) \in V_1.$$

Тогда $(x'_0, x''_0) \in U_1 \circ U_1 \circ U_1 \subset U$ и согласно выбору U получаем, что $(f(x'_0), f(x''_0)) \in V_1$. Тогда $(\text{cl } f(x'), \text{cl } f(x'')) \in V_1 \circ V_1 \circ V_1 \subset V$. Итак, для любого отображения $f \in \mathcal{F}$, если $(x', x'') \in X_1^2 \cap U_1$, то $(\text{cl } f(x'), \text{cl } f(x'')) \in V$. Следовательно, $\overline{\mathcal{F}}$ равностепенно равномерно непрерывно на X_1 . ■

Из теорем 2 и 3 вытекает

Теорема 4. Пусть X_0 – (секвенциально) плотное подпространство равномерного пространства X , Y – (секвенциально) полное отделимое равномерное пространство. Если множество $\mathcal{F}$ отображений X_0 в Y равностепенно равномерно непрерывно, то множество $\overline{\mathcal{F}}$ всех их продолжений на X также равностепенно равномерно непрерывно. ■

Далее предполагаем, что X и Y – векторные пространства над общим полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если X и Y – топологические векторные пространства (ТВП), то через $L(X, Y)$ обозначаем множество всех непрерывных линейных операторов, отображающих X в Y .

Определение 5. Пусть X и Y – ТВП. Множество операторов $\mathfrak{A} \subset L(X, Y)$ называется эквинепрерывным (или равностепенно непрерывным), если для любой окрестности V нуля в Y существует такая окрестность U нуля в X , что $A(U) \subset V$ для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Поскольку для линейного оператора его непрерывность (хотя бы в нуле) равносильна его равномерной непрерывности, то следующие две теоремы непосредственно вытекают из теорем 2 и 4.

Теорема 5. Пусть X_0 – (секвенциально) плотное подпространство ТВП X , а Y – (секвенциально) полное отделимое ТВП. Тогда для любого оператора $A_0 \in L(X_0, Y)$ существует, и притом единственный, оператор $A \in L(X, Y)$ такой, что $A|_{X_0} = A_0$. ■

Следствие 2. Если X и Y – (секвенциально) полные отделимые ТВП, X_0 и Y_0 – их (секвенциально) плотные подпространства, наделенные индуцированными топологиями, а f_0 – изоморфизм X_0 на Y_0 , то $\text{cl } f_0$ является изоморфизмом X на Y . ■

Теорема 6. Пусть X_0 – (секвенциально) плотное подпространство ТВП X , а Y – (секвенциально) полное отделимое ТВП. Тогда для любого эквинепрерывного множества операторов $\mathfrak{A} \subset L(X_0, Y)$ множество $\overline{\mathfrak{A}} \subset L(X, Y)$ всех их продолжений на X также эквинепрерывно. ■

В заключение приведем две теоремы о существовании секвенциального пополнения (т.е. секвенциально полного пространства, содержащего исходное в качестве секвенциально плотного подпространства).

Теорема 7. Каждое равномерное пространство изоморфно секвенциально плотному подпространству некоторого секвенциально полного равномерного пространства. Каждое отделимое равномерное пространство имеет единственное, с точностью до равномерного изоморфизма, отделимое секвенциальное пополнение.

Доказательство. Пусть X – равномерное пространство, $\mathfrak{X}$ – его пополнение (см. [1, с. 262] или [2, с. 232]). Обозначим через $\overline{X}$ секвенциальное замыкание X в $\mathfrak{X}$. Тогда $\overline{X}$ секвенциально полно и является искомым секвенциальным пополнением X . Второе утверждение вытекает из классической теоремы о пополнении равномерного пространства (см. ссылки выше) и следствия теоремы 2. ■

Предложение 1. Пусть X – топологическое векторное пространство. Тогда:

- 1) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad \forall A \subset X \quad \text{scl}(\lambda A) = \lambda(\text{scl } A);$
- 2) $\forall A, B \subset X \quad \text{scl } A + \text{scl } B \subset \text{scl}(A + B);$
- 3) если $A \subset X$ выпукло, уравновешено, абсолютно выпукло или линейно, то $\text{scl } A$ обладает таким же свойством.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из гомеоморфности гомотетий. Так как сдвиги также гомеоморфны, то для любого $x \in A$ множество $\text{scl}(A + B) - x$ секвенциально замкнуто. Поскольку $B \subset (A + B) - x \subset \text{scl}(A + B) - x$, то $\text{scl } B \subset \text{scl}(A + B) - x$, $x + \text{scl } B \subset \text{scl}(A + B)$ и, следовательно, $A + \text{scl } B \subset \text{scl}(A + B)$. Аналогично, для любого $y \in \text{scl } B$ получаем, что $\text{scl } A + y \subset \text{scl}(A + B)$, т.е. $\text{scl } A + \text{scl } B \subset \text{scl}(A + B)$. Третье утверждение предложения вытекает из первых двух. ■

Теорема 8. *Каждое (локально выпуклое) топологическое векторное пространство изоморфно секвенциально плотному подпространству некоторого секвенциально полного (локально выпуклого) топологического векторного пространства. Каждое отделимое (локально выпуклое) топологическое векторное пространство имеет единственное, с точностью до изоморфизма, отделимое секвенциальное пополнение.*

Доказательство. Пусть X – (локально) выпуклое ТВП, $\mathfrak{X}$ – его пополнение [4, с. 29]. Тогда в силу предыдущего предложения секвенциальное замыкание $\overline{X}$ пространства X в $\mathfrak{X}$ является секвенциально полным (локально выпуклым) ТВП, содержащим X в качестве секвенциально плотного подпространства. Второе утверждение следует из теоремы о пополнении ТВП [4, с. 29] и следствия теоремы 5. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Келли Дж.Л. *Общая топология*. М.: Наука, 1968.
2. Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры*. М.: Наука, 1968.
3. Энгелькинг Р. *Общая топология*. М.: Мир, 1986.
4. Шефер Х. *Топологические векторные пространства*. М.: Мир, 1971.
5. Мельников Е.В. *Элементы общей топологии: Методические указания*. Омск: ОмГУ, 1985. 35 с.
6. Мельников Е.В. *Топологические векторные пространства: Методические указания*. Омск: ОмГУ, 1990. 43 с.

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО КОНУСА

А.В. Парамонов

In present paper the problems of three-dimensional cone visualization are considered. In particular the behavior of 3-cone geodesics is analyzed. Besides in the paper formulae of the Ricci and the scalar curvatures of 3-cone have been obtained. Also the bounds of the sectional curvature are given.

Трехмерное многообразие представляет собой интересный объект исследования. Это связано прежде всего с тем, что его можно «увидеть». Конечно, не для всякого 3-многообразия эта задача легко решается, в том смысле, что не всегда удастся создать достаточно красивый зрительный образ многообразия. И тем не менее, есть случаи, когда это сделано особенно изящно. Например, У. Терстон в работе [4] приводит одно из таких описаний 3-тора и 3-сферы. Математически задача визуализации сводится к изучению поведения геодезических, или, более широко, к изучению геометрии многообразия, как локальной, так и глобальной. Автор данной статьи взял в качестве объекта такого исследования 3-конус, многообразие не менее интересное, чем, скажем, 3-сфера. В 3-конусе, например, существуют самопересекающиеся геодезические. Хотя понять это не так просто, глядя только на уравнения последних. Но в данном случае дело облегчается тем, что в 3-конусе есть семейство геодезических, которые являются таковыми и на 2-конусе, где изучать их достаточно легко. В связи с этим структура данной статьи следующая: в первой главе мы исследуем геодезические 2-конуса, причем для этого мы пользуемся достаточно простой, но удобной моделью, с помощью которой и доказываем утверждение о самопересечении. Во второй главе мы говорим о визуализации 3-конуса, опираясь на результаты первой главы. В заключительном разделе приводится анализ метрических свойств 3-конуса, в частности, выводятся формулы скалярной кривизны и кривизны Риччи. Также здесь даны оценки секционной кривизны.

1. Геодезические двумерного конуса

Прежде всего, чтобы избежать лишних технических сложностей, будем рассматривать конусы вращения, т.е. конусы, заданные уравнением

© 2000 А.В. Парамонов

E-mail: paramon@univer.omsk.su

Омский государственный университет

$$x^2 + y^2 - \frac{t^2}{a^2} = 0. \quad (1)$$

Этот 2-конус мы считаем изометрично погруженным в 3-конус

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{t^2}{a^2} = 0, \quad (2)$$

на котором берется метрика g , индуцированная из $\mathbf{R}^4$. Данный подход, конечно, не является единственно возможным. Например, можно рассмотреть погружение 2-конуса в многообразие, изометричное пространству Минковского (см. [2]). В этом случае уравнение (2) представляло бы метрику в данном пространстве. Но для наших целей годится и евклидово пространство в качестве объемлющего.

Как известно, конус (1) является поверхностью, разворачивающейся на плоскость, и его развертка суть бесконечный сектор с некоторым углом $\alpha < 2\pi$ при вершине, причем зависимость между a и α следующая:

$$a^2 = \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 - 1, \quad 0 < \alpha < 2\pi. \quad (3)$$

Выберем угол α так, чтобы он составлял целую часть от 2π , т.е. $2\pi = n\alpha$, где $n > 1$ - целое число. Тогда уравнение (1) примет вид

$$x^2 + y^2 - \frac{t^2}{n^2 - 1} = 0. \quad (4)$$

Далее для наших целей достаточно будет рассмотреть лишь верхнюю половину этого конуса. Поэтому введем такое обозначение:

$$K_n := \left\{ (x, y, 0, t) \in \mathbf{R}^4 : x^2 + y^2 - \frac{t^2}{n^2 - 1} = 0, \quad t > 0 \right\}, \quad n > 1. \quad (5)$$

Для этой поверхности мы построим следующую модель. Возьмем n разверток конуса K_n и склеим их вместе так, чтобы в итоге у нас получилась проколота плоскость $\mathbf{R}_0^2 = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Таким образом, каждой точке конуса K_n будет соответствовать n точек плоскости $\mathbf{R}_0^2$. Отождествив эти n точек, мы и получим «плоскую» модель конуса. А именно, справедливо следующее равенство:

$$K_n = \mathbf{R}_0^2 / C_n, \quad (6)$$

где C_n - подгруппа группы $SO(2)$, порожденная матрицей

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ -\sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Нетрудно видеть тогда, что геодезической конуса в нашей модели будет служить семейство n прямых:

$$l: x \cos\left(\beta + \frac{2\pi k}{n}\right) + y \sin\left(\beta + \frac{2\pi k}{n}\right) - p = 0, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (8)$$

Докажем теперь несколько простых утверждений, касающихся 2-конуса.

Утверждение 1. Для каждой точки конуса K_n существует $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ различных самопересекающихся в этой точке геодезических.

Доказательство. Пусть A - произвольная точка на конусе K_n . В нашей модели ей будет соответствовать n точек $A_1, \dots, A_n$ на плоскости $\mathbf{R}_0^2$, лежащих в вершинах правильного n -угольника с центром в O . Возьмем точку A_1 и соединим ее с оставшимися $n-1$ точками отрезками прямых. Заметим сразу, что если n - четно, мы не сможем соединить прямой точку A_1 с противоположной ей, т.к. O исключен из плоскости; т.е. в любом случае мы получим четное число прямых (либо $n-1$, если n - нечетно, либо $n-2$, если n - четно). Очевидно, эти прямые образуют пары симметричных относительно образующей OA_1 прямых, а именно: симметричны A_1A_2 и A_1A_n , A_1A_3 и A_1A_{n-1} и т.д. Причем каждую из этих прямых можно перевести в симметричную с помощью одного или нескольких преобразований вида (7). С несимметричными же прямыми этого сделать нельзя. Таким образом, с учетом отождествления (8), мы получаем k различных прямых на $\mathbf{R}_0^2/C_n$, где $k = \frac{n-1}{2}$, если n - нечетно и $k = \frac{n-2}{2}$, если n - четно. Если теперь обозначить целую часть a через $[a]$, то получим $k = \left[\frac{n-1}{2}\right]$ для любого целого $n > 1$, что и требовалось доказать. ■

Утверждение 2. Каждая отличная от образующей геодезическая на конусе K_n имеет $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ точек самопересечения.

Доказательство. Пусть l - произвольная геодезическая на конусе K_n . На плоскости $\mathbf{R}_0^2$ ей будет соответствовать семейство n прямых $l_1, \dots, l_n$, причем l_{i+1} получается из l_i поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{2\pi}{n}$. Возьмем прямую l_1 . Тогда прямые $l_2, \dots, l_n$ пересекают l_1 в точках $A_1, \dots, A_k$, где $k = n-1$, если n - нечетно и $k = n-2$, если n - четно, т.к. в этом случае существует прямая l_{i_0} , параллельная l_1 . Заметим, что точку A_i можно перевести в A_{k-i+1} с помощью отображения вида (7). Т.е. на конусе K_n эти точки совпадут. Таким образом, мы получаем $\frac{k}{2}$ различных точек пересечения прямой l_1 с $l_2, \dots, l_n$ на $\mathbf{R}_0^2/C_n$. Для конуса это означает, что геодезическая l имеет $\frac{k}{2}$ различных точек самопересечения, что и требовалось доказать. ■

Замечание 1. Утверждение справедливо не только для K_n , но и для конуса (1) с произвольным a . В этом случае число самопересечений геодезической равно наибольшему целому числу, меньшему $\frac{\pi}{\alpha}$, где $\alpha \in (0, 2\pi)$ связан с a соотношением (3).

Замечание 2. Хотя геодезические на 2-конусе и имеют точки самопересечения, они, тем не менее, не являются замкнутыми кривыми.

Утверждение 3. Пусть на конусе K_n ($n > 2$) даны отличная от образующей геодезическая l и точка $A \notin l$. Тогда любая геодезическая, проходящая через точку A , будет пересекать l .

Доказательство. Пусть l - произвольная геодезическая конуса K_n и точка $A \notin l$. На плоскости $\mathbf{R}_0^2$ им соответствуют семейство прямых $l_1, \dots, l_n$ и множество точек $A_1, \dots, A_n$. Выберем среди прямых $\{l_i\}$ две пересекающиеся, например: l_1 и l_2 . Понятно, что такие прямые существуют, если $n > 2$. Из множества $\{A_i\}$ также возьмем произвольную точку A_{i_0} . Очевидно, что через A_{i_0} нельзя провести прямую, параллельную одновременно двум данным l_1 и l_2 . Таким образом, на конусе K_n нельзя провести через A геодезическую, параллельную l , что и требовалось доказать. ■

Как видим, конус K_n является неевклидовым пространством, если $n > 2$. Кроме того, нетрудно понять, что на конусе K_2 пятый постулат Евклида верен. Таким образом, K_2 стоит особняком в семействе конусов вида (5). Кроме описанного отличия, у него есть и еще одно, а именно: на K_2 можно ввести прямоугольную координатную сетку из геодезических.

В силу этих обстоятельств здесь нужно отметить отличие конуса от, скажем, сферы или тора. Если свойства сферы не зависят качественно от ее радиуса, то геометрия конуса существенно определяется углом при его вершине. Поэтому во всех наших утверждениях постоянно фигурирует параметр n .

2. Взгляд изнутри конуса

Для визуализации 3-конуса необходимо понять, каким видит 2-конус K_n двумерный наблюдатель, находящийся на нем¹. Но сначала нужно сделать вот какое замечание.

1. У конуса есть особая точка - вершина. Находиться в ней может лишь точечный объект, т.к. твердые 2-тела, не допускающие самопересечений, не могут приближаться вплотную к вершине. Причем, чем больше их размеры, тем дальше они должны находиться от вершины. Точечный же наблюдатель, оказавшийся в вершине, не обнаружит никаких видимых отличий окружающего его пространства от евклидова, т.к. геодезическими, проходящими через вершину, являются только образующие. В силу этих причин мы исключили вершину из рассмотрения в нашей модели.

Теперь мы можем приступить к описанию тех эффектов, которые возникают на K_n вследствие самопересечения геодезических. Представим, что вы находитесь на конусе K_n , причем не в вершине.

2. Тогда вы сразу заметите $n - 1$ своих изображений-двойников. Причем противоположного двойника вы увидите, если будете недалеко от вершины. В противном случае вам помешает сделать это «черная дыра», находящаяся в ней. Все двойники будут находиться на одинаковом расстоянии от вершины, т.е. визуальнo на некоторой окружности, к тому же еще симметрично относительно той образующей, что проходит через вас.

¹В связи с этим нам хотелось бы отметить книгу [5], в которой автор в научно-популярной форме рассказывает о «двумерном» зрении, хотя его идеи в этом плане несколько отличаются от наших.

3. К сожалению, подойти к какому-либо своему двойнику вам не удастся, т.к. они приходят в движение одновременно с вами. Двигаясь же в направлении двойника, вы будете приближаться к вершине, в окрестности которой находится твердому телу запрещено.

4. Таким образом, исследовать своих двойников нельзя. Но можно это сделать с двойниками кого-нибудь еще. Итак, представим теперь, что в коническом мире вместе с вами нахожусь и я. Естественно, у меня будет столько же дубликатов, сколько и у вас. Если я буду стоять на месте, то вы сможете подойти по очереди к ним ко всем. При этом каждый раз вы будете убеждаться, что мой дубликат является не чем-то иллюзорным, наподобие отражения в зеркале, а им являюсь я сам. Иными словами, вы всякий раз, двигаясь к моему двойнику, будете подходить ко мне. И в этом нет ничего удивительного, т.к. вы будете перемещаться по геодезическим, а они, как доказано ранее, самопересекаются.

Мы описали, конечно, не все визуальные эффекты конического двумерного мира. Но читатель с образным мышлением сможет найти и другие, пользуясь рассуждениями, подобными нашим.

5. Что же касается 3-конуса, то все, о чем мы говорили выше, справедливо и для него, т.к. 2-конус является вполне геодезической поверхностью в 3-конусе (см. ниже теорему 4). Здесь только нужно заметить, что двойников в 3-конусе будет уже не конечное число, а континуум. Это объясняется увеличением числа самопересекающихся геодезических. Они получаются из геодезических 2-конуса движениями 3-конуса, которые образуют группу, изоморфную $SO(3)$.

6. Следующее замечание касается перемещения тел в 3-конусе. В силу того, что скалярная кривизна 3-конуса отрицательна (см. ниже теорему 3), «жесткие» движения трехмерных тел в нем, отличные от движений самого конуса, невозможны. А для «двумерных» тел жесткие нетривиальные движения существуют, т.к. они существуют на 2-конусе. Таким образом, можно сказать, что в коническом мире, чем объект тоньше, тем он подвижней.

7. И в конце этого раздела опишем еще один эффект, наблюдаемый в 3-конусе, который отсутствует у 2-конуса. В первом существуют двумерные направления, на которых секционная кривизна отрицательна. Следовательно, поверхность, образованная геодезическими, проходящими через фиксированную точку и касающимися этой двумерной площадки, имеет отрицательную гауссову кривизну (см. [3]). Это явление позволяет наблюдателю распознать неевклидовость 3-конуса даже вдали от вершины, где скалярная кривизна близка к нулю.

3. Кривизны трехмерного конуса

В этом разделе мы исследуем секционную и скалярную кривизны 3-конуса и его кривизну Риччи. Кроме этого докажем вполне геодезичность 2-конуса.

Рассмотрим трехмерный конус вращения M :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{t^2}{a^2} = 0, \quad (9)$$

вложенный в $\mathbf{E}^4$. Перепишем уравнение (9) в параметрическом виде:

$$x = \frac{t}{a} \cos \phi \cos \psi, \quad y = \frac{t}{a} \sin \phi \cos \psi, \quad z = \frac{t}{a} \sin \psi, \quad t = t, \quad (10)$$

где координаты берутся в следующем порядке $t \neq 0$, $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Тогда индуцированная метрика на конусе M имеет вид

$$\|g_{ij}\| = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \cos^2 \psi \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Ненулевых коэффициентов связности ∇ будет 9:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{t}, \quad (12)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{t}{a^2 + 1}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = -\frac{\sin \psi}{\cos \psi}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{t \cos^2 \psi}{a^2 + 1}, \quad \Gamma_{33}^2 = \cos \psi \sin \psi. \quad (13)$$

Ненулевых компонент тензора Римана будет 4:

$$R_{323}^2 = -R_{332}^2 = -\frac{a^2}{a^2 + 1} \cos^2 \psi, \quad R_{232}^3 = -R_{223}^3 = -\frac{a^2}{a^2 + 1}. \quad (14)$$

Столько же ненулевых компонент и у тензора кривизны:

$$R_{2323} = R_{3232} = -R_{2332} = -R_{3223} = -\frac{t^2}{a^2 + 1} \cos^2 \psi. \quad (15)$$

Теорема 1. *Справедливы следующие точные оценки секционной кривизны K конуса M :*

$$-\frac{a^4}{t^2(a^2 + 1)} \leq K \leq 0. \quad (16)$$

Доказательство. Обозначим через e_1, e_2, e_3 - базис TM_x , составленный из векторов, касательных к координатным линиям. Пусть в этом базисе даны два произвольных вектора $X = (\eta_1, \xi_1, \zeta_1)$ и $Y = (\eta_2, \xi_2, \zeta_2)$, тогда

$$\begin{aligned} K(X \wedge Y) &= \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{(\xi_1^2 \zeta_2^2 - 2\xi_1 \xi_2 \zeta_1 \zeta_2 + \xi_2^2 \zeta_1^2) R_{2323}}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \\ &= \frac{-a^4 t^2 \cos^2 \psi (\xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1)^2}{b^2 [b^2 t^2 (\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1)^2 + b^2 t^2 \cos^2 \psi (\eta_2 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_2)^2 + t^4 \cos^2 \psi (\xi_1 \zeta_2 - \xi_2 \zeta_1)^2]} \end{aligned}$$

где $b^2 := a^2 + 1$. Отсюда следуют искомые оценки.

Из этого же выражения видно, что левое равенство достигается на бивекторе $e_2 \wedge e_3$, правое - на бивекторе $e_1 \wedge X$, где $X \in TM_x$ - произвольный. Таким образом, оценки (16) точные. ■

Замечание. В силу своей экстремальности, бивекторы $e_2 \wedge e_3$ и $e_1 \wedge X$ являются стационарными для секционной кривизны K . Нетрудно проверить, что других стационарных бивекторов нет.

Найдем теперь общую формулу для кривизны Риччи r_X в точке $x \in M$ по направлению $X = x^i e_i \in TM_x$. По определению

$$r_X = \frac{x^j x^k \sum_{i=1}^3 R_{ijik}}{g_{lm} x^l x^m},$$

отсюда, в силу равенств (15), получаем

$$r_X = -\frac{a^2 t^2 \cos^2 \psi [(x^2)^2 + (x^3)^2]}{(a^2 + 1)[(a^2 + 1)(x^1)^2 + t^2 (x^2)^2 + t^2 \cos^2 \psi (x^3)^2]}. \quad (17)$$

Вычислим по этой формуле кривизны Риччи по базисным направлениям e_1, e_2, e_3 :

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{a^2}{a^2 + 1} \cos^2 \psi, \quad r_3 = -\frac{a^2}{a^2 + 1}.$$

Заметим, что эти кривизны являются собственными для тензора Риччи, который имеет вид:

$$\|R_{ij}\| = -\frac{a^2}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \psi \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. *Базисные векторы e_1, e_2, e_3 являются стационарными для кривизны Риччи.*

Теорема 3. *Скалярная кривизна конуса M равна:*

$$R = -\frac{2a^4}{t^2(a^2 + 1)}. \quad (19)$$

Доказательство. По определению скалярная кривизна является сверткой тензора Риччи, поэтому, в силу (11) и (18), имеем:

$$R = g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} = -\frac{a^2}{t^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + 1} - \frac{a^2}{t^2 \cos^2 \psi} \cdot \frac{a^2}{a^2 + 1} \cos^2 \psi,$$

откуда и следует искомая формула. ■

Теорема 4. *2-конус (1) является вполне геодезической поверхностью в 3-конусе (2).*

Доказательство. Пусть N — 2-конус, заданный уравнением (1), с локальными координатами u, v . Погружение $f : N \rightarrow M$ в координатах имеет вид: $t = u, \psi = 0, \phi = v$. При этом базисные векторы $\partial_u, \partial_v \in TN_x$, касательные к координатным линиям u, v , совпадают с векторами $e_1, e_3 \in TM_x$ соответственно.

Возьмем два произвольных вектора $X = (x^1, x^2), Y = (y^1, y^2) \in TN_x$. Тогда, в силу (12) и (13), имеем:

$$\nabla_X Y = -\frac{x^2 y^2 t}{a^2 + 1} e_1 + \frac{x^1 y^2 + x^2 y^1}{t} e_3 \in TN_x. \quad (20)$$

Таким образом, $\forall X, Y \in TN_x \quad \nabla_X Y = \nabla'_X Y$, где ∇' — связность на N . Это равенство и доказывает вполне геодезичность N . ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом*. М.: Мир, 1971.
2. Кантор Б.Е., Франгулов С.А. *Об изометричном погружении двумерных римановых многообразий в псевдоевклидово пространство* // Мат. заметки. 1984. Т.36. N 3. С.447–455.
3. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. М.: Наука, 1967.
4. Thurston W.P. *Three-dimensional geometry and topology. Draft*. The Geometry Center, University of Minnesota, The National Science and Technology Research Center for Computation and Visualization of Geometric Structures.
5. Эбботт Э.Э. *Флатландия*. Бюргер Д. *Сферландия*. М.: Мир, 1976.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЗВЕЗДООБРАЗНОГО АНАЛИЗА

Г.И. Сечкин

The paper is concerned with some fundamental problems in several complex variables for starlike domains

Е.М.Чирка показал, что оболочка голоморфности полувзвездной области с хорошим основанием однолистка и полувзвездна и что всякая функция, голоморфная в полувзвездной области в $\mathbb{C}^n$, приближается многочленами на компактных подмножествах.

Опираясь на результаты Е.М.Чирки, автор в данной работе доказал существование однолистной оболочки голоморфности для звездообразных областей, основание которых является областью голоморфности; решил для подобных областей обобщенную проблему полиномиальной аппроксимации голоморфных функций, получил достаточные условия разрешимости первой проблемы Кузена, проблемы Пуанкаре и $\bar{\partial}$ -проблемы; доказал критерий разрешимости второй проблемы Кузена в терминах групп когомологий де Рама.

1. Проблема существования однолистной оболочки голоморфности звездообразной области

Определение 1.1. [1] Область $G \subset \mathbb{C}^n$ называется *звездной* относительно $a \in G$, если всякая (действительная) прямая, проходящая через a , имеет с G связное пересечение. Область вида $G = \{('z, z') : 'z \in 'G \subset \mathbb{C}^{n-k}, z' \in G_{'z} \subset \mathbb{C}^k\}$, где $G_{'z}$ при каждом $'z \in 'G$ – звездная область относительно фиксированной точки $a' \in \mathbb{C}^k$ ($1 \leq k \leq n$), называется *полувзвездной* областью.

Область $'G$ называется *основанием* полувзвездной области G .

Основание $'G$ называется *хорошим*, если $'G$ представимо в виде объединения областей $'G_v \subseteq 'G$ с однолистными оболочками голоморфности в $\mathbb{C}^n$ (в частности, само $'G$ должно иметь однолистную оболочку голоморфности).

Определение 1.2. Область $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, называется *звездной по набору координат* $z_1, \dots, z_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ относительно $(a_1, \dots, a_k)$, если вместе с любой точкой $z = (z_1, \dots, z_n)$ ей принадлежат для любого ε из $[0; 1]$ и все точки вида

$$(\varepsilon z_1 + (1 - \varepsilon)a_1, \dots, \varepsilon z_k + (1 - \varepsilon)a_k, z_{k+1}, \dots, z_n). \quad (1)$$

Область $D \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, называется *покоординатно звездной по набору координат* $z_1, \dots, z_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ относительно $(a_1, \dots, a_k)$, если вместе с любой точкой $z = (z_1, \dots, z_n)$ ей принадлежат для любых $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ из $[0; 1]$ и все точки вида

$$(\varepsilon_1 z_1 + (1 - \varepsilon_1)a_1, \dots, \varepsilon_k z_k + (1 - \varepsilon_k)a_k, z_{k+1}, \dots, z_n). \quad (2)$$

Класс областей с условием (1) обозначим $\mathcal{A}(k; n)$, с условием (2) – $\mathcal{B}(k; n)$. Области, принадлежащие классу $\mathcal{A}(k; n)$ или классу $\mathcal{B}(k; n)$, будем называть *звездообразными областями*, а вопросы многомерного комплексного анализа в звездообразных областях – *звездообразным анализом*.

Из определений 1.1 и 1.2 вытекает, что всякая звездообразная область является полузвездной областью; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Лемма 1.1. [1] *Оболочка голоморфности полузвездной области $\mathbf{G}$ с хорошим основанием $'\mathbf{G}$ однолистка и полузвездна.* ■

Из леммы 1.1 и определений 1 и 2 сразу вытекает

Лемма 1.2. *Оболочка голоморфности звездообразной области $\mathbf{G}$ с хорошим основанием $'\mathbf{G}$ однолистка и полузвездна.* ■

Однако тщательный анализ доказательства леммы 1.1 показывает, что, заменяя в нем термин «полузвездная область» на термин «звездообразная область», можно доказать и следующую лемму, решающую проблему существования однолистной оболочки голоморфности звездообразной области с хорошим основанием:

Лемма 1.3. *Оболочка голоморфности звездообразной области $\mathbf{G}$ с хорошим основанием $'\mathbf{G}$ однолистка и звездообразна.* ■

Из леммы 1.3 как следствие вытекает

Лемма 1.4. *Оболочка голоморфности $\hat{\mathbf{G}}$ звездообразной области $\mathbf{G}$, основание $'\mathbf{G}$ которой есть область голоморфности, является звездообразной однолистной областью голоморфности.*

Доказательство. Покажем, что из условия « $'\mathbf{G}$ есть область голоморфности» следует условие « $'\mathbf{G}$ – хорошее основание». В самом деле, пусть $'\mathbf{G}$ – область голоморфности. Тогда $'\mathbf{G}$ – псевдовыпуклая область и, в силу предложений II и III [6, с. 272], $'\mathbf{G} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} 'G_{\nu}$, где $'G_{\nu}$ – строго псевдовыпуклые области, которые суть области голоморфности, совпадающие со своими однолистными оболочками голоморфности, причем

$$('G_{\nu} \subsetneq 'G_{\nu+1} \subset 'G) \Rightarrow ('G_{\nu} \subsetneq 'G, \nu = 1, 2, \dots),$$

то есть $'G$ – хорошее основание.

По лемме 1.3 оболочка голоморфности $\hat{G}$ однолистка, значит, по фундаментальной теореме об оболочках голоморфности, $\hat{G}$ – область голоморфности. ■

2. Обобщенная проблема полиномиальной аппроксимации голоморфных функций

Известны два подхода к проблеме полиномиальной аппроксимации голоморфных функций многих комплексных переменных.

Определение 2.1. [1] Область $G \subset \mathbb{C}^n$ называется *областью Рунге*, если всякая функция, голоморфная в G , приближается многочленами равномерно на компактных подмножествах G .

Определение 2.2. [2] Область голоморфности $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ называется *областью Рунге*, если многочлены плотны в $A(\Omega)$, то есть всякую функцию $f \in A(\Omega)$ можно приблизить равномерно на компактных подмножествах из Ω аналитическими многочленами.

Здесь $A(\Omega)$ – множество функций, аналитических в области Ω , причем аналитичность в Ω равносильна голоморфности в Ω .

Всякая область Рунге в смысле определения 2.2. (ОХ) есть область Рунге в смысле определения 2.1 (ОЧ); обратное, вообще говоря, неверно.

Синтез двух указанных подходов приводит к новому подходу: *обобщенную проблему полиномиальной аппроксимации* будем трактовать как задачу для произвольной (в частности, для полустарой или звездобразной) области G определить, является ли область G или ее оболочка голоморфности $\hat{G}$ областью Рунге в смысле ОЧ либо в смысле ОХ.

Теорема 2.1. [1] Пусть G – полустарая область в $\mathbb{C}^n$, основание которой $'G$ – область Рунге в смысле ОЧ в $\mathbb{C}^{n-k}$.

Тогда G – область Рунге в смысле ОЧ. ■

Следствие 2.1. Пусть G – звездобразная область в $\mathbb{C}^n$, основание которой $'G$ – область Рунге в смысле ОЧ в $\mathbb{C}^{n-k}$.

Тогда G – область Рунге в смысле ОЧ. ■

Обобщенную проблему полиномиальной аппроксимации в случае звездобразных областей пространства $\mathbb{C}^n$ решает следующая теорема.

Теорема 2.2. Пусть G – звездобразная область в $\mathbb{C}^n$, основание которой $'G$ – область Рунге в смысле ОХ в $\mathbb{C}^{n-k}$.

Тогда G – область Рунге в смысле ОЧ, а оболочка голоморфности $\hat{G}$ области G – область Рунге в смысле ОХ.

Доказательство. Если $'G$ – область Рунге в смысле ОХ, то $'G$ есть область Рунге и в смысле ОЧ. Кроме того, всякая звездобразная область в $\mathbb{C}^n$ является

полузвездной областью в $\mathbb{C}^n$. Поэтому по теореме 2.1 область $\mathbf{G}$ есть область Рунге в смысле ОЧ.

По лемме 1.4 область $\mathbf{G}$ обладает однолистной звездообразной оболочкой голоморфности $\widehat{\mathbf{G}}$, которая является областью голоморфности в $\mathbb{C}^n$.

Покажем, что $\widehat{\mathbf{G}}$ есть область Рунге в смысле ОЧ. Действительно, так как, по условию, $'\mathbf{G}$ есть область голоморфности, то $(\widehat{'\mathbf{G}}) = '\mathbf{G}$ ([7, с. 209]). По теореме Вейля ($'\mathbf{G}$ – область Рунге в смысле ОХ и, тем более, в смысле ОЧ) область $(\widehat{'\mathbf{G}}) = '\mathbf{G}$ полиномиально выпукла ([7, с. 256]). Кроме того, $'\mathbf{G} \times \mathbb{C}^k$ полиномиально выпукло в $\mathbb{C}^n$ и $'\mathbf{G} \times \mathbb{C}^k$ как область голоморфности есть многообразие Штейна ([2, с. 146]).

Звездообразная область $\widehat{\mathbf{G}}$, как и всякая полузвездная область, раздуваема с $'\mathbf{G} \times \mathbb{C}^k$. По теореме 1 [1], всякая функция, голоморфная в окрестности $\widehat{\mathbf{G}}$, приближается в $'\mathbf{G} \times \mathbb{C}^k$ функциями, голоморфными в $'\mathbf{G} \times \mathbb{C}^k$, равномерно на компактных подмножествах в $\widehat{\mathbf{G}}$.

В силу полиномиальной выпуклости $'\mathbf{G} \times \mathbb{C}^k$, всякая голоморфная в $'\mathbf{G} \times \mathbb{C}^k$ функция, в свою очередь, по теореме Ока-Вейля ([8, с. 58]) равномерно аппроксимируется полиномами на компактных подмножествах в $'\mathbf{G} \times \mathbb{C}^k$, следовательно, и на компактных подмножествах области $\widehat{\mathbf{G}}$, то есть $\widehat{\mathbf{G}}$ – область Рунге в смысле ОЧ.

Наконец, $\widehat{\mathbf{G}}$ – область голоморфности и область Рунге в смысле ОЧ, следовательно, $\widehat{\mathbf{G}}$ – область Рунге в смысле ОХ. Теорема 2.2. доказана. ■

3. $\bar{\partial}$ -проблема в полузвездных и звездообразных областях

$\bar{\partial}$ -проблема состоит в исследовании уравнения

$$\bar{\partial}u = f,$$

где f – дифференциальная форма типа $(p, g + 1)$, удовлетворяющая условию $\bar{\partial}f = 0$ ($p, g \geq 0$), u – искомая функциональная форма типа (p, g) , то есть

$$u = \sum_{\substack{j_1 < j_2 < \dots < j_p \\ i_1 < i_2 < \dots < i_q}} u_{i,j} (dz)_j \wedge (d\bar{z})_i,$$

$$j = (j_1, \dots, j_p), i = (i_1, \dots, i_q), (dz)_j = dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p}, (d\bar{z})_i = d\bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i_q},$$

$$\bar{\partial}u = \sum_{j,i} \bar{\partial}u_{j,i} \wedge (dz)_j \wedge (d\bar{z})_i = \sum_{j,i} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial u_{j,i}}{\partial \bar{z}_\nu} d\bar{z}_\nu \right) \wedge (dz)_j \wedge (d\bar{z})_i.$$

Теорема 3.1. Пусть $\mathbf{G}$ – полузвездная (звездообразная) область голоморфности в $\mathbb{C}^n$, основание которой $'\mathbf{G}$ – область Рунге в смысле ОЧ в пространстве $\mathbb{C}^{n-k}$.

Тогда уравнение в области $\mathbf{G}$

$$\bar{\partial}u = f$$

имеет решение $u \in C_{(p,q)}^\infty(\mathbf{G})$ для всякой формы $f \in C_{(p,q+1)}^\infty(\mathbf{G})$ такой, что $\bar{\partial}f = 0$ ($p, q \geq 0$).

Доказательство. Согласно теореме 2.1 (следствию 2.1), $\mathbf{G}$ – область Рунге в смысле ОЧ и, по условию, $\mathbf{G}$ – область голоморфности. Следовательно, $\mathbf{G}$ – область Рунге в смысле ОХ.

Применяя к области $\mathbf{G}$ теорему К.Ока ([2], теорема 2.7.8, с.85), получаем существование решения $\bar{\partial}$ -уравнения с указанными свойствами в полувзвездной (звездообразной) области $\mathbf{G}$. ■

Теорема 3.2. Пусть $\mathbf{G}$ – звездообразная область в $\mathbb{C}^n$, основание которой $'\mathbf{G}$ – область Рунге в смысле ОХ в пространстве $\mathbb{C}^{n-k}$.

Тогда уравнение в области $\hat{\mathbf{G}}$

$$\bar{\partial}u = f$$

имеет решение $u \in C_{(p,q)}^\infty(\hat{\mathbf{G}})$ для всякой формы $f \in C_{(p,q+1)}^\infty(\hat{\mathbf{G}})$ такой, что $\bar{\partial}f = 0$ ($p, q \geq 0$).

Доказательство. По теореме 2.2 оболочка голоморфности $\hat{\mathbf{G}}$ области $\mathbf{G}$ есть область Рунге в смысле ОХ.

По теореме К.Ока ([2], теорема 2.7.8, с.85) имеем указанный для области Рунге $\hat{\mathbf{G}}$ результат по решению $\bar{\partial}$ -проблемы. ■

Замечание 3.1. При дополнительном условии строгой псевдовыпуклости области $\mathbf{G}$ и ее оболочки голоморфности $\hat{\mathbf{G}}$ результаты в теоремах 3.1 и 3.2 можно существенно дополнить: с помощью формулы Лере-Стокса (Г.М.Хенкин) выписать в явном виде решения $\bar{\partial}$ -уравнения и найти важные в приложениях оценки этих решений в равномерной метрике [9, с. 119].

4. Проблемы Кузена в полувзвездных и звездообразных областях. Проблема Пуанкаре

Первая (аддитивная) проблема Кузена формулируется следующим образом: дано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ комплексного многообразия, и в каждой U_α задана мероморфная функция f_α , причем в любом непустом пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ разность $f_\alpha - f_\beta = h_{\alpha\beta} \in O(U_{\alpha\beta})$, то есть является голоморфной функцией в $U_{\alpha\beta}$; надо построить на всем многообразии функцию f такую, что $f - f_\alpha \in O(U_\alpha)$ для всех $\alpha \in A$.

Тот факт, что не всякая полувзвездная или звездообразная область есть область голоморфности, создает некоторые трудности в решении фундаментальных проблем, к которым, в частности, относятся и проблемы Кузена. Одним из способов преодоления этих трудностей служит переход от области D

к ее однолистной оболочке голоморфности $\hat{D}$ (если таковая существует), которая обязательно является областью голоморфности. Этот прием автор уже применил в пп.2–3 данной статьи.

Теорема 4.1. Пусть область $G \subset \mathbb{C}^n$ – полувзвездная область с хорошим основанием $'G$, а K – компактное подмножество области G , $K \subseteq G$.

Тогда: 1) для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ оболочки голоморфности $\hat{G}$ области G в области $\hat{G}$ разрешима любая первая проблема Кузена $\{f_\alpha\}$; 2) для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ множества K в нем разрешима любая первая проблема Кузена $\{f_\alpha\}$.

Доказательство. По лемме 1.1. и фундаментальной теореме об оболочках голоморфности оболочка голоморфности $\hat{G}$ области G есть полувзвездная область голоморфности. По теореме 2.5.5 [2] всякая область голоморфности представляет собой многообразие Штейна. Поэтому, согласно теореме А.Картана, для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия Штейна $\hat{G}$ первая проблема Кузена $\{f_\alpha\}$ разрешима.

Далее, K – замкнутое подмножество области G , $K \subseteq G$. Следовательно, по транзитивности отношения «содержится в ...», K есть замкнутое подмножество области $\hat{G}$, являющейся многообразием Штейна ([2], теорема 5.1.5, с.147). Многообразие K как замкнутое подмногообразие многообразия Штейна само является многообразием Штейна ([2], теорема 5.1.5, с.147). По теореме А.Картана на множестве K для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия Штейна K любая первая проблема Кузена $\{f_\alpha\}$ разрешима. ■

Аналогично, но с использованием леммы 1.4 доказывается следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть $G \subset \mathbb{C}^n$ – звездообразная область, основание $'G$ которой есть область голоморфности, а K – компактное подмножество области G , $K \subseteq G$.

Тогда: 1) для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ оболочки голоморфности $\hat{G}$ области G в области $\hat{G}$ разрешима любая первая проблема Кузена $\{f_\alpha\}$; 2) для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ множества K в нем разрешима любая первая проблема Кузена $\{f_\alpha\}$. ■

Вторая (мультипликативная) проблема Кузена формулируется следующим образом: дано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ комплексного многообразия M , и в каждой U_α задана функция $f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{M}^*)$, то есть мероморфная функция, не равная тождественно нулю, причем в любом непустом пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ частное $f_\alpha/f_\beta \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathcal{O}^*)$, то есть является голоморфной функцией, не обращающейся в нуль. Надо построить на всем многообразии M такую мероморфную функцию f , что $f/f_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}^*)$ для всех $\alpha \in A$.

Вторая проблема Кузена для покрытия эквивалентна задаче построения мероморфной функции по заданному дивизору.

Напомним, что совокупность $\mathcal{F}^r$ форм степени r на гладком многообразии M можно рассматривать как абелеву группу с операцией покоефици-

ентного сложения форм. В этой группе есть подгруппа Z^r , состоящая из замкнутых форм ω , для которых $d\omega = 0$. В силу идемпотентности оператора d ($d^2\omega = d(d\omega) = 0$) совокупность B^r точных форм степени r , которые являются дифференциалами форм из $\mathcal{F}^{r-1}$, является подгруппой группы Z^r . Фактор-группа

$$H^r(M) = Z^r / B^r$$

называется r -ой группой когомологий многообразия M относительно оператора d (группой де Рама). Если в формах допускаются комплексные коэффициенты, то эта группа обозначается $H^r(M, \mathbb{C})$ [10, с. 76].

Теорема 4.3. Пусть G – звездообразная область, основание $'G$ которой есть область голоморфности, а K – замкнутое подмножество области G , $K \subseteq G$.

Тогда: 1) вторая проблема Кузена на оболочке голоморфности $\hat{G}$ области G разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда

$$H^2('(\hat{G}), \mathbb{Z}) = 0;$$

2) вторая проблема Кузена на K разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда

$$H^2(K, \mathbb{Z}) = 0.$$

Доказательство. 1) Область $\hat{G}$ есть однолистная звездообразная область голоморфности (лемма 1.4), по теореме 2.5.5 [2] область $\hat{G}$ есть многообразие Штейна, а по теореме Ж.П.Серра (теорема 7.4.4 [2, с. 242]) вторая проблема Кузена на $\hat{G}$ разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда

$$H^2(\hat{G}, \mathbb{Z}) = 0.$$

Но $H^2(\hat{G}, \mathbb{Z}) \cong H^2('(\hat{G}), \mathbb{Z})$, где $'(\hat{G})$ – основание звездообразной области $\hat{G}$, так как $'(\hat{G})$ есть деформационный ретракт области $\hat{G}$. Поэтому

$$H^2('(\hat{G}), \mathbb{Z}) = 0.$$

2) K как замкнутое подмножество области голоморфности $\hat{G}$ есть многообразие Штейна, поэтому по теореме Ж.П.Серра имеем: вторая проблема Кузена разрешима на многообразии Штейна K для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда

$$H^2(K, \mathbb{Z}) = 0.$$

■

Аналогично, с использованием леммы 1.1 и леммы 1.2, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.4. Пусть $\mathbf{G}$ – полувзвездная или звездообразная область с хорошим основанием $'\mathbf{G}$, а K – компактное подмножество области $\mathbf{G}$, $K \subseteq \mathbf{G}$.

Тогда: 1) вторая проблема Кузена на $\hat{\mathbf{G}}$ разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда

$$H^2('(\hat{\mathbf{G}}), \mathbf{Z}) = 0;$$

2) вторая проблема Кузена на K разрешима для произвольного дивизора тогда и только тогда, когда

$$H^2(K, \mathbf{Z}) = 0.$$

■

Из многочисленных возможных приложений полученных результатов остановимся на *проблеме Пуанкаре*: представить мероморфную на многообразии функцию в виде отношения функций, голоморфных на этом многообразии (напомним, что локально такое представление следует из самого определения мероморфной функции, здесь же речь идет о глобальном представлении).

Теорема 4.5. Пусть $\hat{\mathbf{G}}$ – оболочка голоморфности звездообразной области $\mathbf{G}$, основание которой $'\mathbf{G}$ есть область голоморфности.

Тогда каждая функция f , мероморфная на $\hat{\mathbf{G}}$, представляется на $\hat{\mathbf{G}}$ как отношение функций, голоморфных на $\hat{\mathbf{G}}$, то есть на $\hat{\mathbf{G}}$ положительно решается проблема Пуанкаре.

Доказательство. По лемме 1.4 оболочка голоморфности $\hat{\mathbf{G}}$ области $\mathbf{G}$ есть область голоморфности. По теореме 2.5.5 [2, с. 62] область $\hat{\mathbf{G}}$ есть многообразие Штейна, на котором, согласно теореме 4 [10, с. 261], положительно решается проблема Пуанкаре. ■

Аналогично, с использованием леммы 1.1 и леммы 1.2, доказывается следующая теорема.

Теорема 4.6. Пусть $\hat{\mathbf{G}}$ – оболочка голоморфности полувзвездной или звездообразной области $\mathbf{G}$ с хорошим основанием $'\mathbf{G}$.

Тогда каждая функция f , мероморфная на $\hat{\mathbf{G}}$, представляется на $\hat{\mathbf{G}}$ как отношение функций, голоморфных на $\hat{\mathbf{G}}$, то есть положительно решается проблема Пуанкаре на $\hat{\mathbf{G}}$. ■

Звездообразные области введены автором в работе [3]; некоторые из проблем, затронутых в данной статье, нашли отражение в материалах научных конференций [4, 5]. Автор благодарен А.К.Циху, А.М.Кытманову и А.П.Южакову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чирка Е.М. Приближение многочленами на звездных подмножествах в $\mathbf{C}^n$ // Математические заметки. 1973. Т.14, N 1. С.55-60.

-
2. Хёрмандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*. М.: Мир, 1979. 279 с.
 3. Сечкин Г.И. *Операторный метод в звездообразных областях*. Деп. в ВИНТИ 30.07.90. N4314–В90. 5 с.
 4. Сечкин Г.И. *Проблема полиномиальной аппроксимации и $\bar{\partial}$ -проблема в звездообразных и выпуклообразных областях* // Третий сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (INPRIM-98): Тез. докл. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1998. Часть I. С.93–94.
 5. Сечкин Г.И. *Проблемы многомерного комплексного анализа в полужездных, звездообразных и выпуклообразных областях* // Международная конференция «Математические модели и методы их исследования»: Тез. докл. Красноярск, 1999. С.182.
 6. Айзенберг Л.А. Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1979. 366 с.
 7. Владимиров В.С. *Методы теории функций многих комплексных переменных*. М.: Наука, 1964. 411 с.
 8. Ганнинг Р., Росси Х. *Аналитические функции многих комплексных переменных*. М.: Мир, 1969. 395 с.
 9. Хенкин Г.М., Чирка Е.М. *Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.:ВИНИТИ, 1975. Т.4.
 10. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ*. Ч.II. М.: Наука, 1976. 400 с.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ТРЕТЬЕГО РОДА

С.Д. Симонженков

The algorithm for numerical evaluating the Legendre's incomplete integral of the third kind with parameter (character) less than one is described. The Fourier cosinus-expansion of the integrand part involving a character is used. Termwise integration gives a series for which summation a Clenshaw's technique is applicable

1. Введение

При решении некоторых задач физики, техники, геодезии и др. возникает необходимость вычисления эллиптических интегралов, в частности, интегралов третьего рода

$$\Pi = \Pi(\varphi, h, k) = \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} (1 - h \sin^2 t)^{-1} dt,$$

параметры которых удовлетворяют условиям

$$0 \leq \varphi \leq \pi/2, \quad 0 < k < 1, \quad h < 1, \quad h \neq 0. \quad (1)$$

Среди соответствующих многочисленных вычислительных методов укажем следующий, основанный на разложении подынтегрального множителя $f(t) = (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2}$ в ряд

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 'a_n \cos 2nt. \quad (2)$$

(Здесь и далее штрих в знаке суммы означает, что при $n = 0$ слагаемое берется с коэффициентом 0.5). Коэффициенты a_n в (2) задаются через гипергеометрическую функцию Гаусса в виде [1, с. 34]:

$$a_n = 2(-1)^n (1+q) q^n (1/2)_n {}_2F_1(n+1/2; 1/2; n+1; q^2)/n! \quad (3)$$

и удовлетворяют соотношениям

$$(n + 1/2)a_{n+1} + 2n(2/k^2 - 1)a_n + (n - 1/2)a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 'a_n = 1. \quad (4)$$

В формуле (3) $q = (1 - \sqrt{1 - k^2})/(1 + \sqrt{1 - k^2})$, а выражение $(\dots)_n$ обозначает символ Похгаммера. Почленным интегрированием из (2) можно получить разложение в ряд по синусам четных дуг эллиптического интеграла первого рода $F = \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} dt$. Аналогичным образом получается соответствующее разложение для интеграла второго рода $E = \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2 t)^{1/2} dt$.

Применительно к интегралу Π разложение (2) используется следующим образом. Из (2) получаем, что

$$\Pi = \sum_{n=0}^{\infty} 'a_n p_n, \quad (5)$$

где $p_n = \int_0^{\varphi} (1 - h \sin^2 t)^{-1} \cos 2nt dt$. Поэтому вычисление Π сводится к нахождению величины $\Pi_N = \sum_{n=0}^N 'a_n p_n$ при достаточно большом N . Выбор N зависит от задаваемой погрешности ε и, как нетрудно проверить, может быть осуществлен исходя из условия $2p_0 q^{N+1}/(1 - q)^2 < \varepsilon$. С другой стороны, интегралы p_n удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_{n+1} + \alpha_n p_n + \beta_n p_{n-1} = \gamma_n, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

где $\alpha_n = 4/h - 2$, $\beta_n = 1$, $\gamma_n = (2/h)(\sin 2n\varphi)/n$, $n \geq 1$. Поэтому вычисление Π_N можно осуществить суммированием Кленшо [1, гл. 11] по следующему алгоритму. Задаем $B_{N+1} = 0$, $B_{N+2} = 0$ и счетом назад находим

$$B_n = -\alpha_n B_{n+1} - \beta_{n+1} B_{n+2} + \varepsilon_n a_n, \quad n = N, N - 1, \dots, 0, \quad (7)$$

где $\varepsilon_n = 1$ при $n > 0$ и $\varepsilon_0 = 1/2$. После этого окажется, что

$$\Pi_N = (B_0 + \alpha_0 B_1)p_0 + p_1 B_1 + \sigma_N,$$

где $\sigma_N = \sum_{n=0}^N B_{n+1} \gamma_n$, если доопределить $\gamma_0 = 0$. Здесь последовательность $\{\gamma_n\}$ удовлетворяет соотношению

$$\gamma_{n+1} + \alpha'_n \gamma_n + \beta'_n \gamma_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (8)$$

с коэффициентами $\alpha'_n = -(2n \cos 2\varphi)/(n + 1)$, $\beta'_n = (n - 1)/(n + 1)$, $n \geq 1$. Следовательно, σ_N вычисляется аналогично: при $A_{N+1} = A_{N+2} = 0$ надо найти

$$A_n = -\alpha'_n A_{n+1} - \beta'_{n+1} A_{n+2} + B_{n+1}, \quad n = N, N - 1, \dots, 0. \quad (9)$$

Отсюда получаем, что $\sigma_N = (A_0 + \alpha'_0 A_1)\gamma_0 + A_1\gamma_1 = A_1\gamma_1$. Окончательно,

$$\Pi_N = (B_0 + \alpha_0 B_1)p_0 + B_1 p_1 + A_1 \gamma_1, \quad (10)$$

где

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{1-h}} \operatorname{arctg}(\sqrt{1-h} \operatorname{tg} \varphi), \quad p_1 = \left(1 - \frac{2}{h}\right)p_0 + \frac{2}{h} \varphi, \quad \gamma_1 = \frac{2}{h} \sin 2\varphi.$$

Таким образом, вычисление Π сводится к нахождению элементарной функции p_0 – в этом достоинство описанного подхода. Его недостатком является тот факт, что коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_N$ подлежат нахождению. Например, на основе (4), их можно вычислить устойчивой обратной рекурсией с помощью алгоритма Миллера [1, гл. 12].

2. Формулировка результата

В настоящей работе описанный метод используется с той разницей, что в ряд (2) разлагается другой подынтегральный множитель $f(t) = (1 - h \sin^2 t)^{-1}$. На этот раз коэффициенты разложения находятся явно, т.е. $a_n = 2(-1)^n q^n / \sqrt{1-h}$, где $q = (1 - \sqrt{1-h}) / (1 + \sqrt{1-h})$, а в формуле (5)

$$p_n = \int_0^\varphi (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} \cos 2nt \, dt. \quad (11)$$

Как и выше, ряд (2) сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем q , при этом

$$|\Pi - \Pi_N| \leq \frac{2p_0}{\sqrt{1-h}} \frac{1}{1-|q|} |q|^{N+1}.$$

В равенстве (6)

$$\alpha_n = 2\left(\frac{2}{k^2} - 1\right) \frac{n}{n+1/2}, \quad \beta_n = \frac{n-1/2}{n+1/2}, \quad \gamma_n = \frac{2}{k^2} \frac{\sin 2n\varphi}{n+1/2} (1 - k^2 \sin^2 t)^{1/2}. \quad (12)$$

Коэффициенты γ_n удовлетворяют (8) при следующих значениях α'_n, β'_n :

$$\alpha'_n = -2 \frac{n+1/2}{n+3/2} \cos 2\varphi, \quad \beta'_n = \frac{n-1/2}{n+3/2}.$$

Оказывается, что в (10)

$$p_0 = F, \quad p_1 = (1 - 2/k^2)F + (2/k^2)E, \quad \gamma_1 = (4/3k^2)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sin 2\varphi. \quad (13)$$

Таким образом, вычисление Π сводится к нахождению эллиптических интегралов первого и второго рода. Последние подробно затабулированы, для их

вычисления существуют компактные и эффективные алгоритмы [2, гл. 17]. Поэтому предполагается, что в излагаемой ниже схеме интегралы F, E считаются известными.

Перейдем к описанию вычислительной схемы. Для нахождения Π с погрешностью ε при аргументах, удовлетворяющих условиям (1), надлежит сделать следующее (используются обозначения предыдущего пункта).

1. Вычислить q , подобрать целое $N \geq 0$ такое, чтобы

$$\frac{2F}{\sqrt{1-h}} \frac{|q|^{N+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

2. Сформировать массивы $\{B_n\}, \{A_n\}, n = 0, 1, \dots, N+2$ в соответствии с формулами (7), (9).

3. Вычислить Π_N , используя (10), (13).

Для иллюстрации приведем следующий пример. При $\varepsilon = 10^{-8}$ найти $\Pi(30^\circ, 0.5, \sin 60^\circ)$. Согласно [2] (табл. 17.5, 17.6), имеем, что $F = 0.54222911$, $E = 0.50609207$. Имеем далее, что $q = 0.17157288$, $N = 10$, $a_{10} = 2.2 \dots \cdot 10^{-8}$. Результат $\Pi = 0.56836557$ согласуется с табличным значением [2] (табл. 17.9).

Замечание . Применять предложенный алгоритм нельзя, если параметр k близок к нулю либо h близко к 1 или $h < 0$ и велико по модулю. Действительно, при $k \approx 0$ величина $2(2/k^2 - 1)$ велика; в этом случае Π_N находится как разность больших величин, что приводит к потере значащих цифр. Например, при вычислении $\Pi(90^\circ, 0.5, \sin 15^\circ)$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-5}$ надо брать $N = 6$. При вычислениях на 8-разрядном калькуляторе имеем $2(2/k^2 - 1) = 57.71282$, $B_1 = -19181.611$, $B_0 = -164.81929$, $p_1 = -1.38504 \cdot 10^{-2}$, $p_0 = 1.598142$. Получим $\Pi = p_0 B_0 + p_1 B_1 = 2.26836$, что плохо согласуется с табличным значением $\Pi = 2.26685$. При $h \rightarrow -\infty$ или $h \rightarrow 1$ имеем, что $|q| \rightarrow 1$. Следовательно, в алгоритме N велико. Его применение наиболее эффективно, если $|q| \leq 1/2$, что соответствует области $-8 \leq h \leq 8/9$. Как показывают вычисления, при таких h и $k^2 \geq 1/2$ алгоритм «работает» удовлетворительно. Существенно используемое разложение (2) для $f(t) = (1 - h \sin^2 t)^{-1}$ можно найти в руководствах по рядам Чебышева (см., например, [3, с. 144]). Вывод равенства (6) для интегралов (11) с коэффициентами (12) имеется в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации*. М.: Мир, 1980.
2. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
3. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. М.: Наука, 1983.
4. Литвин А.И., Симонженков С.Д. *О вычислении некоторых эллиптических интегралов*. Деп. в ВИНТИ Омским с.х. институтом. 12.12.90. N 6202-B 90.

МОДЕЛЬ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАССИОНАРНОЙ ЭНЕРГИИ ЭТНОСА

В.В. Коробицын

The model of dynamic of drive energy of ethnos is described. The drive energy is extended for the territory of ethnos. The model is a system of the parabolic differential equations. The result of computer simulation of ethnic model is given

1. Введение

Общество — это сложный объект, элементами которого являемся мы — люди. Развитие общества подчинено определенным законам. Но они пока еще неизвестны человеку в полной мере. Открытие этих законов является целью современной науки. На помощь гуманитарным наукам приходит математика с ее формализованным аппаратом. Именно формализация может избавить гуманитарные науки от субъективности отдельных авторов. Современные методы математического моделирования позволяют строить и исследовать самые разнообразные модели.

С развитием компьютерной техники появилась возможность проводить численные эксперименты с достаточно сложными моделями, которые более полно отражают процессы, протекающие вокруг нас. Развитие человеческого общества — одно из самых загадочных явлений. Построить модель, которая бы совершенно полно описала общество, наверное, невозможно, как и создание модели человека. Но сделать попытку и хотя бы чуть-чуть приблизиться к цели — необходимо.

Модель, которая приводится в данной статье, является попыткой построить совершенно иную, отличную от предыдущих моделей [4, 5]. Отличие ее состоит в том, что осуществляется моделирование процессов, протекающих в пространстве. Учитываются территориальное расположение элементов и их граничные взаимодействия. Элементами данной модели являются этносы, которые занимают определенные территории. Способы функционирования этноса описаны

четырьмя законами взаимодействия. На основе этих законов выводится дифференциальное уравнение, описывающее изменения распределения пассионарной энергии этноса на территории занимаемого ландшафта. Решение этого уравнения дает величину пассионарной напряженности этноса, которая определяет его состояние.

С данной моделью проводилось компьютерное моделирование на реальной карте ландшафтов Европы. Модель имитирует начальные фазы этногенеза от рождения до фазы перегрева. В эксперименте участвуют три суперэтноса, которые возникают в разные моменты времени в случайно выбранных точках территории. Этносы рождаются, разрастаются и взаимодействуют друг с другом. Результаты многочисленных экспериментов указали на закономерности раздела всей территории на участки, занимаемые каждым этносом.

2. Описание процессов изменения пассионарной энергии

Модель этногенеза строится исходя из теории Л.Н. Гумилева [1]. Согласно этой теории существует уровень организации общества, промежуточный между биологическим и социальным, который он назвал этническим. Это уровень подсознательного разделения всех людей на своих и чужих. Разделение происходит по ощущению комплиментарности и по стереотипу поведения. Члены одного этноса никогда не признают своим члена другого этноса. Большинство военных конфликтов происходят вследствие противостояния двух враждующих этносов. Перемирие двух этносов обычно является недолгим, и после некоторого перерыва возобновляются военные действия.

Реальную этническую целостность мы можем определить как динамическую систему, включающую в себя не только людей, но и элементы ландшафта, культурную традицию и взаимосвязь с соседями. В этой системе движущей силой является пассионарная энергия. *Пассионарность* — это избыточная биохимическая энергия, которая подавляет в человеке инстинкт самосохранения и способствует совершению человеком сверхусилий. Гумилев разделяет людей на три основных типа по отношению к пассионарной принадлежности: пассионарии, гармоничные люди и субпассионарии. Гармоничные — это люди, пассионарность которых близка к нулю. Субпассионарии имеют отрицательную пассионарность, у них преобладает инстинкт самосохранения.

Способы измерения биохимической энергии в этой статье не рассматриваются. Предположим, что пассионарность каждого человека известна, тогда *пассионарной энергией* этноса будем называть сумму пассионарностей всех членов этноса. *Пассионарной напряженностью* называется величина, равная отношению пассионарной энергии к количеству членов этноса, то есть это средняя пассионарность члена этноса. *Плотностью пассионарной энергии* будем называть величину отношения пассионарной энергии к площади территории, которую занимает этнос, то есть это количество пассионарной энергии на единицу площади ландшафта.

Ландшафт, к которому приспосабливается этнос, определяет стереотип поведения его членов. На основе этих стереотипов человек живет и трудится, он привыкает к определенному ландшафту. Таким образом, состояние ландшафта определяет ареал распространения этноса. Члены этноса, зародившиеся в степном ландшафте, не могут жить в горной местности или в лесу. Но если это все-таки происходит, то они стараются перестроить ландшафт к тому, к которому они привыкли. Поэтому этносы, занимающие чуждые им ландшафты, обычно не составляют конкуренции этносам, для которых этот ландшафт является родственным. Происходит вытеснение одним этносом другого. Этносы делят между собой территории. Территория, занимаемая этносом, определяется наличием пассионарной энергии данного этноса в этом регионе, которая обуславливается присутствием в нем пассионариев.

Для создания модели выделяем четыре основных закона изменения пассионарной энергии:

- 1) *индукция*,
- 2) *утрата*,
- 3) *рассеивание*,
- 4) *перемещение*.

Пассионарность обладает важным свойством: она заразительна. Это значит, что люди гармоничные (а в еще большей степени — импульсивные), оказавшись в непосредственной близости от пассионариев, начинают вести себя так, как если бы они были пассионарны. Кроме того, пассионарность передается по наследству. Во время войн женщины ценят героев, идущих в бой, благодаря чему те, прежде чем погибнуть, успевают оставить потомство, далеко не всегда в законном браке. Дети вырастают и продолжают совершать поступки, подсказанные их конституцией, даже не зная своих отцов. Учитывая вышесказанное, можно сделать вывод, что увеличение пассионарной энергии пропорционально количеству пассионариев.

Утрата пассионарной энергии происходит при изменении ландшафта и вследствие ведения военных действий. Противостояние двух этносов возникает на границе и связано с желанием каждого этноса увеличить размеры занимаемых территорий. При столкновении происходит уменьшение пассионарной энергии в местах ведения военных действий. Объемы уменьшения энергии пропорциональны энергии этих этносов. Чем сильнее этносы, тем более жестокое противостояние и тем больше потери. Затраты энергии на изменение ландшафта характеризуются фазой этногенеза и направлены на переустройство ландшафта. В стадии пассионарного подъема и перегрева интенсивность воздействия на ландшафт максимальна, и поэтому затраты очень велики.

Этносы разделяются на персистентные и интенсивно размножающиеся. Первые характеризуются консервативным поведением, они вписываются в ландшафт и ограничены тем самым в своем размножении. Вторые расселяются за границы своего биоценоза и изменяют свой первичный биоценоз. Члены таких этносов подвержены постоянному перемещению с целью приобретения новых земель. Таким образом, пассионарная энергия расплывается по территории ландшафта. Растекание энергии этноса происходит во всех направлениях,

но неравномерно, так как в некоторые районы попасть легче, а в некоторые труднее, что может быть связано с различными коммуникационными сложностями, возникающими при перемещении.

При возникновении противостояний между соседними этносами каждый из них начинает перемещать свои силы в направлении враждебного этноса. Этими силами командуют пассионарии, то есть происходит целенаправленное перемещение пассионарной энергии к границе чуждого этноса. В отличие от рассеивания, которое происходит постоянно, целенаправленное перемещение производится в конкретные моменты времени.

Таким образом, определены четыре основных процесса, обеспечивающих существование и распределение пассионарной энергии. Модель строится на основе описания этих процессов.

3. Построение математической модели

Будем рассматривать развитие этногенеза в некоторой области $G \in \mathbf{R}^2$. Пусть границей G будет гладкая кривая Γ . Плотность пассионарной энергии этноса определим непрерывной функцией $u(x, y, t) : G \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^+$. Тогда пассионарная энергия всей области G будет равна

$$E(t) = \iint_G \alpha(x, y, t) u(x, y, t) dx dy,$$

где $\alpha(x, y, t)$ — некоторая функция, описывающая коэффициент, который будем называть *пассионароемкостью* ландшафта (предполагается, что $\alpha \geq 0$).

Процесс растекания пассионарной энергии можно описать выражением

$$R(t) = \oint_{\Gamma} \varepsilon(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, t) d\gamma,$$

здесь R — пассионарная энергия, втекающая (вытекающая, когда $R < 0$) в область G через ее границу Γ , $\varepsilon(x, y, t)$ — коэффициент, который будем называть *пассионаропроводимостью* ландшафта (предполагается, что $\varepsilon \geq 0$),

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(x, n) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(x, n)$$

— производная по направлению внешней нормали n к участку кривой $d\gamma$. Выражение для $R(t)$ описывает процесс перетекания энергии из участков с большей плотностью в участки с меньшей плотностью энергии u . Это процесс растекания энергии из точки пассионарного толчка во всех направлениях. Происходит захват территорий и расширение ареала этноса. «Фаза подъема этногенеза всегда связана с экспансией, подобно тому как расширяется нагретый газ» [1, с.448]. Коэффициент ε описывает скорость растекания энергии. Поскольку ландшафт неоднороден, то и растекание происходит неравномерно в

разных направлениях. Этот коэффициент описывает транспортные возможности ландшафта. Где скорость перемещения по ландшафту выше, там значение функции ε больше. Например, скорость перемещения по степи значительно выше скорости перемещения в горных районах, что и должно быть отражено этой функцией.

Процесс целенаправленного переноса пассионарной энергии по ландшафту опишем выражением

$$P(t) = \oint_{\Gamma} -(\vec{a}, \vec{n})u(x, y, t)d\gamma,$$

где $P(t)$ — пассионарная энергия, втекающая в регион G в результате направленного перемещения энергии через границу Γ ; $\vec{a}$ — вектор направления перемещения энергии; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к участку границы $d\gamma$. Процесс перемещения связан с ведением военных действий. Пассионарии не могут не участвовать в войнах. Поэтому когда происходят столкновения с соседними этносами, то пассионарии со всех концов начинают перемещаться к этому месту. В данной модели направление перемещения описывается вектором $\vec{a}$. А если предположить, что $\vec{a} = -\nabla\varphi(x, y, t)$, где $\varphi(x, y, t)$ — некоторая функция, то выражение для P примет вид:

$$P(t) = \oint_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial n}(x, y, t)u(x, y, t)d\gamma.$$

Используя формулу Грина [3, с.179], перейдем от криволинейных интегралов по контуру Γ к двойным интегралам по области G :

$$R(t) = \iint_G (\varepsilon\Delta u + \nabla\varepsilon\nabla u)dxdy,$$

$$P(t) = \iint_G (u\Delta\varphi + \nabla u\nabla\varphi)dxdy,$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Процесс индукции и утраты пассионарной энергии опишем выражением

$$T(t) = \iint_G \beta(x, y, t)u(x, y, t)dxdy,$$

где $\beta(x, y, t)$ — функция, отражающая интенсивность процесса индукции и утраты энергии на перестройку ландшафта. Можно описать эту функцию как разность двух функций $\beta(x, y, t) = \beta_r(t) - \beta_l(x, y)$, где $\beta_r \geq 0$ — описывает интенсивность индукции, $\beta_l \geq 0$ — описывает утраты на перестройку ландшафта. Функция β_l зависит от состояния ландшафта в точке $(x, y) \in G$, поскольку затраты на переустройство чуждого ландшафта гораздо больше, чем

родственного. А функция β_r меняется со временем. В период подъема она максимальна: пассионарии наиболее активны, и этнос целиком их поддерживает. Но проходит время, и ситуация меняется, этнос уже не нуждается в героях, и происходит гонение пассионариев, а значит функция β_r уменьшается.

Теперь рассмотрим конфликты, возникающие при столкновении нескольких этносов. Возьмем количество этносов равное k . Плотность пассионарной энергии i -го этноса описывается функцией $u_i(x, y, t)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Утрату пассионарной энергии в военных конфликтах опишем выражением

$$K_i(t) = \iint_G - \left(\sum_{j=1}^k \gamma_{ij} u_j(x, y, t) \right) u_i(x, y, t) dx dy,$$

здесь u_j — пассионарная энергия враждебного этноса; γ_{ij} — коэффициент потерь в войнах между i -м и j -м этносами. Член $\gamma_{ij} u_i u_j$ встречается дважды: в уравнениях для u_i и для u_j . Если u_i значительно больше u_j , то потери окажут большее влияние на j -й этнос и произойдет вытеснение i -м этносом j -ого. Это означает, что i -й этнос одержал победу и произошел передел территорий в пользу победителя. В выражении для $K_i(t)$ имеется член $\gamma_{ii} u_i^2$, который описывает гражданскую войну, возникающую внутри этноса. Этот член оказывает значительное влияние когда u_i достаточно велико, когда количество пассионариев в этносе настолько велико, что они начинают истреблять друг друга.

Перейдем к выводу уравнения изменения пассионарной энергии этноса. Будем исходить из предположения, что выполняется закон сохранения энергии. Изменение объема энергии i -го этноса ΔE_i с момента времени t_1 до t_2 равен сумме всех изменений (втеканий и вытеканий) энергии за этот промежуток времени:

$$\Delta E_i = E_i(t_2) - E_i(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left[R_i(t) + P_i(t) + T_i(t) + K_i(t) \right] dt.$$

Здесь и далее $E_i(t)$, $R_i(t)$, $P_i(t)$, $T_i(t)$ описываются теми же выражениями, что и $E(t)$, $R(t)$, $P(t)$, $T(t)$, с заменой функции $u(x, y, t)$ на функцию $u_i(x, y, t)$.

Подставляем выражения для описанных функций и получаем

$$\begin{aligned} \iint_G \alpha_i u_i|_{t=t_2} - \alpha_i u_i|_{t=t_1} dx dy = \int_{t_1}^{t_2} \iint_G \left[\varepsilon_i \Delta u_i + \nabla \varepsilon_i \nabla u_i + \right. \\ \left. + u_i \Delta \varphi_i + \nabla u_i \nabla \varphi_i + \beta_i u_i - \left(\sum_{j=1}^k \gamma_{ij} u_j \right) u_i \right] dx dy dt, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Эта система интегральных уравнений описывает модель территориального распределения пассионарной энергии и взаимодействия этносов. Далее мы перейдем к дифференциальным уравнениям. Для этого применим теорему о среднем [3, с.134], предполагая, что все условия, накладываемые на функции, выполняются:

$$\begin{aligned} \left[\alpha_i u_i \Big|_{(x_1, y_1, t_2)} - \alpha_i u_i \Big|_{(x_1, y_1, t_1)} \right] \Delta G = & \left[\varepsilon_i \Delta u_i + \nabla \varepsilon_i \nabla u_i + u_i \Delta \varphi_i + \nabla u_i \nabla \varphi_i + \right. \\ & \left. + \beta_i u_i - \left(\sum_{j=1}^k \gamma_{ij} u_j \right) u_i \right] \Big|_{(x_2, y_2, t_3)} \Delta G \Delta t, \end{aligned}$$

где $(x_1, y_1) \in G$, $(x_2, y_2) \in G$, $t_3 \in [t_1, t_2]$, $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta G = \iint_G dx dy$ — площадь области G .

Фиксируем некоторую точку $M(x, y)$ внутри G и стягиваем G в эту точку, а Δt устремим к нулю. После сокращения на $\Delta G \Delta t$ и указанного предельного перехода получаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_i} \left[\varepsilon_i \Delta u_i + (\nabla \varepsilon_i + \nabla \varphi_i) \nabla u_i + \left(\Delta \varphi_i + \beta_i - \sum_{j=1}^k \gamma_{ij} u_j - \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \right) u_i \right].$$

Получилась система дифференциальных уравнений параболического типа. Для получения единственного решения этой системы необходимо задать начальные и краевые условия. Начальное распределение плотности пассионарной энергии зададим некоторой функцией $\psi_i(x, y)$

$$u_i(x, y, 0) = \psi_i(x, y).$$

Эта функция может выглядеть как дельта-функция. В этом случае она будет выражать тот факт, что причиной появления этноса является пассионарный толчок. Можно также использовать сумму дельта-функций, если толчок произошел сразу в нескольких точках.

Краевые условия поставим так, чтобы не происходило перетекание энергии за пределы области G

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \geq 0.$$

4. Компьютерный эксперимент

С приведенной моделью был проведен компьютерный эксперимент. Рассматривалось рождение и взаимодействие трех этносов на территории Присредиземноморья. Эта территория включала всю Европу, Восточную Азию и часть Северной Африки. Распределение ландшафтов было взято с современной карты природных зон этого региона (рис. 1). Исследуемые этносы: западный, славянский и мусульманский.

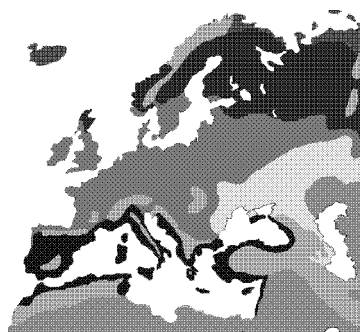


Рис.1

Человек обладает высокой степенью адаптации, он распространился на всей суше планеты. В каждом биоценозе человек занимает твердое положение, а заселяя новый регион, меняет не анатомию или физиологию своего организма, а стереотип поведения. Но ведь это значит, что он создает новый этнос! Следовательно, ландшафт является определяющим фактором распространения этноса. В связи с этим была введена система приоритетов выбора этносом определенного ландшафта. Западный этнос предпочитает лесной ландшафт, мусульманский — горный и широколиственных лесов Средиземноморья, а славянский — степной. Система приоритетов описывается функциями $\beta_i(x, y)$, не изменяющимися во времени

$$\beta_i(x, y) = \begin{cases} 0.9, & \text{если } (x, y) \text{ в родственном ландшафте,} \\ 0.1...0.6, & \text{если } (x, y) \text{ в других ландшафтах,} \\ -0.5, & \text{если } (x, y) \text{ в море.} \end{cases}$$

Функции пассионаропроводимости выбираются одинаковыми для всех этносов $\varepsilon_i(x, y, t) = \varepsilon(x, y)$, значения которой согласованы с ландшафтом. Ее максимальное значение равно $8 \cdot 10^{-6}$ в степных районах, а минимальное $0.3 \cdot 10^{-6}$ в море. Эти значения обусловлены скоростью перемещения по ландшафту.

Функции пассионарности не рассматриваются в данной модели и выбираются равными единице: $\alpha_i(x, y, t) = 1$.

Из истории известно, что часто жестокие войны ведутся между близкими родственниками. Вместе с тем они имеют коренное различие с войнами на уровне больших систем. В последнем случае противник рассматривается как нечто инородное, мешающее и подлежащее устранению. Но личные эмоции (гнев, ненависть, зависть и т.п.) не становятся мотивом проявляемой жестокости. Чем дальше отстоят системы друг от друга, тем хладнокровнее ведется взаимоистребление, превращаясь в подобие опасной охоты. И наоборот, борьба внутри системы имеет целью не истребление противника, а победу над ним. Поскольку противник также составляет часть системы, то без него система не может существовать. Поэтому коэффициенты потерь в войнах с другими супер-этнотами принимают гораздо большие значения, чем в междоусобных войнах:

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 100, & \text{если } i \neq j, \\ 0.1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Эксперименты проводятся с помощью программного продукта *Terri*, разработанного автором. Каждый эксперимент представляет собой нахождение решения системы дифференциальных уравнений при случайно заданных начальных данных. Начальные данные — это начальное распределение плотности пассионарной энергии. В эксперименте начальное распределение задается дельта-функцией (пассионарный толчок), координаты пика которой выбираются случайным образом, но в пределах родственного для данного этноса ландшафта. Причем рождение этносов (пассионарный толчок) происходит в разные моменты времени. Разность времен в появлении этносов также выбирается случайным образом в пределах от 1 до 400 лет. Расчет решения производится до момента времени 1000 лет с момента рождения первого этноса. За этот период времени этносы проходят начальные стадии развития этногенеза: стадию подъема и перегрева. Дальнейшие стадии этногенеза в данной модели не рассматриваются, поскольку на них включаются другие механизмы развития. Именно стадия зарождения этноса является объектом исследования в данной работе.

Пример последовательных кадров, отражающих стадии развития этносов, приведены на рис. 2.

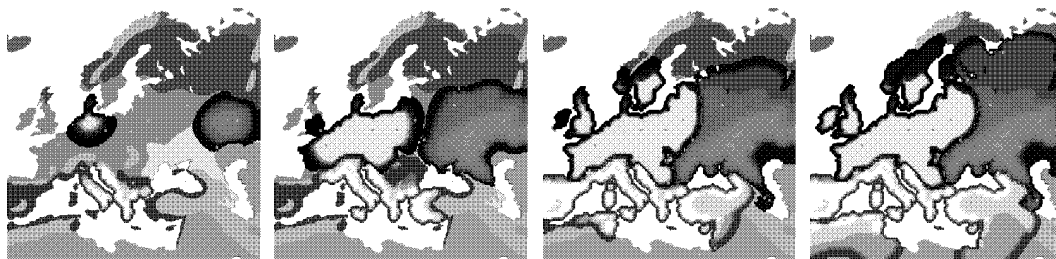


Рис.2

Проводится серия таких экспериментов (около 400), и в каждом эксперименте фиксируются значения выделенных точек. Выделенные точки для удобства восприятия выбираются по географическому расположению современных городов. Значения могут быть 0, 1, 2, или 3, которые означают: 0 — город не принадлежит ни одному этносу, а остальные — номер этноса, занявшего этот город. Собранные статистические данные обрабатываются, и высчитываются вероятностные характеристики. На основе этих данных делается вывод, какие города принадлежат заданному этносу с наибольшей вероятностью. Вычисленная корреляционная матрица определяет этническую принадлежность различных городов на географической карте.

5. Заключение

Серия проводимых экспериментов, по сути дела, означает проигрывание различных вариантов истории. А статистические характеристики дают возможность найти наиболее вероятные из них. Компьютерная модель позволяет нам проверять, какие исторические гипотезы относительно произошедших событий являются наиболее вероятными с точки зрения этнологии.

Долгие наблюдения за моделью позволили сделать вывод о том, что постоянно возникающие границы между этносами почти всегда проходят по одним и тем же линиям. Этой линией часто являются естественные преграды, такие как горы или проливы. Примером являются Пиренеи, Альпы, Карпаты и Кавказ, а также проливы Гибралтар и Босфор. Но бывают и такие линии которые протягиваются по однородному ландшафту. Такие границы обычно подвижны и перемещаются по ландшафту. Например, граница между западным и славянским этносом, которая тянется с севера от Балтийского моря на юг до Средиземного, постоянно перемещается то на запад, то на восток.

Проведенный компьютерный эксперимент не исчерпывает всех возможностей построенной математической модели. Функции, входящие в состав модели, могут быть описаны различными способами. Для построения более точной компьютерной модели, необходимо тщательнее подойти к описанию функций, ввести закон нарастания энтропии — растраты энергии начального пассивного толчка, предусмотреть смену фаз этногенеза и процессы переустройства ландшафта. Также необходимо ввести в модель следующие элементы: организация, наука и техника, культура и искусство, которые пока не участвовали в построении модели.

Метод построения моделей, приведенный в данной статье, является иллюстрацией нового подхода в построении социальных моделей. Рассматривая распределение пассивной энергии на некоторой территории, получаем модель, которая реально описывает взаимодействие этносов. Вводя эволюционные функции, получаем процесс смены периодов в развитии этносов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гумилев Л.Н. *Этногенез и биосфера Земли*. М.: Танаис ДИ-ДИК, 1994. 554 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977.
3. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. М.: Наука, 1970. Т.3.
4. Гуц А.К. *Глобальная этносоциология*. Омск: Омск. гос. ун-т, 1997. 212 с.
5. Гуц А.К., Коробицын В.В. *Компьютерное моделирование этногенетических процессов* // Рукопись деп. в ВИНТИ 24.09.97. N 2903-B97. Омск: Омск. гос. ун-т, 1997. 23 с.
6. Коробицын В.В., Гуц А.К. *Программное обеспечение МЕР для моделирования эволюционных и социальных процессов* // Вестник Омского университета. 1999. N 2. С.23–25.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В.В. Коробицын

We consider the some semi-linear differential equation with partial derivatives. It has the constant coefficients. We prove the theorem of existence and uniqueness of the solution.

1. Введение

Моделирование распространения энергии или вещества в пространстве приводит к моделям, ядром которых являются дифференциальные уравнения в частных производных. Применительно к биологическим, этническим и социальным процессам уравнения называют эволюционными. Нелинейное эволюционное уравнение с выделенной линейной частью в абстрактном пространстве H выглядит так:

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + B(t, u),$$

где $A(t)$ — линейный, а $B(t, \cdot)$ — нелинейный операторы. Поэтому изучение свойств таких уравнений является важной частью работ по математическому моделированию.

Изучение подобных уравнений основываются на идеях А.М.Ляпунова и М.Г.Крейна. Основные результаты исследования полулинейных параболических уравнений изложены в [1]. Частично они приведены ниже.

Классическая постановка задачи распространения энергии приводит к граничной задаче в обычном $\mathbf{R}^n$ пространстве. Но анализ осуществляется не этой задачи, а задачи Коши для операторного уравнения в банаховом пространстве. Для построения операторного уравнения используются понятия секториального оператора и аналитической полугруппы. Ниже приведена теорема 1 из [1], указывающая на связь этих понятий и применение их для исследования

задачи Коши, а также теорема 2, указывающая на условия существования и единственности решения в локальном смысле, и теорема 3 на всем пространстве решений.

В данной статье приведен результат исследования одного нелинейного уравнения параболического типа. Это уравнение является базовым для эволюционных моделей биологии и социологии. Доказаны необходимые свойства оператора и функции правой части, выполнение которых приводит к выполнению условий теорем существования и единственности. Доказательство этих теорем обеспечивает теоретическую основу для нахождения решений численными методами, которые необходимы для исследования модели с помощью компьютера. Применение компьютерных технологий при моделировании позволяет проводить большое количество экспериментов с моделью, находить нужные параметры и исследовать модель на устойчивость. Но первым шагом является теоретическое обоснование правомерности нахождения решения. Кроме того, теоретическое исследование позволяет выделить класс функций, среди которых нужно искать решение.

2. Определения и используемые теоремы

В статье используются обозначения для пространств:

$L_2(0, l)$ — пространство всех функций, интегрируемых во 2-й степени с нормой

$$\|f\|_{L_2(0,l)} = \left\{ \int_0^l |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

$C_0^1(0, l)$ — линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем на интервале $(0, l)$ и нормой

$$\|f\|_{C^1(0,l)} = \sup_{x \in (0,l)} \|f(x)\| + \sup_{x \in (0,l)} \|Df(x)\|,$$

$H_0^1(0, l)$ — замыкание $C_0^1(0, l)$ в норме

$$\|f\|_{H_0^1(0,l)} = \left\{ \int_0^l |f'(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

$H^2(0, l)$ — пространство Соболева, состоящее из всех функций $f \in L_2$, обладающих интегрируемыми во 2-й степени обобщенными производными до второго порядка включительно, с нормой

$$\|f\|_{H^2(0,l)} = \left\{ \int_0^l \sum_{j=0}^2 |f^{(j)}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Определение 1. Линейный оператор A в банаховом пространстве X называется *секториальным оператором*, если он замкнут и плотно определен, и,

кроме того, для некоторого $\varphi \in (0, \pi/2)$, некоторого $M \geq 1$ и некоторого вещественного a сектор

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda | \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

лежит в резольвентном множестве оператора A и

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq M/|\lambda - a|, \quad \forall \lambda \in S_{a,\varphi}.$$

Замечание 1. Если A — самосопряженный плотно определенный ограниченный снизу оператор в гильбертовом пространстве, то он секториален.

Определение 2. Аналитическая полугруппа в банаховом пространстве X — это семейство непрерывных линейных операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в X , удовлетворяющее условиям:

- 1) $T(0) = I, T(t)T(s) = T(t+s)$ для $t \geq 0, s \geq 0$;
- 2) $T(t)x \rightarrow x$ при $t \rightarrow 0+$ для любого $x \in X$;
- 3) отображение $t \rightarrow T(t)x$ вещественно-аналитично на $0 < t < \infty$ для любого $x \in X$.

Инфинитезимальный генератор L этой полугруппы определяется следующим образом:

$$Lx = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t}.$$

Его область определения $D(L)$ состоит из всех $x \in X$, для которых этот предел (в X) существует. Мы будем обычно писать $T(t) = e^{Lt}$.

Теорема 1. Если A — секториальный оператор, то $-A$ — инфинитезимальный генератор аналитической полугруппы $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$, определяемой формулой

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{-\lambda t} d\lambda,$$

где Γ — контур в $\rho(-A)$, такой, что $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ для некоторого θ из $(\pi/2, \pi)$. ■

Далее, e^{-At} можно аналитически продолжить в сектор $\{t \neq 0 : |\arg t| < \varepsilon\}$, содержащий положительную вещественную полуось, и если $\operatorname{Re} \sigma(A) > a$, т.е. $\operatorname{Re} \lambda > a$ при $\lambda \in \sigma(A)$, то для $t > 0$

$$\|e^{-At}\| \leq C e^{-at}, \|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t} e^{-at}$$

при некоторой постоянной C . Наконец,

$$\frac{d}{dt} e^{-At} = -Ae^{-At} \text{ для } t > 0.$$

Определение 3. Пусть A — секториальный оператор и $\operatorname{Re}\sigma(A) > 0$. Для любого $\alpha > 0$ положим

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Оператор A^α определим как оператор, обратный к $A^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$), $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$. Оператор A^0 определим как тождественный оператор в X .

Замечание 2. Если A — положительно-определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве со спектральным представлением

$$A = \int_0^{\infty} \lambda dE(\lambda), \text{ то } A^{-\alpha} = \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} dE(\lambda).$$

Определение 4. Пусть A — секториальный оператор в банаховом пространстве X . Положим для каждого $\alpha \geq 0$

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha)$$

и наделим пространство X^α нормой графика $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$, $x \in X^\alpha$, где $A_1 = A + aI$, причем a выбирается так, чтобы $\operatorname{Re}\sigma(A_1) > 0$. Нормы, полученные при различных выборах a , эквивалентны, так что мы можем не отображать в записи нормы зависимости от a .

Определение 5. Функция $f(t, x) : U \rightarrow X$, $U \subset \mathbf{R} \times X^\alpha$ при некотором α , $0 \leq \alpha < 1$ является локально-гельдеровой по t и локально-липшицевой по x на U , если для любого $(t_1, x_1) \in U$ существует окрестность $V \subset U$ точки (t_1, x_1) , такая, что для любых $(t, x) \in V$, $(s, y) \in V$

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq L(|t - s|^\theta + \|x - y\|_\alpha)$$

при некоторых постоянных $L > 0$, $\theta > 0$.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного операторного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + Ax &= f(t, x), \quad t > t_0, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

Определение 6. Решение задачи Коши (1) на (t_0, t_1) — это непрерывная функция $x : [t_0, t_1) \rightarrow X$, такая, что $x(t_0) = x_0$ и для $t \in (t_0, t_1)$ мы имеем: $(t, x(t)) \in U$, $x(t) \in D(A)$, $(dx/dt)(t)$ существует, отображение $t \rightarrow f(t, x(t))$ локально-гельдерово,

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} \|f(s, x(s))\| ds \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow t_0+$$

и на (t_0, t_1) удовлетворяется дифференциальное уравнение (1).

Следующая лемма дает необходимое и достаточное условие существования решения задачи (1).

Лемма 1. Если x — решение задачи (1) на (t_0, t_1) , то

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds. \quad (2)$$

Обратно, если x — непрерывная функция из (t_0, t_1) в X^α , такая, что

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} \|f(s, x(s))\| ds \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow t_0+$$

и интегральное уравнение (2) удовлетворяется при $(t, x(t)) \in U$ для $t_0 < t < t_1$, то $x(\cdot)$ — решение дифференциального уравнения (1) на (t_0, t_1) . ■

Единственность решения в локальной области гарантирует следующая

Теорема 2. Пусть A — секториальный оператор, $0 \leq \alpha < 1$ и $f : U \rightarrow X$, где U — открытое подмножество в $\mathbf{R} \times X^\alpha$. Предположим, что функция $f(t, x)$ локально-гельдерова по t и локально-липшицева по x . Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in U$ существует $T = T(t_0, x_0) > 0$, такое, что уравнение (1) имеет единственное решение x на $(t_0, t_0 + T)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Фактически $\|x(t) - x_0\|_\alpha \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0+$. ■

Условия глобального существования и единственности решения приведены в следующей теореме.

Теорема 3. Пусть A и f — такие, как в теореме 2, и пусть образ $f(B)$ любого замкнутого ограниченного множества $B \subset U$ ограничен в X . Если x — решение уравнения (1) на (t_0, t_1) и t_1 максимально в том смысле, что не существует решения уравнения (1) на (t_0, t_2) при $t_2 > t_1$, то либо $t_1 = +\infty$, либо существует последовательность $t_n \rightarrow t_1$ — при $n \rightarrow +\infty$, такая, что $(t_n, x(t_n)) \rightarrow \partial U$. (Если U не ограничено, то бесконечно удаленная точка принадлежит ∂U .) ■

3. Постановка задачи и результат

Теорема 4. Решение эволюционного уравнения, описывающего изменение функции $u(t, x) : \mathbf{R}^+ \times [0, l] \rightarrow \mathbf{R}$ краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au - bu^2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u_0 \in H_0^1(0, l)$, a, b и k — положительные постоянные, имеет единственное решение в пространстве $H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$ для $\forall t > 0$.

Доказательство. Возьмем $X = L^2(0, l)$. Определим линейный оператор A следующим образом:

$$A\varphi(x) = -k \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x), \quad 0 < x < l,$$

если φ — гладкая функция на $[0, l]$ с $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(l) = 0$.

Функцию $f(t, x, u) : \mathbf{R}^+ \times [0, l] \times X^\alpha \rightarrow X$ определим так: $f(t, x, u) = au - bu^2$.

Краевую задачу (3) формально можно записать как задачу Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t, x, u), \quad t > t_0, \quad (4)$$

$$u(t_0) = u_0.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся следующими предложениями.

Предложение 1. Оператор A является секториальным.

Доказательство. Пусть $\varphi \in D(A)$ и $\psi \in D(A)$, тогда

$$(A\varphi, \varphi) = -k \int_0^l \varphi''(x)\varphi(x)dx = k \int_0^l (\varphi'(x))^2 dx \geq 0,$$

$$(A\varphi, \psi) = -k \int_0^l \varphi''(x)\psi(x)dx = -k \int_0^l \varphi(x)\psi''(x)dx = (\varphi, A\psi),$$

так что, используя теоремы Фридрихса [2], мы можем считать оператор A расширенным до самосопряженного плотно определенного линейного оператора в $L^2(0, l)$. В этом случае

$$D(A) = \{\varphi \in L^2(0, l) \mid A\varphi \in L^2(0, l)\} = H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l).$$

Учитывая замечание 1, делаем вывод, что оператор A секториален. ■

Предложение 2. Функция $f = au - bu^2$ является локально-липшицевой по u , при условии, что $u \in H_0^1(0, l)$.

Доказательство. Функция $f(t, x) : U \rightarrow X$, $U \subset \mathbf{R} \times X$. Фиксируем $(t, x) \in U$ и V ее окрестность. Тогда для любых $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in V$ будем иметь

$$\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\|_{L_2} = \|ax_1 - bx_1^2 - ax_2 + bx_2^2\|_{L_2} \leq a\|x_1 - x_2\|_{L_2} + b\|x_1^2 - x_2^2\|_{L_2},$$

$$\|x_1^2 - x_2^2\|_{L_2} = \left(\int_0^l |x_1^2 - x_2^2|^2 ds \right)^{1/2} = \left(\int_0^l |x_1 + x_2|^2 |x_1 - x_2|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Поскольку $x_1, x_2 \in H_0^1(0, l)$, то существуют $M_i = \sup_{s \in [0, l]} |x_i(s)|$. Пусть $M = \max\{M_1, M_2\}$, тогда $|x_1 + x_2| \leq 2M$. Следовательно:

$$\|x_1^2 - x_2^2\|_{L_2} \leq \left(\int_0^l 4M^2 |x_1 - x_2|^2 dl \right)^{1/2} = 2M \|x_1 - x_2\|_{L_2}.$$

Получаем $\|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\|_{L_2} \leq L \|x_1 - x_2\|_{L_2}$, $L = (a + 2Mb)$. ■

Замечание 3. Функция f является непрерывной.

Для доказательства этого замечания достаточно по любому $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta = \varepsilon / (2a + 4Mb)$. Учитывая неравенство, полученное в доказательстве утверждения 2, получаем $\forall x_1, x_2 \in X (\|x_1 - x_2\|_{L_2} < \delta \Rightarrow \|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\|_{L_2} < \varepsilon)$.

Таким образом, оператор A и функция f удовлетворяют условиям теорем 2 и 3, что обеспечивает существование и единственность решения задачи (4) на всем множестве $U \subset \mathbf{R} \times X$. При этом, если U ограничено, то либо решение существует при всех $t \rightarrow +\infty$, либо решение стремится к границе ∂U . В случае неограниченного U бесконечно удаленная точка входит в множество решений.

В силу построения оператора A и функции f , все полученные результаты переносятся на решение исходной задачи (3). ■

4. Заключение

Приведенный результат гарантирует существование и единственность решения поставленной задачи, при условии, что начальные данные принадлежат классу $H_0^1(0, l)$. При этом решение будет находиться в классе $H_0^1(0, l) \cap H^2(0, l)$. Кроме того, теорема 3 гарантирует глобальное существование решения либо в заданном ограниченном множестве U , либо во всем пространстве решений. При этом решение существует при всех $t \rightarrow +\infty$ или стремится к границе ∂U . В случае неограниченного пространства бесконечно удаленное решение также считается решением задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*. М.: Мир, 1985.
2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу*. М.: Мир, 1979.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1968.
4. Треногин В. А. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1980.

АЛГОРИТМ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ МНОГОШКАЛЬНЫХ ФАЗОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НЕСКОЛЬКИХ ИСТОЧНИКОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Д.Н. Лавров

In this article the estimation algorithm of several wave vectors on measurements made on system of dipoles arrays is presented. Such antenna structure allows enough simply to use the methods of theory of multiscale meters. The additional conditions superimposed on structure of antenna system allow to create the procedure of efficient parallel processing

Введение

Использование разреженных антенных решеток позволяет за счет меньших аппаратных затрат получить качественные оценки пеленга. Обычно в таких решетках расстояние между элементами больше половины длины проходящих волновых фронтов. Это обстоятельство приводит к неоднозначным оценкам волновых векторов. В случае единственного принимаемого сигнала решение проблемы дает теория многошальных фазовых измерителей, основные методы которой описаны в монографии [1]. В условиях нескольких источников излучения задача в общей постановке становится чрезвычайно сложной.

В данной работе предложен алгоритм оценивания нескольких волновых векторов по измерениям, сделанным на системе дипольных решеток. Такая антенная структура позволяет достаточно просто адаптировать методы оценивания, используемые в теории многошальных измерителей, для вычисления совокупности волновых векторов. Накладываемые на структуру антенной системы дополнительные условия позволяют распараллелить алгоритм оценивания.

1. Постановка задачи

Рассмотрим антенную систему, состоящую из L дипольных решеток. Все приемные элементы антенной системы будем считать одинаковыми слабонаправленными датчиками. Каждая дипольная решетка образуется из произвольно расположенных относительно друг друга M датчиков параллельным сдвигом вдоль вектора $\mathbf{h}_i$, $i = \overline{1, L}$. В результате сдвига образуется второе множество датчиков, а вектор $\mathbf{h}_i$ становится фазометрической базой. Первое множество датчиков будем называть *порождающим множеством*, второе – *порожденным множеством*. Каждая дипольная решетка определяется своим вектором сдвига $\mathbf{h}_i$ и порождающим множеством датчиков.

Компоненты векторов сдвига образуют структурную матрицу системы дипольных решеток

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^\top \\ \mathbf{h}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{h}_L^\top \end{pmatrix}$$

На систему дипольных решеток воздействует D плоских волновых фронта, каждому сопоставлен нормированный по длине волновой вектор $\mathbf{v}_i$, $i = \overline{1, D}$ (рис. 1), в направлении которого распространяется фронт. Принимаемые на элементах антенной системы сигналы – узкополосные стационарные случайные процессы с нулевым средним и центральной частотой ω . В каждом датчике присутствует белый шум с мощностью σ^2 без взаимной корреляции между датчиками системы.

Измерения сигналов на порождающих и порожденных множествах представляются в векторном виде

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{s}(t) + \mathbf{u}_i(t) \\ \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{\Phi}_i \mathbf{s}(t) + \mathbf{w}_i(t), \end{cases}$$

где $\mathbf{x}_i(t)$ – M -вектор сигналов в точках приема i -ого порождающего множества, $i = \overline{1, L}$; $\mathbf{y}_i(t)$ – M -вектор сигналов, регистрируемых на датчиках порожденного множества; $\mathbf{A}_i$ – $(M \times D)$ -матрица откликов i -ой дипольной решетки на приходящие сигналы, которая разбивается на две подматрицы $\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i,1} \\ \mathbf{A}_{i,2} \end{pmatrix}$, ранг и размерность матриц $\mathbf{A}_{i,1}$, $i = \overline{1, L}$ равны числу принимаемых сигналов D ; $\mathbf{u}_i(t)$ и $\mathbf{w}_i(t)$ – случайные, взаимно некоррелированные, гауссовы процессы с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией компонент; $\mathbf{\Phi}_i$ – унитарная диагональная $(D \times D)$ -матрица фазовых задержек между порождающим и порожденным множествами

$$\mathbf{\Phi}_i = \text{diag} \left\{ \exp \left(-j \frac{\omega}{c} \mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_1 \right), \dots, \exp \left(-j \frac{\omega}{c} \mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_D \right) \right\}$$

Корреляционные матрицы измерений на подрешетках запишем в блочном представлении:

$$\mathbf{R}_{i,XX} = E\{\mathbf{x}_i(t)\mathbf{x}_i^*(t)\} = \mathbf{A}_i \mathbf{S} \mathbf{A}_i^* + \sigma^2 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{i,1} & \mathbf{X}_{i,2} \\ \mathbf{X}_{i,3} & \mathbf{X}_{i,4} \end{pmatrix}$$

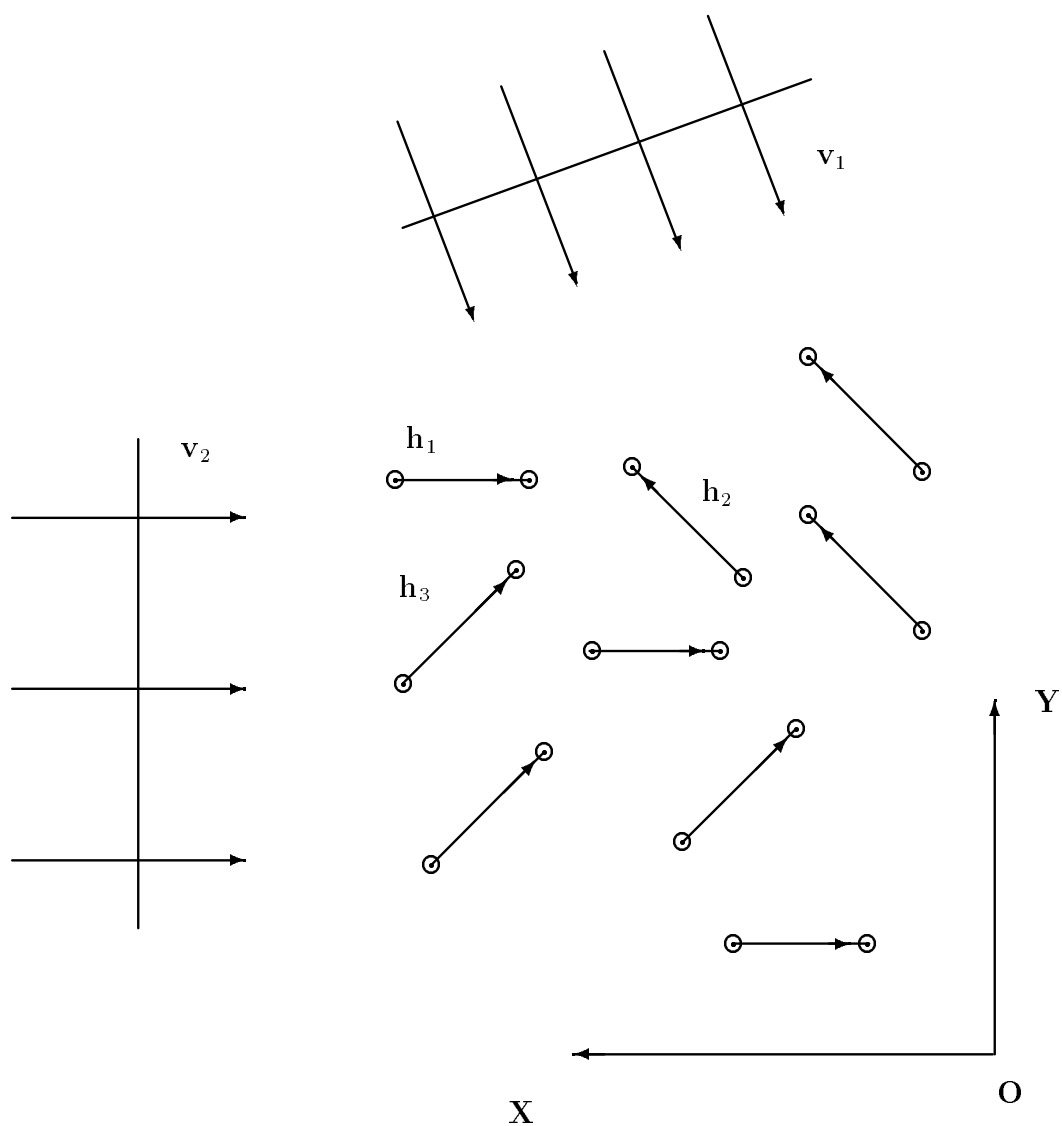


Рис. 1. Плоская антенная система из трех дипольных решеток с порождающими векторами h_1, h_2, h_3 , на которую воздействуют два волновых фронта, распространяющихся в направлении v_1, v_2

$$\mathbf{R}_{i,XY} = E\{\mathbf{x}_i(t)\mathbf{y}_i^*(t)\} = \mathbf{A}_i\mathbf{S}\mathbf{\Phi}^*\mathbf{A}_i^* = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{i,1} & \mathbf{Y}_{i,2} \\ \mathbf{Y}_{i,3} & \mathbf{Y}_{i,4} \end{pmatrix},$$

в дальнейшем понадобятся выражения для $\mathbf{X}_{i,1}$ и $\mathbf{Y}_{i,1}$

$$\mathbf{X}_{i,1} = \mathbf{A}_{i,1}\mathbf{S}\mathbf{A}_{i,1}^* + \sigma^2\mathbf{I} \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}_{i,1} = \mathbf{A}_{i,1}\mathbf{S}\mathbf{\Phi}_i^*\mathbf{A}_{i,1}^*, \quad (2)$$

где $\mathbf{A}^*$ – эрмитово сопряженная к $\mathbf{A}$, $\mathbf{S}$ – $(D \times D)$ -корреляционная матрица сигналов, E – оператор усреднения.

Поставим задачу: по корреляционным матрицам $\mathbf{R}_{i,XX}$, $\mathbf{R}_{i,XY}$ определить направления распространения волновых фронтов (волновые векторы $\mathbf{v}_i$, $i = \overline{1, L}$).

Задача решается в два этапа.

Первый этап – вычисление фазовых задержек между элементами диполей. Для получения оценок фазовых задержек используется метод поворота подпространств [5].

Оценки фазовых задержек в общем случае не будут однозначными, так как длина векторов сдвига может быть больше половины длины волны принимаемых сигналов. Поэтому второй этап оценивания волновых векторов состоит в устранении неоднозначности измерений фазовых задержек. Для этого используется алгоритм устранения неоднозначности типа частичного перебора [2].

Прямое последовательное оценивание волновых векторов оказывается чрезвычайно трудоемким. Быстродействия можно достичь при использовании параллельных вычислений.

2. Вычисление фазовых задержек

Метод поворота подпространств состоит в том, что для каждого $i = \overline{1, L}$ решается обобщенная задача на собственные значения для пары матриц $\{\mathbf{R}_{i,XX} - \lambda_{min}\mathbf{I}, \mathbf{R}_{i,XY}\}$. Аргументы ненулевых собственных значений задачи – это оценки фазовых задержек [5].

Покажем, что обобщенная задача на собственные значения для пары матриц $\{\mathbf{R}_{i,XX} - \lambda_{min}\mathbf{I}, \mathbf{R}_{i,XY}\}$ [5] эквивалентна нахождению собственных чисел матрицы $\mathbf{C}_i = (\mathbf{X}_{i,1} - \lambda_{min}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Y}_{i,1}$, где λ_{min} – минимальное собственное число матрицы $\mathbf{R}_{i,XX}$; $\mathbf{I}$ – единичная матрица соответствующей размерности.

Характеристическое уравнение $Det(\mathbf{C}_i - \zeta\mathbf{I}) = 0$ перепишем с учетом (1), (2):

$$\begin{aligned} Det((\mathbf{X}_{i,1} - \lambda_{min}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Y}_{i,1} - \zeta\mathbf{I}) &= Det((\mathbf{A}_{i,1}\mathbf{S}\mathbf{A}_{i,1}^*)^{-1}\mathbf{A}_{i,1}\mathbf{S}\mathbf{\Phi}_i^*\mathbf{A}_{i,1}^*) = \\ Det(\mathbf{A}_{i,1}^{-*})Det(\mathbf{\Phi}_i^* - \zeta\mathbf{I})Det(\mathbf{A}_{i,1}^*) &= Det(\mathbf{\Phi}_i^* - \zeta\mathbf{I}). \end{aligned}$$

Все обращения $\mathbf{A}_{i,1}$ законны, так как ранг матрицы равен ее размерности. В итоге, характеристическое уравнение обобщенной задачи эквивалентно уравнению

$$Det(\mathbf{\Phi}^* - \zeta\mathbf{I}) = 0. \quad (3)$$

Это означает, что корни данного уравнения, с точностью до комплексного сопряжения, совпадают с несингулярными обобщенными собственными значениями пары матриц $\{\mathbf{R}_{i,XX} - \lambda_{min} \mathbf{I}, \mathbf{R}_{i,XY}\}$.

После решения L задач на нахождение собственных чисел будет получено L наборов фазовых задержек, состоящих из скалярных произведений вида $\mathbf{h}_i^T \mathbf{v}_j$, $i = \overline{1, D}, j = \overline{1, L}$:

первый набор: $\mathbf{h}_1^T \mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{h}_1^T \mathbf{v}_{i_D}$;

второй набор: $\mathbf{h}_2^T \mathbf{v}_{j_1}, \dots, \mathbf{h}_2^T \mathbf{v}_{j_D}$;

и т.д.

Наборы $\{i_1, \dots, i_D\}, \{j_1, \dots, j_D\}, \dots$ — это перестановки индексов $\{1, 2, \dots, D\}$. Такая запись потребовалась для указания на то, что полученные наборы скалярных произведений не упорядочены по индексам волновых фронтов. Поиск правильного порядка — достаточно отдельная и трудоемкая процедура. Далее будет указано, при каких условиях на геометрию антенной системы можно построить алгоритм не требующий дополнительного трудоемкого упорядочивания.

Запишем все полученные измерения по наборам (вначале первый набор, затем второй набор и т.д.) в вектор $\mathcal{F}$, а факт неупорядоченности укажем умножением на неизвестную, подлежащую оценке матрицу перестановок $\mathbf{P}$. Фактически известен не сам вектор $\mathcal{F}$, а произведение $\mathbf{P}\mathcal{F}$.

В дальнейшем считаем, что длины векторов $\mathbf{h}_i$ и $\mathbf{v}_j$ в длинах волн и единицах 2π .

Если длины векторов сдвига больше половины длины волны приходящих волновых фронтов, то с помощью метода поворота подпространств оцениваются только дробные части скалярных произведений $\mathbf{h}_i^T \mathbf{v}_j$ $i = \overline{1, L}, j = \overline{1, D}$ (i — номер дипольной решетки, j — номер волнового вектора), которые равны D аргументам корней уравнения (3). Обозначим полные фазовые задержки вектором $\mathcal{M}$, а целые потерянные при измерении части полных задержек вектором $\mathcal{K}$. Тогда искомый вектор полных фазовых задержек

$$\mathcal{M} = \mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}).$$

Для получения полных фаз необходимо восстановить вектор целых частей, потерянных при измерении, и матрицу перестановок.

В следующем разделе указано формальное решение задачи согласования измерений (перегруппировки) и задачи устранения неоднозначности.

3. Оценка максимального правдоподобия

Для построения оценки максимального правдоподобия совокупности волновых векторов необходимо знать закон распределения ошибок разности фаз. Обычно используется усеченный гауссовский закон [1]. Обоснованием выбора является то, что этот закон распределения хорошо аппроксимирует известные распределения фаз при небольших дисперсиях.

Логарифм функции правдоподобия будет равен

$$\ln \mathcal{L} = -C_1(\mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) - (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})\mathbf{V})^\top \mathbf{B}(\mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) - (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})\mathbf{V}) + C_2,$$

где $C_1 > 0$, C_2 – константы, не зависящие от искомых параметров. Продифференцировав и приравняв к нулю, после ряда преобразований получим итоговые выражения с учетом возможной неоднозначности измерения фазовых задержек:

$$\hat{\mathbf{V}} = ((\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})^\top \mathbf{B}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H}))^{-1}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})^\top \mathbf{B}\mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \arg \min_{\mathbf{P}} (\mathcal{F} + \mathcal{K})^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) \quad (5)$$

$$\hat{\mathcal{K}} = \arg \min_{\mathcal{K}} (\mathcal{F} + \mathcal{K})^\top \mathbf{P}^\top \mathbf{P} \mathbf{P}(\mathcal{F} + \mathcal{K}) \quad (6)$$

с проектором

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{B} - \mathbf{B}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})((\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})^\top \mathbf{B}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H}))^{-1}(\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{H})^\top \mathbf{B},$$

где $\mathbf{I}_D$ – $(D \times D)$ -единичная матрица; $\mathbf{P}$ – матрица перестановок; $\mathcal{F}$ – полученные на первом этапе оценки дробных частей скалярных произведений вида $\mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_j$, $\mathcal{F}_{i+L(j-1)} = \widehat{\mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_j}$, $i + L(j-1) = \overline{1, LD}$ (за $\widehat{\mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_j}$ обозначена оценка $\mathbf{h}_i^\top \mathbf{v}_j$); $\mathbf{V}$ – (ND) -вектор, $\mathbf{V}_{j+L(i-1)} = \mathbf{v}_{i,j}$ ($\mathbf{v}_{i,j}$ – j -ая компонента i -ого волнового вектора); $\otimes$ – операция прямого матричного (или кронекеровского) произведения.

Первое уравнение (4) есть максимально правдоподобная оценка совокупности волновых векторов. Второе уравнение (5) описывает алгоритм согласования измерений. Третье (6) – алгоритм устранения неоднозначности. Поиск минимумов в (5), (6) в общем случае – весьма трудоемкая процедура. В следующем разделе показано, при каких условиях можно существенно снизить время, затраченное на получение оценки совокупности волновых векторов.

4. Параллельная обработка

Вычислительные затраты алгоритмов решения уравнений (5), (6) растут экспоненциально от числа дипольных решеток и полиномиально от количества источников. Кроме того, для получения фазовых измерений необходимо решить L задач на собственные значения.

Пусть порождающее множество датчиков для всех дипольных решеток одинаково, датчики этого множества участвуют в образовании всех дипольных решеток системы. Следовательно, одинаковы для всех решеток матрицы $\mathbf{X}_{i,1}$ и $\mathbf{A}_{i,1}$, при этом оказывается, что $\mathbf{C}_i$ принадлежат семейству коммутирующих матриц, то есть для любых $i, j = \overline{1, L}$ выполняется свойство $\mathbf{C}_i \mathbf{C}_j = \mathbf{C}_j \mathbf{C}_i$ (проверяется прямой подстановкой выражений для матриц $\mathbf{C}_i$). Такие матрицы приводятся к верхней форме Шура (над комплексным полем – к верхнетреугольной форме) одним и тем же ортогональным преобразованием [7]. Это означает, что

необходимо решать в полном объеме только одну задачу на собственные значения, например, для $\mathbf{C}_1$. Решения остальных находятся при помощи уже полученного ортогонального QR-преобразования этой первой задачи. Кроме того, никакого согласования измерений уже не требуется, так как собственные числа, соответствующие одному волновому вектору, принадлежат и одному и тому же собственному подпространству. Таким образом, отпадает необходимость оценивать матрицу $\mathbf{P}$, так как она тождественно равна единичной матрице.

Систему дипольных решеток с одним и тем же порождающим множеством можно рассматривать как систему решеток с опорными антеннами. Линейные структуры с опорной антенной исследовались, например, в работе [3]. Опорными антеннами в нашем случае являются элементы порождающего множества (рис. 2).

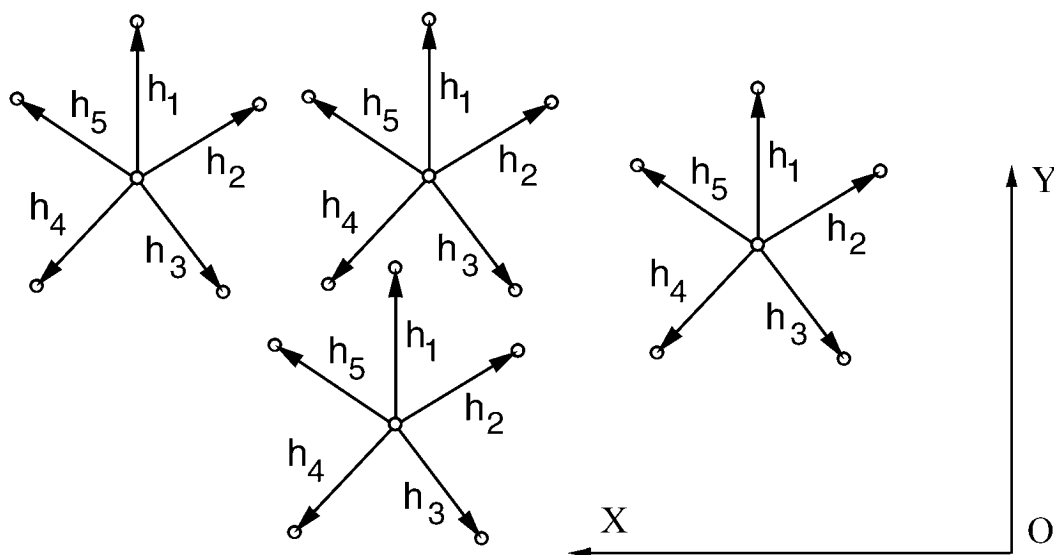


Рис. 2. Антенная система из пяти дипольных решеток, представленная как четыре решетки с опорной антенной

Раздельное по каждому источнику излучения устранение неоднозначности (6) возможно при слабой корреляции между фазовыми измерениями различных источников. Вследствие этого матрицу $\mathbf{B}$ можно считать блочно-диагональной:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathbf{B}_D \end{pmatrix},$$

что позволяет представить уравнения (4), (6) в виде D уравнений

$$\hat{\mathbf{v}}_i = (\mathbf{H}^\top \mathbf{B}_i \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{B}_i (\varphi_i + \mathbf{k}_i) \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_i = \arg \min_{\mathbf{k}_i} (\varphi_i + \mathbf{k}_i)^\top \mathbf{\Pi}_i (\varphi_i + \mathbf{k}_i), \quad (8)$$

$$i = \overline{1, D}$$

где $\hat{\mathbf{v}}_i$ – оценка N -мерного волнового вектора; $\mathbf{H}$ – структурная $(L \times N)$ -матрица измерений системы; $\mathbf{B}_i$ – $(L \times L)$ -матрица, обратная к корреляционной матрице ошибок измерений фаз i -ого волнового фронта; $\mathbf{P}_i$ – $(L \times L)$ -проектор на ортогональное подпространство столбцов матрицы $\mathbf{H}$ в пространстве с $\mathbf{B}_i$ -нормой, $\mathbf{P}_i = \mathbf{B}_i - \mathbf{B}_i \mathbf{H} (\mathbf{H}^\top \mathbf{B}_i \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{B}_i$; $\boldsymbol{\varphi}_i$ – L -вектор дробных, измеренных частей фаз; $\mathbf{k}_i$ – L -вектор целых, потерянных при измерении частей фаз. С точностью до обозначений эти уравнения представляют собой уравнения, описывающие максимально правдоподобную оценку волнового вектора и алгоритм устранения неоднозначности фазовых измерений теории многошкальных фазовых измерителей [1].

Экспоненциальный рост вычислительных затрат от числа дипольных решеток в алгоритме устранения неоднозначности (6) существенно понижается при использовании алгоритмов с частичным перебором [2, 4] и становится линейным при использовании беспереборных квазиоптимальных алгоритмов [1] для антенных решеток с рациональными отношениями баз.

Запишем по шагам полученный алгоритм вычисления совокупности волновых векторов для согласованных систем дипольных решеток: 1) вычисляем корреляционные матрицы $\mathbf{R}_{XX,i}$ и $\mathbf{R}_{XY,i}$, $i = \overline{1, L}$ (i – номер решетки); 2) понижаем их размерности до D , приводим задачи на нахождение обобщенных собственных чисел к обычным задачам на собственные значения для матриц $\mathbf{C}_i$, $i = \overline{1, L}$ и решаем первую из них, решения остальных получаются применением ортогонального преобразования первой задачи; 3) вычисляем аргументы собственных чисел, в результате получаем вектор измерений дробных частей фаз $\mathcal{F}$; 4) полным или частичным перебором решаем задачу устранения неоднозначности по формулам (4), (6).

Схема описанного алгоритма представлена на рисунке 3. Потоки данных алгоритма описаны в таблице 1.

Единственным узким звеном алгоритма является определение числа источников. Пока число источников неизвестно, алгоритм нельзя распараллелить. Для определения числа источников можно воспользоваться критерием кратности минимального собственного числа [8]: «Если выполняется приближенное неравенство

$$\lambda_i < \frac{1 + p\sqrt{2/T}}{1 - p\sqrt{2/T}} \lambda_{min},$$

то будем считать собственное число λ_i кратным λ_{min} . Здесь T – размер выборки для образования корреляционной матрицы, λ_i – i -ое собственное число матрицы $\mathbf{R}_{XX}$, λ_{min} – минимальное собственное число, p – подбираемый параметр, рекомендуемое значение $p = 3$. Число источников излучения равно разности размерности матрицы и кратности минимального собственного числа.

Заключение

Алгоритм несколько теряет в точности получаемых оценок, так как приходится усекать матрицы до размерности D . Этого можно избежать, решая

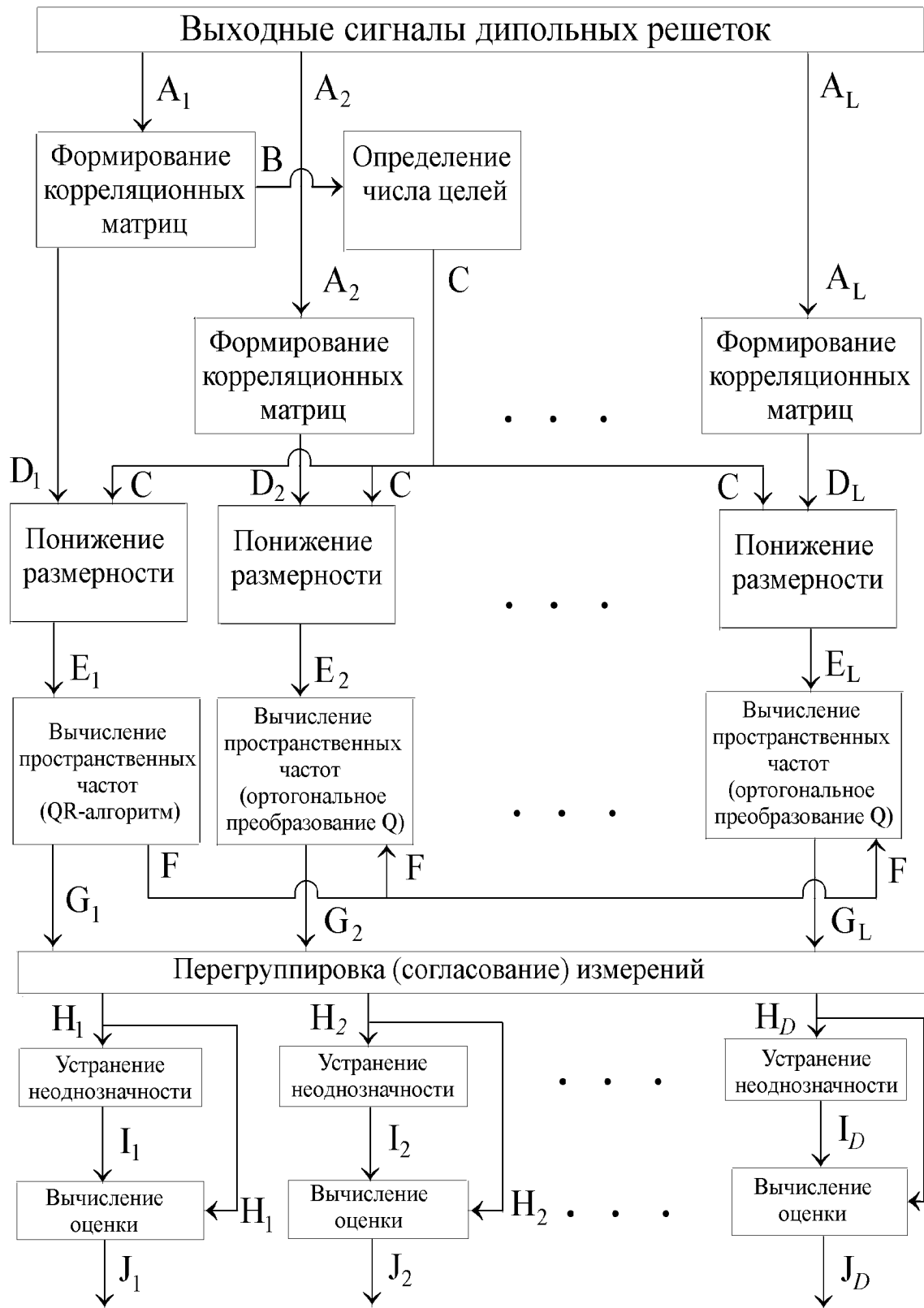


Рис. 3. Схема параллельной обработки измерений в алгоритме оценивания волновых векторов

Таблица 1

Описание потоков, данных в схеме (рис. 3)

Поток	Данные	Описание
A_i	$\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_i(t); i = \overline{1, L}$	Измерения на системе дипольных решеток.
B	$\mathbf{R}_{XX,1}$	Корреляционная матрица первой дипольной решетки.
C	D, λ_{min}	Оценка числа источников и минимального собственного числа.
D_i	$\mathbf{R}_{XX,i}, \mathbf{R}_{XY,i}; i = \overline{1, L}$	Корреляционные матрицы.
E_i	$\mathbf{C}_i, i = \overline{1, L}$	Матрица размерности D , эквивалентная паре $\mathbf{R}_{XX,i}, \mathbf{R}_{XY,i}$.
F	$\mathbf{Q}$	Ортогональное преобразование, приводящее $\mathbf{C}_i$ к верхней форме Шура.
G_i	$\varphi_{i,k}, i = \overline{1, L}, k = \overline{1, D}$	Фазовые задержки.
H_i	$\varphi_i, i = \overline{1, D}$	Фазовые задержки, перегруппированные так, что каждая компонента φ_i соответствует одному и тому же волновому вектору.
I_i	$\widehat{\mathbf{k}}_i, i = \overline{1, D}$	Восстановленные целые части полных фазовых задержек.
J_i	$\widehat{\mathbf{v}}_i, i = \overline{1, D}$	Оценки волновых векторов.

обобщенные задачи на собственные значения для пар матриц, не сводя их к обычным задачам с одной матрицей (по-прежнему считаем, что порождающее множество всех дипольных решеток одинаково). Но при этом возникают следующие трудности:

1. Не существует простого аналога коммутруемости для двух пар матриц. Это означает, что не ясно, на каком основании можно использовать одно и то же QZ-преобразование для приведения всех пар матриц к верхнетреугольному виду. Хотя численные эксперименты указывают на то, что QZ-преобразование первой пары матриц $(\mathbf{R}_{1,XX} - \sigma^2 \mathbf{I}, \mathbf{R}_{1,XY})$, по-видимому, действительно приводит все остальные пары к верхнетреугольному виду.

2. Возникает трудность в выборе из всего множества собственных значений (размера M) D собственных чисел, которые отвечают истинным направлениям прихода. Даже если оценено значение D , выбор этот не определен. В работе [5] предлагается использовать некоторый порог для определения нулевых обобщенных собственных значений, а ненулевые отождествить с направлениями прихода, но такой способ никак необоснован. Кроме того, так как обе матрицы $\mathbf{R}_{XX} - \sigma^2 \mathbf{I}$ и $\mathbf{R}_{XY}$ имеют ранг D , то не доказано, что сингулярные собственные числа, не соответствующие направлениям прихода, будут нулевыми.

Из представленной схемы (рис.3) видно, что время работы описанного в работе алгоритма параллельной обработки многошкальных измерений нескольких источников излучения сравнимо со временем нахождения оценки волнового вектора одного приходящего фронта.

В заключение, автор выражает глубокую признательность В.М.Челембию за плодотворное обсуждение постановки задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов В.И. *Теория фазовых измерительных систем* / Под. ред. проф. Г.Н.Глазова. Томск: ТГАСУР, 1994. С.144.
2. Белов В.И., Челембий В.М. *Об одном алгоритме определения параметра в многошкальной фазовой измерительной системе* // Радиотехника и электроника. 1994. Т.39. N.10. С.1619–1624.
3. Денисов В.П. *О потенциальной точности фазового пеленгатора с антенной системой в виде линейной решетки* // Радиотехника и электроника. 1978. Т.35. N.8. С.1631–1636.
4. Пензин К.В. *Алгоритмы оперативной обработки многошкальных измерений по критерию максимального правдоподобия* // Радиотехника и электроника. 1990. Т.35. N.1. С.97–106.
5. Полрадз А., Рой Р., Кайлах Т. *Оценивание параметров сигнала методом поворота подпространств* // ТИИЭР. 1986. Т. 74. N.7. С.165–166.
6. Икрамов Х.Д. *Численное решение матричных уравнений*. М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1984.
7. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ*. М.: Мир, 1989.
8. Лавров Д.Н. Хомич Е.В. *Оценивание волновых векторов системой дипольных решеток* // Фундаментальная и прикладная математика: Сб. научн. тр. / Под ред. А.К.Гуца. Омск, 1994. С.112–119.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЕЕ РЕШЕНИЙ

Н.В. Перцев, А.Н. Перцева

The paper is concerned with a generalization of Lotka-Volterra model, arising under the consideration of some populations with a limited life span of its individuals. The system of nonlinear integral equations of the renewal type is used for the construction of the model. Some properties of the model solutions are established

1. Постановка задачи

В работах [1], [2] предложен вариант модели Лотки-Вольтерра, описывающей динамику конкурирующих популяций с учетом их плотностной и возрастной структуры. Система уравнений модели имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(x(s))ds} \int_{\langle t, \tau_i \rangle}^{\tau_i} R_i(a) \varphi_i(a-t) da + \int_0^{\langle t, \tau_i \rangle} R_i(a) e^{-\int_{t-a}^t \lambda_i(x(s))ds} b_i(t-a) da, \\ b_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(x(s))ds} \int_{\langle t, \tau_i \rangle}^{\tau_i} \mu_i(a) R_i(a) \varphi_i(a-t) da + \\ + \int_0^{\langle t, \tau_i \rangle} \mu_i(a) R_i(a) e^{-\int_{t-a}^t \lambda_i(x(s))ds} b_i(t-a) da, \quad 1 \leq i \leq m, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь принято, что для фиксированного $1 \leq i \leq m$ численность популяции индивидуумов i -го вида равна $x_i(t) = \int_0^{\tau_i} x_i(a, t) da$, где $x_i(a, t)$ означает плотность численности популяции индивидуумов i -го вида возраста a в момент времени t , $0 \leq a \leq \tau_i$, $t \geq 0$. Параметр $0 < \tau_i < \infty$ задает максимальную продолжительность времени жизни индивидуумов i -го вида, $\langle t, \tau_i \rangle = \min(t, \tau_i)$,

© 2000 Н.В. Перцев, А.Н. Перцева

E-mail: pertsev@univer.omsk.su

Омский государственный университет

$t \geq 0$. Переменная $b_i(t)$ означает интенсивность рождения новых индивидуумов i -го вида нулевого возраста в момент времени $t \geq 0$. Принято, что $b_i(t) = \int_0^{\tau_i} \mu_i(a)x_i(a,t)da$, где неотрицательная функция $\mu_i(a)$ задает специфическую возрастную рождаемость индивидуумов i -го вида в зависимости от их возраста, $0 \leq a \leq \tau_i$. Процесс старения индивидуумов i -го вида описывается с помощью функции выживаемости $R_i(a)$, которая принята невозрастающей и положительной на $[0, \tau_i)$, $R_i(0) = 1$, $R_i(a) = 0$ при $a \geq \tau_i$. Выражение $\bar{\tau}_i = \int_0^{\tau_i} R_i(a)da$ означает среднюю продолжительность времени жизни индивидуумов i -го вида. Распределение по возрасту первоначально существующих индивидуумов i -го вида задается неотрицательной функцией $x_i(a, 0) = R_i(a)\varphi_i(a)$ так, что их начальная численность равна $x_i(0) = \int_0^{\tau_i} R_i(a)\varphi_i(a)da$. Интенсивность гибели индивидуумов i -го вида вследствие самолимитирования и конкуренции (независимо от их возраста) описывается неотрицательной функцией $\lambda_i(x(t))$, где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$.

В уравнениях (1) функции $R_i(a)$, $\mu_i(a)$, $\varphi_i(a)$ предполагаются непрерывными на $[0, \tau_i]$, причем $\mu_i(a)$ тождественно не равны нулю, $1 \leq i \leq m$. Считается, что функции $\lambda_i(x)$ определены при всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R_+^m$ и удовлетворяют условию Липшица: для всех $x, y \in R_+^m$ $|\lambda_i(x) - \lambda_i(y)| \leq M_i|x - y|$, $1 \leq i \leq m$, (здесь и далее под $|x|$ понимается норма вектора $x \in R^m$).

В работе [2] детально исследованы свойства решений модели (1) для одного из ее вариантов, когда

$$R_i(a) = \int_a^{\tau_i} p_i(s)ds, \quad 0 \leq a \leq \tau_i, \quad \lambda_i(x) = \sum_{k=1}^m c_{i,k}x_k, \quad c_{i,k} \geq 0, \quad c_{i,i} > 0, \quad 1 \leq k, \quad i \leq m,$$

где функции $p_i(a)$ описывают интенсивность гибели индивидуумов i -го вида в зависимости от их возраста $0 \leq a \leq \tau_i$, $1 \leq i \leq m$. Этот вариант системы (1) может рассматриваться как интегральный аналог классической модели Лотки – Вольтерра в дифференциальной форме [2].

В приложениях часто используются обобщенные модели Лотки – Вольтерра, в которых $\lambda_i(x) = \sum_{k=1}^m c_{i,k}h_k(x_k)$, $c_{i,k} \geq 0$, $c_{i,i} > 0$, $1 \leq k, \quad i \leq m$, где $h_k(x_k)$ определены, неотрицательны, непрерывно дифференцируемы для всех $x_k \geq 0$ и $h_k(0) = 0$, $h'_k(x_k) > 0$, $1 \leq k \leq m$. Последнее неравенство учитывает усиление интенсивности гибели индивидуумов за счет конкуренции и самолимитирования при возрастании численностей индивидуумов как отдельной, так и вместе взятых популяций [3]. Примеры указанных функций приведены в работе [4].

Целью настоящей работы является исследование некоторых свойств решений системы уравнений (1), в которой функции $\lambda_i(x)$ удовлетворяют следующему условию:

Н) $\lambda_i(0) = 0$ и для всех $x, y \in R_+^m$ таких, что $x_1 \leq y_1, \dots, x_i \leq y_i, \dots, x_m \leq y_m$, причем хотя бы одно из неравенств строгое, верно

$$\lambda_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) < \lambda_i(y_1, \dots, y_i, \dots, y_m), \quad 1 \leq i \leq m.$$

2. Некоторые свойства решений интегральной модели

Решением системы уравнений (1) будем называть непрерывные вектор-функции $x(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_m(t))$ и $b(t) = \text{col}(b_1(t), \dots, b_m(t))$, удовлетворяющие покомпонентно уравнениям (1) на некотором полуинтервале $[0, \delta)$, $\delta > 0$. Следуя [2], для фиксированного $1 \leq i \leq m$ введем функции $z_i(t)$, $y_i(t)$ по следующим формулам:

$$x_i(t) = y_i(t) e^{-\int_0^t \lambda_i(x(s)) ds}, \quad b_i(t) = z_i(t) e^{-\int_0^t \lambda_i(x(s)) ds}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Используя в (1) замену (2), получаем, что функции $z_i(t)$, $y_i(t)$ удовлетворяют линейным интегральным уравнениям

$$y_i(t) = \int_{\langle t, \tau_i \rangle}^{\tau_i} R_i(a) \varphi_i(a-t) da + \int_0^{\langle t, \tau_i \rangle} R_i(a) z_i(t-a) da, \quad (3)$$

$$z_i(t) = \int_{\langle t, \tau_i \rangle}^{\tau_i} \mu_i(a) R_i(a) \varphi_i(a-t) da + \int_0^{\langle t, \tau_i \rangle} \mu_i(a) R_i(a) z_i(t-a) da, \quad (4)$$

$$1 \leq i \leq m, \quad t \geq 0.$$

Уравнения (3), (4) относятся к одномерным уравнениям восстановления, свойства решений которых приведены в [2]. Решения $z_i(t)$, $y_i(t)$ этих уравнений определены на $[0, \infty)$, являются неотрицательными и непрерывными функциями. Асимптотическое поведение решений $z_i(t)$, $y_i(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ тесно связано с параметром

$$B_i = \int_0^{\tau_i} \mu_i(a) R_i(a) da, \quad (5)$$

а также с единственным действительным корнем β_i уравнения

$$\int_0^{\tau_i} \mu_i(a) R_i(a) e^{-\beta_i a} da = 1. \quad (6)$$

Из соотношений (5), (6) следует, что $\beta_i > 0$, $\beta_i = 0$, $\beta_i < 0$, если, соответственно, $B_i > 1$, $B_i = 1$, $B_i < 1$. В работах по экологической тематике параметр B_i называют репродуктивным числом индивидуума, а β_i – внутренней скоростью естественного роста популяции i -го вида, $1 \leq i \leq m$ [4, с. 119]. Можно показать, что при $t \rightarrow +\infty$ $z_i(t)$, $y_i(t) \sim \exp(\beta_i t)$.

Перейдем теперь к некоторым свойствам решений модели (1), которую будем рассматривать в форме системы (2). Как отмечено выше, в этой системе функции $y_i(t)$, $z_i(t)$ можно считать известными из уравнений (3), (4), $1 \leq i \leq m$,

$0 \leq t < \infty$. Обозначим через $f(t) = \text{col}(f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$ вектор-функцию, компоненты которой состоят из решений уравнений (3), т.е. $f_i(t) = y_i(t)$, $1 \leq i \leq m$. Пусть далее, $x(t) = \text{col}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$,

$$F_x(t) = A_x(t)f(t), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где $A_x(t)$ – диагональная матрица следующего вида:

$$A_x(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x(s))ds} = \text{diag} \left(e^{-\int_0^t \lambda_1(x(s))ds}, e^{-\int_0^t \lambda_2(x(s))ds}, \dots, e^{-\int_0^t \lambda_m(x(s))ds} \right).$$

Очевидно, что для исследования системы (2) достаточно рассмотреть систему уравнений

$$x(t) = F_x(t), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

решения которой ищутся в пространстве $C_{[0,T]}$ вектор-функций $x(t)$, определенных и непрерывных на некотором отрезке $[0, T]$, $0 < T < \infty$. Применим к системе уравнений (8) принцип сжимающих отображений, используя следующую норму для $x \in C_{[0,T]}$: $\|x\|_* = \sup_{t \in [0,T]} e^{-Lt} |x(t)|$, где $L > 0$ – некоторая константа, $|\cdot|$ – норма векторов из R^m [5, с. 11].

Теорема 1. Система уравнений (8) имеет единственное решение $x(t)$, определенное и неотрицательное (покомпонентно) на $[0, \infty)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $0 < T < \infty$. Пусть $x, y \in C_{[0,T]}$. Имеем, что

$$\begin{aligned} |F_x(t) - F_y(t)| &= |(A_x(t) - A_y(t))f(t)| \leq \|A_x(t) - A_y(t)\|_M |f(t)| = \\ &= \max_{i=1,m} \left| e^{-\int_0^t \lambda_i(x(s))ds} - e^{-\int_0^t \lambda_i(y(s))ds} \right| |f(t)| \leq \\ &\leq \max_{i=1,m} \left| \int_0^t \lambda_i(x(s))ds - \int_0^t \lambda_i(y(s))ds \right| |f(t)| \leq \\ &\leq \max_{i=1,m} \int_0^t |\lambda_i(x(s)) - \lambda_i(y(s))|ds |f(t)| \leq \max_{i=1,m} \int_0^t M_i |x(s) - y(s)|ds |f(t)|. \end{aligned}$$

Здесь символом $\|\cdot\|_M$ обозначена матричная норма, которая выбирается согласованной с нормой $|\cdot|$ векторов из R^m . Повторяя выкладки, получаем, что

$$\begin{aligned} e^{-Lt} |F_x(t) - F_y(t)| &\leq e^{-Lt} \max_{i=1,m} \int_0^t M_i |x(s) - y(s)|ds |f(t)| = \\ &= e^{-Lt} \max_{i=1,m} \int_0^t M_i e^{Ls} (e^{-Ls} |x(s) - y(s)|)ds |f(t)| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \max_{i=1,m} M_i |f(t)| \|x - y\|_* (1 - e^{-Lt})/L \leq M_* |f(t)| \|x - y\|_* (1 - e^{-LT})/L,$$

где $M_* = \max_{i=1,m} M_i$. Выбирая константу $L = M_* \sup_{[0,T]} |f(t)|$, получаем, что $\|F_x - F_y\|_* \leq q \|x - y\|_*$, причем $0 < q < 1$. Используя произвольность выбора T и неотрицательность компонент вектор-функции $f(t)$, завершаем доказательство. ■

Теорема 2. *Решение $x(t)$ системы (8) непрерывным образом зависит от функции $f(t)$ на любом конечном отрезке $[0, T]$.*

Доказательство. Пусть решения $x^1 = x^1(t)$, $x^2 = x^2(t)$ соответствуют функциям $f^1 = f^1(t)$, $f^2 = f^2(t)$, входящим в (7), $t \in [0, T]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\|f^1 - f^2\|_* < \delta$ будет следовать неравенство $\|x^1 - x^2\|_* < \varepsilon$. Имеем:

$$\begin{aligned} e^{-Lt} (x^1(t) - x^2(t)) &= e^{-Lt} e^{-\int_0^t \lambda(x^1(s)) ds} (f^1(t) - f^2(t)) + \\ &+ e^{-Lt} \left(e^{-\int_0^t \lambda(x^1(s)) ds} - e^{-\int_0^t \lambda(x^2(s)) ds} \right) f^2(t). \end{aligned}$$

Используя оценки из теоремы 1, получаем, что

$$\|x^1 - x^2\|_* \leq \|f^1 - f^2\|_* + M_* \sup_{[0,T]} |f^2(t)| \|x^1 - x^2\|_* (1 - e^{-LT})/L.$$

Полагая $L = M_* \max\{\sup_{[0,T]} |f^2(t)|, \sup_{[0,T]} |f^1(t)|\}$, приходим к неравенству $\|x^1 - x^2\|_* \leq \|f^1 - f^2\|_* + (1 - \exp(-LT)) \|x^1 - x^2\|_*$. Отсюда $\|x^1 - x^2\|_* \leq \exp(LT) \|f^1 - f^2\|_*$. Выбирая затем $\delta = \varepsilon \exp(-LT)$, получаем требуемую оценку. ■

Приведем далее некоторые свойства решений системы уравнений (1), которые непосредственно вытекают из результатов работы [2]. Нетрудно заметить, что система (1) допускает решение с нулевыми компонентами $x_k(t) = b_k(t) = 0$, $t \geq 0$, если только для некоторого $1 \leq k \leq m$ выполнено соотношение $x_k(0) = \int_0^{\tau_k} R_k(a) \varphi_k(a) da = 0$, эквивалентное тому, что $\varphi_k(a) \equiv 0$. Это означает, что если начальная численность k -ой популяции равнялась нулю, то и в дальнейшем (при отсутствии иммиграции) ее численность также будет равняться нулю.

Пусть теперь при фиксированном $1 \leq j \leq m$ $x_j(0) > 0$, но функция

$$\nu_j(t) = \int_t^{\tau_j} \mu_j(a) R_j(a) \varphi_j(a - t) da, \quad 0 \leq t \leq \tau_j \quad (9)$$

такова, что $\nu_j(t) = 0$ для всех $0 \leq t \leq \tau_j$. Эта ситуация возникает в том случае, когда первоначально существующие индивидуумы j -ой популяции не могут производить потомство (их возраст «не согласуется» с функцией специфической возрастной рождаемости). Тогда из (4) следует, что $z_j(t) = 0$ для всех

$t \geq 0$. Из (2) получаем, что $0 \leq x_j(t) \leq y_j(t) = \int_t^{\tau_j} R_j(a) \varphi_j(a-t) da$ при $0 \leq t \leq \tau_j$ и $x_j(t) = 0$ при $t \geq \tau_j$. Последнее означает, что за время τ_j j -ая популяция вырождается, т.е. ее численность становится равной нулю.

Предположим, что $x_j(0) > 0$ и существует $t_* \in [0, \tau_j)$ такой, что $\nu_j(t_*) > 0$. Можно показать, что из этих неравенств следует, что $y_j(t) > 0$, $x_j(t) > 0$ для всех $0 \leq t < \infty$. Вместе с тем, при выполнении указанных неравенств также возможно вырождение популяций, что устанавливает следующая

Теорема 3. Пусть для некоторого $1 \leq k \leq m$ выполняется неравенство $B_k \leq 1$, либо $\nu_k(t) \equiv 0$, $t \geq 0$. Тогда любое решение $x(t)$ системы (1) таково, что существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = 0$.

Доказательство. Предположим, что выполнены условия: $x_k(0) = 0$ или $x_k(0) > 0$, $\nu_k(t) \equiv 0$, $t \geq 0$. Используя полученные выше результаты относительно поведения $x_k(t)$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Пусть далее $x_k(0) > 0$, $\nu_k(t)$ не равна тождественно нулю на $[0, \tau_k]$ и $B_k \leq 1$. Используя [2], имеем, что решение уравнения (3) $y_k(t)$ таково, что $y_k(t) \rightarrow \bar{y}_k$ при $t \rightarrow +\infty$, где $0 \leq \bar{y}_k < \infty$ – некоторая константа. При $B_k < 1$ ($\beta_k < 0$) $\bar{y}_k = 0$ и из неравенств $0 \leq x_k(t) \leq y_k(t)$, $t \geq 0$, получаем, что $x_k(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Пусть теперь $0 < \bar{y}_k < \infty$, что соответствует случаю $B_k = 1$, ($\beta_k = 0$). Зафиксируем $\Delta t > 0$. Учитывая положительность $y_k(t)$ и $x_k(t)$, из уравнений (2) имеем, что при всех $t \geq 0$ верно

$$\frac{x_k(t + \Delta t)}{x_k(t)} = \frac{y_k(t + \Delta t)}{y_k(t)} \exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_k(x(s)) ds\right).$$

Это соотношение может быть записано в виде

$$\frac{x_k(t + \Delta t)}{x_k(t)} = \exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_k(x(s)) ds\right) + \xi_k(t), \quad (10)$$

где $\lim_{t \rightarrow +\infty} \xi_k(t) = 0$. Пользуясь неотрицательностью решения $x(t)$, условием Н) и тем, что $x_k(t) > 0$, получаем, что подинтегральная функция в (10) удовлетворяет неравенствам $0 < \lambda_k(0, \dots, x_k(s), \dots, 0) \leq \lambda_k(x_1(s), \dots, x_k(s), \dots, x_m(s))$, $0 \leq s < \infty$. Отсюда верно неравенство

$$\frac{x_k(t + \Delta t)}{x_k(t)} \leq \exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \lambda_k(0, \dots, x_k(s), \dots, 0) ds\right) + \xi_k(t). \quad (11)$$

Тогда при достаточно больших t для любого $\Delta t > 0$ из неравенства (11) имеем $x_k(t + \Delta t)/x_k(t) < 1$ и, следовательно, существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_k(t) = u_k \geq 0$. Предположим, что $u_k > 0$. Зафиксировав $\Delta t > 0$ и переходя в (11) к пределу при $t \rightarrow +\infty$, получим противоречие: $1 \leq \exp(-\lambda_k(0, \dots, u_k, \dots, 0) \Delta t)$. Отсюда следует, что $u_k = 0$. ■

Обратимся теперь к вопросу об ограниченности решений $x(t)$ модели (1). Приведенные ниже результаты опираются на изучение одномерной модели для переменной $u_k(t)$, где k - некоторый фиксированный индекс. Обозначим $\tilde{\lambda}_k(u_k) = \lambda_k(0, \dots, u_k, \dots, 0)$, $u_k \geq 0$. Из условия Н) следует, что $\tilde{\lambda}_k(u_k)$ является возрастающей функцией, а уравнение

$$u_k(\beta_k - \tilde{\lambda}_k(u_k)) = 0, \quad u_k \geq 0 \quad (12)$$

при $\beta_k > 0$ имеет не более двух корней u_k^* , причем один из них равен нулю, а второй, если существует, то положителен.

Примем далее, что для всех $1 \leq k \leq m$ $x_k(0) > 0$, $B_k > 1$ ($\beta_k > 0$), функции $\nu_k(t)$ тождественно не равны нулю на $[0, \tau_k]$. Рассмотрим частный случай системы (8), а именно уравнение

$$u_k(t) = f_k(t) e^{-\int_0^t \tilde{\lambda}_k(u_k(s)) ds}, \quad t \geq 0, \quad (13)$$

в котором непрерывная положительная функция $f_k(t)$ имеет следующий вид: $f_k(t) = e^{\beta_k t} (q_k + \varepsilon_k(t))$, где $q_k > 0$ - константа, $\varepsilon_k(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, $\beta_k > 0$ (указанное представление вытекает из свойств решений уравнений (3), (4) [2]).

Лемма 1. Пусть уравнение (12) имеет только один корень $u_k^* = 0$. Тогда решение $u_k(t)$ уравнения (13) является неограниченной на $[0, \infty)$ функцией.

Доказательство. Из условия леммы вытекает, что для всех $u_k \geq 0$ верно $\beta_k - \tilde{\lambda}_k(u_k) > 0$. Примем, что $u_k(t)$ является ограниченной на $[0, \infty)$ функцией, т.е. существует $0 < P_k < \infty$ такое, что для всех $0 \leq t < \infty$ верно $0 \leq u_k(t) \leq P_k$.

Из (13) имеем, что $u_k(t) = (q_k + \varepsilon_k(t)) \exp(\int_0^t (\beta_k - \tilde{\lambda}_k(u_k(s))) ds)$, $t \geq 0$. Тогда справедлива оценка $\beta_k - \tilde{\lambda}_k(u_k(s)) \geq \beta_k - \tilde{\lambda}_k(P_k) = c_k > 0$, $0 \leq s < \infty$. Отсюда получаем неравенство $u_k(t) \geq (q_k + \varepsilon_k(t)) \exp(c_k t)$, которое противоречит предположению об ограниченности этой функции. ■

Лемма 2. Пусть уравнение (12) имеет корень $u_k^* > 0$. Тогда при любом начальном значении $u_k(0) = f_k(0) > 0$ решение $u_k(t)$ уравнения (13) таково, что существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_k(t) = u_k^*$.

Доказательство. Зафиксируем $\Delta t > 0$ и запишем, что

$$f_k(t + \Delta t)/f_k(t) = e^{\beta_k \Delta t} (q_k + \varepsilon_k(t + \Delta t))/(q_k + \varepsilon_k(t)) = e^{\beta_k \Delta t} + \varepsilon_{k0}(t),$$

где $\varepsilon_{k0}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{u_k(t + \Delta t)}{u_k(t)} &= \exp(\beta_k \Delta t) \exp\left(-\int_t^{t+\Delta t} \tilde{\lambda}_k(u_k(s)) ds\right) + \alpha_k(t) = \\ &= \exp\left(\int_t^{t+\Delta t} (\beta_k - \tilde{\lambda}_k(u_k(s))) ds\right) + \alpha_k(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\alpha_k(t) = \varepsilon_{k0}(t) \exp(-\int_t^{t+\Delta t} \tilde{\lambda}_k(u_k(s))ds)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_k(t) = 0$. Из (14) видно, что поведение $u_k(t)$ на некотором промежутке $[0, T)$, $0 < T < \infty$, может носить как монотонный, так и колебательный характер. Действительно, пусть $\alpha_k(t)$ достаточно мало, $t \in [0, T)$. Если $0 < u_k(t) < u_k^*$ при всех $0 \leq t < t + \Delta t < T$, то имеем, что $u_k(t + \Delta t)/u_k(t) > 1$ и $u_k(t)$ – возрастающая функция, $t \in [0, T)$. Если учитывать влияние слагаемого $\alpha_k(t)$, то, очевидно, $u_k(t)$ может пересекать уровень $u_k = u_k^*$ при некоторых $0 < t_* < T$. Аналогичные выводы справедливы и для случая, когда $u_k(t) > u_k^*$ при всех $0 \leq t < t + \Delta t < T$.

Покажем далее, что существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_k(t) = u_k^*$. Пусть t достаточно велико и $u_k(t) < u_k^*$. Может оказаться, что при всех $\Delta t > 0$ верно $u_k(t + \Delta t) \leq u_k^*$. Тогда $u_k(t + \Delta t)/u_k(t) > 1$ и, следовательно, указанный предел существует. Предположим теперь противное. Обозначим через $t + s_1$ момент первого пересечения функцией $u_k(t)$ уровня $u_k = u_k^*$, иначе, $u_k(t + s) < u_k^*$, $0 \leq s < s_1$, $u_k(t + s_1) = u_k^*$, $u_k(t + s) > u_k^*$, $s_1 < s \leq s_1 + s_2$, где $s_2 > 0$ – некоторое число. Из (14) получаем, что

$$\frac{u_k(t + s_1 + s_2)}{u_k(t + s_1)} = \exp\left(\int_{t+s_1}^{t+s_1+s_2} (\beta_k - \tilde{\lambda}_k(u_k(s)))ds\right) + \alpha(t + s_1) < 1,$$

откуда приходим к противоречию: $u_k(t + s_1 + s_2) < u_k(t + s_1) = u_k^*$. Аналогично рассматривается случай $u_k(t) > u_k^*$. Следовательно, если при достаточно больших t верно $u_k(t) < u_k^*$ ($u_k(t) > u_k^*$), то при всех $\Delta t > 0$ также верно $u_k(t + \Delta t) \leq u_k^*$ ($u_k(t + \Delta t) \geq u_k^*$). Отсюда вытекает существование $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_k(t)$, который, очевидно, равен u_k^* . Если же при некотором достаточно большом t окажется, что $u_k(t) = u_k^*$, то либо при всех $\Delta t > 0$ $u_k(t + \Delta t) = u_k^*$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_k(t) = u_k^*$, либо найдется такой $t_1 > t$, что $u_k(t_1) < u_k^*$ или $u_k(t_1) > u_k^*$, что сводится к ранее рассмотренным случаям. Это завершает доказательство леммы. ■

Теорема 4. Пусть для всех $1 \leq k \leq m$ верно $B_k > 1$ ($\beta_k > 0$) и уравнения (12) имеют корни $u_k^* > 0$. Тогда любое решение $x(t)$ системы (8) является ограниченным на $[0, \infty)$.

Доказательство. Зафиксируем индекс $1 \leq k \leq m$ и покажем ограниченность на $[0, \infty)$ k -ой компоненты решения $x_k(t)$ системы (8). Примем, что $x_k(0) > 0$, а $\nu_k(t)$ тождественно не равна нулю на $[0, \tau_k]$ (в противном случае ограниченность $x_k(t)$ следует из теоремы 3). Докажем, что для всех $0 \leq t < \infty$ верно неравенство $x_k(t) \leq u_k(t)$, где $u_k(t)$ – решение уравнения (13). Имеем, что $x_k(0) = u_k(0)$. Предположим, что существуют такие $0 \leq t_1 < \infty$, $s_1 > 0$, что выполнены соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq x_k(t) \leq u_k(t), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad x_k(t_1) = u_k(t_1), \\ x_k(t_1 + s) > u_k(t_1 + s), \quad s \in (0, s_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Перепишем (15), используя следующие выражения для $x_k(t_1 + s)$ и $u_k(t_1 + s)$:

$$x_k(t_1 + s) = \exp\left(-\int_{t_1}^{t_1+s} \lambda_k(x(a))da\right) x_k(t_1) f_k(t_1 + s) / f_k(t_1),$$

$$u_k(t_1 + s) = \exp\left(-\int_{t_1}^{t_1+s} \tilde{\lambda}_k(u_k(a))da\right) u_k(t_1) f_k(t_1 + s) / f_k(t_1).$$

Поскольку $x_k(t_1) = u_k(t_1) > 0$, $f_k(t_1 + s) / f_k(t_1) > 0$, то неравенство (15) равносильно тому, что

$$\exp\left(-\int_{t_1}^{t_1+s} \lambda_k(x(a))da\right) > \exp\left(-\int_{t_1}^{t_1+s} \tilde{\lambda}_k(u_k(a))da\right), s \in (0, s_1). \quad (16)$$

Из (15) и условия Н) следует, что $\lambda_k(x(a)) > \tilde{\lambda}_k(u_k(a))$ для всех $t_1 < a < t_1 + s_1$. Это противоречит неравенству (16). Поэтому для всех $0 \leq t < \infty$ верно $x_k(t) \leq u_k(t)$. Поскольку функция $u_k(t)$ имеет конечный предел при $t \rightarrow +\infty$, то она ограничена на $[0, \infty)$. Отсюда вытекает ограниченность решения $x(t)$ системы (8) на $[0, \infty)$. ■

3. Заключение

В работе рассмотрена интегральная модель Лотки – Вольтерра, построенная с учетом возрастной и плотностной структуры конкурирующих популяций. Приведенные выше результаты устанавливают общие свойства решений модели (1), которые указывают на корректность ее применения для описания динамики численности конкурирующих популяций.

При определенных условиях от уравнений интегральной модели можно перейти к модели в дифференциальной форме. Действительно, пусть для всех $1 \leq i \leq m$ $x_i(0) > 0$, $B_i > 1$ и $\nu_i(t)$, заданные формулами (9), тождественно не равны нулю на $[0, \tau_i]$. Следуя [2], примем, что $\varphi_i(a) = \varphi_i^*(a) = K_i \exp(-\beta_i a)$, $a \in [0, \tau_i]$, $K_i > 0$ – некоторый параметр, $\beta_i > 0$. Очевидно, что функция $y_i(t) = K_i \hat{\tau}_i \exp(\beta_i t)$, $t \geq 0$, является решением i -го уравнения (3), где $\hat{\tau}_i = \int_0^{\tau_i} R_i(s) \exp(-\beta_i s) ds$, $1 \leq i \leq m$. Подставляя $y_i(t)$ в уравнения (2) для $x_i(t)$ и находя производные, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \beta_i x_i(t) - \lambda_i(x(t)) x_i(t), \quad t \geq 0, \\ x_i(0) &= K_i \hat{\tau}_i, \quad 1 \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (17)$$

которая представляет собой один из вариантов обобщенной системы Лотки – Вольтерра [3]. Если $\varphi_i(a) \neq \varphi_i^*(a)$, $1 \leq i \leq m$, то при некоторых предположениях относительно функций выживаемости интегральная модель (1) может

быть приведена к системе неавтономных дифференциальных уравнений, которая отличается от (17) наличием дополнительных слагаемых, существенно влияющих на поведение решений. Отсюда следует, что интегральная модель Лотки – Вольтерра может иметь более разнообразное поведение решений, чем классическая модель, как на конечных промежутках времени, так и при $t \rightarrow +\infty$.

Одним из основных свойств решений модели является наличие положительных и устойчивых по Ляпунову стационарных решений, которым соответствует ситуация конкурентного равновесия видов. В рамках сделанных предположений указанные стационарные решения находятся как положительные корни системы уравнений $\beta_i - \lambda_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq m$. Существование и устойчивость таких решений в рамках интегральной модели (1) является предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перцев Н.В. *Об одном классе интегродифференциальных уравнений в моделях динамики популяций* // Математические структуры и моделирование / Под ред. А.К. Гуца. Омск: ОмГУ, 1998. Вып.1. С.72–85.
2. Перцев Н.В. *Исследование решений интегральной модели Лотки – Вольтерра* // Сибирский журнал индустриальной математики. 1999. Т.2. N.2(4). С.153–167.
3. Пых Ю.А. *Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики*. М.: Наука, 1983. 182 с.
4. Полуэктов Р.А., Пых Ю.А., Швытов И.А. *Динамические модели экологических систем*. Л.: Гидрометеониздат, 1980. 288 с.
5. Красносельский М.А. и др. *Приближенное решение операторных уравнений*. М.: Наука, 1969. 455 с.

МОДЕЛЬ РЕАКТОРА РИФОРМИНГА. I. КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПОЛИФУНКЦИОНАЛЬНОГО КАТАЛИЗАТОРА

О.А. Реутова, О.В. Ирискина

The mathematical (kinetic) model for the cascade from three reforming reactors is offered. The model takes into account Pt-catalyst polyfunctionality and allows to calculate temperature and concentration profiles

1. Введение

В процессе становления математического моделирования химических процессов возникли два пути получения математических моделей [1, 2]:

- на основе теории управления, отражающей на установлении зависимости между входными и выходными данными (переменными) с помощью статистических методов;
- на основе анализа механизма и кинетики физических и химических стадий сложного процесса.

Первый подход оказался неплототворным для анализа механизма химических реакций и решения конкретных задач проектирования химической аппаратуры. Второй путь позволил решить задачу масштабного перехода от лабораторных исследований к промышленным условиям и созданию наилучших конструкций реакторов.

Химический процесс и реактор являются сложными системами, имеющими разные уровни организации. На каждом уровне действуют свои законы, и поэтому их можно изучать вначале независимо.

Первой и основной моделью в системе частных моделей любого реактора является кинетическая – совокупность стадий реакций и уравнений, характеризующих зависимость скорости по стехиометрическому базису маршрутов от концентраций реагирующих веществ, температуры и давлений.

© 2000 О.А. Реутова, О.В. Ирискина

E-mail: reutova@univer.omsk.su

Омский государственный университет

Чем полнее кинетические данные, тем более достоверны предсказания о результатах протекания процесса и поведения реактора. Чтобы получить необходимый объем данных при исследовании скорости химической реакции, необходимо варьирование начального состава реагирующей смеси, что позволит проанализировать соответствующие концентрационные и температурные поля в промышленном реакторе.

2. О процессе каталитического риформинга

Каталитический риформинг - один из важнейших процессов современной нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности. Он широко используется в целях производства высокооктановых бензинов и индивидуальных ароматических углеводородов (бензола, толуола, ксилолов), а также для обеспечения водородом процессов гидроочистки нефтяных продуктов.

Наиболее широкое применение нашли процессы риформинга со стационарным слоем катализатора, при этом длительность межрегенерационного цикла составляет 0,5 - 1 год и более [3, 4].

Технологический процесс риформинга, основные реакции которого эндотермичны, осуществляются в адиабатических реакторах. Реакторный блок - это обычно каскад из трех или четырех последовательно работающих реакторов с промежуточным подогревом парогазовой смеси в трубчатой печи (рис. 1).

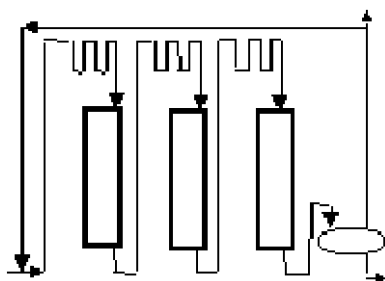


Рис. 1. Каскад реакторов риформинга

Температурные и концентрационные профили служат важной характеристикой работы реакционного блока, т.к. отражают кинетику протекания реакции на каждой ступени процесса.

Преимущественное протекание реакций дегидрирования нафтенов в первом реакторе вызывает наиболее резкое падение температуры в нем. Значительное развитие экзотермических реакций гидрокрекинга углеводородов приводит к наименьшему перепаду температур в последнем реакторе. С увеличением содержания нафтен в сырье возрастают температурные перепады в реакторах.

Основные проблемы моделирования данного процесса определены многокомпонентностью сырья и сложными механизмами каталитических реакций. Эти реакции требуют присутствия в катализаторе различных типов активных центров, что определяет полифункциональную природу нанесенных металлических катализаторов риформинга.

Для катализаторов риформинга с нанесенными на $\gamma - Al_2O_3$ высокодисперсными моно- (Pt) или биметаллическими ($Pt - Re, Pt - Sn, Pt - In$) частицами можно выделить три вида активных центров ($Pt^0, Pt^{\sigma+}, KЦ$ - кислотные центры носителя), на которых протекают лимитирующие стадии целевых реакций.

Предвидение поведения реактора возможно прежде всего на основе достаточно полной модели риформинга, что требует:

- решения проблемы агрегирования многокомпонентного бензинового сырья;
- подробной кинетической модели целевых реакций с учетом бифункциональной природы катализатора;
- расчета концентрационных и температурного профилей реактора.

3. Кинетическая модель целевых реакций платформинга

Химизм каталитического риформинга - это десятки реакций, протекающих одновременно, с различными скоростями и на различных центрах катализатора. Основные из них - дегидрирование нафтенных, изомеризация, циклизация и гидрокрекинг парафинов и других углеводородов. При этом характер химических превращений предопределяется свойствами применяемых алюмоплатиновых катализаторов:

- наличием у катализаторов двух функций - «металлической» и кислотной;
- различным электронным состоянием (Pt^0, Pt^{n+}) нанесенного металлического компонента.

Бифункциональность катализатора $Pt/\gamma - Al_2O_3$ проявляется в том, что отдельные стадии одной и той же реакции идут на различных активных центрах ($Pt^0, Pt^{n+}, KЦ$).

Предполагают, что «металлические» активные центры проводят реакции гидрирования, дегидрирования и активацию спилловера водорода, а носитель - реакции кислотно-основного типа, при этом реакции дегидроциклизации парафиновых углеводородов требуют одновременного присутствия Pt и $\gamma - Al_2O_3$. Имеются данные [5] о специальных активных центрах ароматизации парафиновых углеводородов - платине в электронно-дефицитном состоянии (Pt^{σ}).

Кинетические и специальные импульсные эксперименты позволили обосновать агрегированную по гомологическому признаку схему превращений, учитывающую участие каждого вида активных центров катализатора платформинга ($Pt^0, Pt^{\sigma}, KЦ$) [5] (рис. 2).

Эта схема превращений была принята для определения математической структуры модели, в основу которой положены зависимости, установленные при исследовании кинетики риформинга индивидуальных углеводородов [6] : скорость любой реакции (r_i) пропорциональна мольной доле (Y_i) соответствующего вещества в смеси только углеводородов (без учета водорода): $r_i = k_i Y_i$.

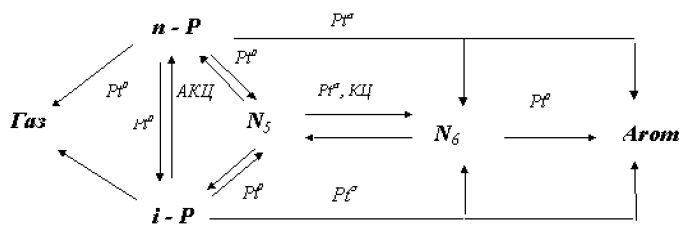


Рис. 2. Агрегированная схема превращения для реакций риформинга: где $n - P, i - P$ – парафины; N_5, N_6 – нафтены; $Arom$ – ароматика

4. Технологические параметры процесса для модели реактора

Исходя из промышленного опыта, реакционный блок, включающий три реактора, можно использовать при суммарном перепаде температур, не превышающем $\approx 120^\circ\text{C}$. Если же перепад температур существенно выше, то целесообразнее проводить процесс в четырехреакторном каскаде.

Решение вопроса о распределении катализатора между ступенями основано на анализе кинетики реакций и определяется выбором критерия оптимизации. Если максимизируется содержание ароматических углеводородов в катализате, то выгодным оказывается нарастание объемов катализатора от слоя к слою.

Для анализа модели заданы следующие технологические параметры:

температура на входе в реактора, $^\circ\text{C}$ – 500; 494; 498;

объемная скорость подачи сырья, час – 1 – 1,5;

кратность циркуляции – 1500;

плотность сырья, $\text{кг}/\text{м}^3$ – 700;

пределы выкипания сырья, $^\circ\text{C}$ – 62 – 105;

распределение катализатора в реакторах – 0,1:0,43:1.

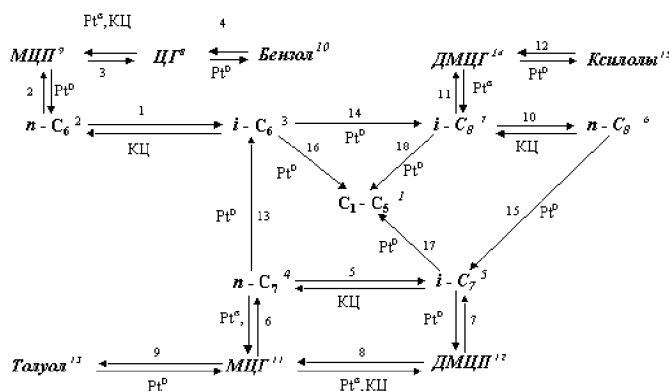
5. Количественный пример расчета для фракции 62 – 105 $^\circ\text{C}$

Применительно к компонентам сырья (фракция 62 – 105 $^\circ\text{C}$) представленную выше схему можно преобразовать (рис. 3).

По представленной схеме выписаны уравнения изменения концентрации углеводородов смеси (W_j) с учетом степени участия (S_i) в полифункциональном протекании реакции соответствующих активных центров: $W_j = \sum_j r_j S_i j$.

Для представленной модели разработана программа в ОФ ИК СО РАН, алгоритм которой представлен на рисунке 4.

Совместное численное решение уравнений по концентрации и температуре при заданных входных параметрах, а также значениях констант скоростей и энергий активаций позволяет получить профили в координатах «концентрация, температура – длина слоя катализатора» (рис. 5).

Рис. 3. Схема превращения для фракции 62 – 105⁰С

Как и отмечалось выше, в **первом** реакторе наблюдается наибольшее падение температуры (рис.6), обусловленное преимущественным протеканием в нем эндотермических реакций дегидрирования нафтенов. Это находит свое отражение практически в антибатном поведении резко выраженных концентрационных кривых для ароматических и шестичленных углеводородов. Одновременно наблюдается рост концентрации изопарафинов.

Во **втором** реакторе падение температуры также значительно вследствие продолжающихся реакций ароматизации и изомеризации углеводородов, причем концентрация последних на выходе из реактора достигает своего максимального значения.

В **третьем** реакторе получают значительное развитие экзотермические реакции гидрокрекинга углеводородов. Этот процесс определяется, прежде всего, изопарафинами, поскольку их концентрация на входе в третий реактор максимальна, которая, как следствие, резко падает к концу слоя. Перепад температур в реакторе - минимален. Продолжается рост концентрации ароматических углеводородов до максимального своего значения на выходе из реактора (рис. 6).

6. Компьютерный эксперимент по варьированию сырья

В реальных условиях на любой промышленной установке каталитического риформинга состав сырья меняется в довольно широких пределах. Данной проблеме посвящены специальные исследования по мониторингу промышленной установки Омского НПЗ, результаты которых будут опубликованы отдельно. Изменение состава сырья значительно влияет на выполнение задач риформинга - увеличения выхода риформата с заданным октановым числом. Поэтому для установления адекватности данной модели реальным условиям был проведен компьютерный эксперимент по варьированию состава сырья. Объектами исследования стали:

- прямогонный бензин фракции 62-105⁰С Новокуйбышевского НПЗ;

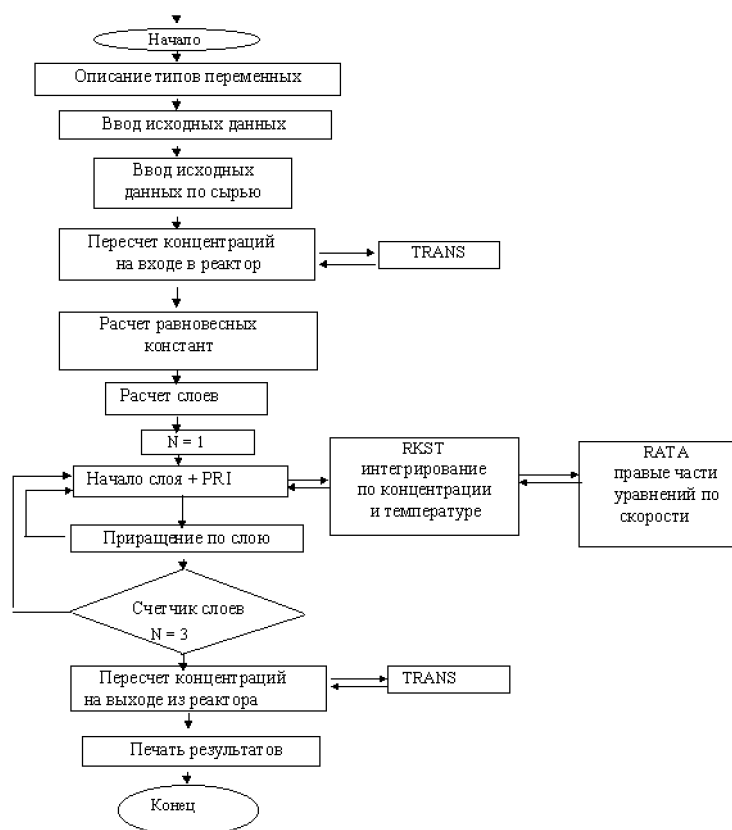


Рис. 4. Блок-схема программы для модели каскада из трех реакторов

- прямогонный бензин фракции 62-105⁰С Омского НПЗ.

Образцы значительно различались по содержанию нефтяных и ароматических углеводородов, при этом результаты модели - составы и качество продуктов удовлетворительно соответствуют промышленным данным.

7. Компьютерный эксперимент по варьированию входных температур

Процесс риформирования проводят в реакторе в интервале температур 480-530⁰С. С повышением температуры увеличивается жесткость процесса и ускоряются основные реакции. В литературе [3] уделено большое внимание влиянию температуры. Для установок каталитического риформинга, реакционный блок которых состоит из трех реакторов, известны следующие зависимости входных температур (⁰С):

- понижающаяся - 497; 502; 510;
- повышающаяся - 502; 502; 502;
- равная 515; 502; 480.

При использовании сложных критериев оптимизации (например, максимум содержания ароматики в катализате при заданном его выходе) обнаруживается слабая зависимость от последовательности входных температур. Так, по-

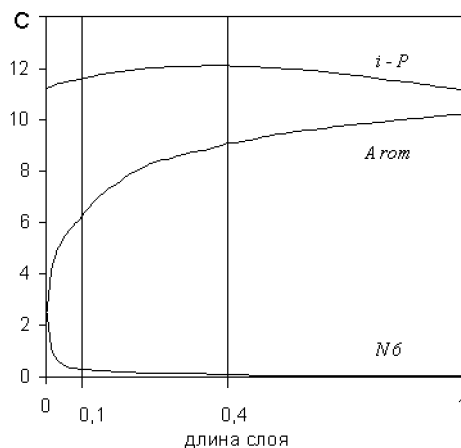


Рис. 5. Концентрационные профили в реакторе риформинга для ароматических, нафтовых и парафиновых углеводородов

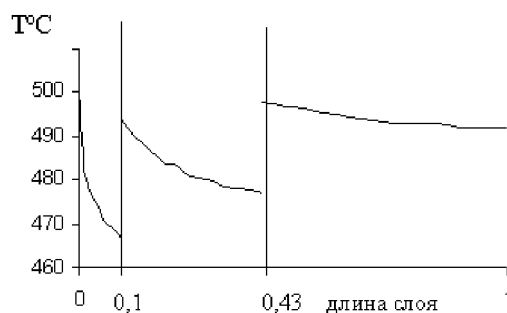


Рис. 6. Температурный профиль для каскада реакторов риформинга

вышающаяся и понижающаяся последовательности при $420^{\circ}\text{C} < T_{\text{ex}} < 520^{\circ}\text{C}$ обеспечивают примерно одинаковое значение критерия.

Проведенный эксперимент позволил выявить влияние всех трех зависимостей на выход ароматики и катализата в целом:

- наибольшее содержание катализата наблюдается при понижающейся температурной зависимости;
- наибольшее содержание в продуктах ароматики наблюдается при повышающейся температурной зависимости.

Таким образом, как и было показано выше, выбор того или иного температурного режима определяется поставленными целями процесса: для получения максимального содержания ароматических углеводородов оптимальной является повышающаяся, а для максимального содержания катализата — немонотонная зависимость входных температур.

8. Перспективы исследований

Наибольший интерес вызывает включение данной модели - как составляющей - в модель более высокого уровня, учитывающую дезактивацию полифункционального катализатора коксом, образующимся при переработке углеводородного сырья. При этом для модели реактора можно получить уже температурные и концентрационные поля в координатах «концентрация, температура - длина слоя катализатора, время процесса». Для модели данного уровня необходимо привлечь кинетические модели дезактивации коксом нанесенных алюмоплатиновых катализаторов риформинга [7]. Результаты моделирования будут представлены в последующей публикации.

Авторы благодарят профессора, д.т.н. Н.М. Островского (ОФ ИК СО РАН) за постановку проблемы, а также сотрудника ОАО «Омский НПЗ» Ю.Н. Коломыцева и к.х.н. К.С. Гуляева (ОФ ИК СО РАН) за консультативную помощь в работе.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997-2000 годы».

ЛИТЕРАТУРА

1. Слинко М.Г. *Кинетика и катализ*. 1972. N 3. С.566–580.
2. Жоров Ю.М. *Моделирование физико-химических процессов нефтепереработки и нефтехимии*. М.: Химия, 1978.
3. Маслянский Г.Н., Шапиро Р.Н. *Каталитический риформинг бензинов*. Л.: Химия, 1985.
4. *Промышленные установки каталитического риформинга* / Под ред. Г.А. Ластовкина. Л.: Химия, 1984.
5. Ostrovskii N.M., Demanov Yu.K., Duplyakin V.K. *The role of elektron-deficient platinum in the mechanism of paraffin dehydrocyclization* // Proceedings of first Russia-Japan joint symposium on petroleum, natural gas and petrochemistry «RUJAS'93» (August 24-28, 1993). P.175–176.
6. Sokolov V.P. *React. Kinet. Catal. Lett.* 1975. M.2. P.389.
7. Реутова О.А., Островский Н.М. *Кинетическая модель дезактивации коксом нанесенных алюмоплатиновых катализаторов* // Изв.ВУЗов, сер. Химия и хим. технология. 1993. Т.36. С.64.

МУЛЬТИ-АГЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ В *SWARM*

Ю.В. Фролова

In the paper the Swarm software for Multi-Agent Simulation is described

1. Введение

Компьютерные модели имеют много преимуществ по сравнению с другими подходами к исследованию социальных процессов. В частности, они дают возможность учитывать большое количество переменных, предсказывать развитие нелинейных процессов. Кроме того, они позволяют не только получить прогноз (он ведь нужен не сам по себе, а как информация для принятия решений), но и найти с помощью вычислительных экспериментов, какие управляющие воздействия приведут к наиболее благоприятному развитию событий. Таким образом, компьютерные модели социальных процессов и вычислительный эксперимент с этими моделями являются важным средством управления социальными процессами [2].

Под компьютерной моделью понимают [4]:

— условный образ объекта или некоторой системы объектов (или процессов), описанный с помощью взаимосвязанных компьютерных таблиц, блок-схем, диаграмм, графиков, рисунков, анимационных фрагментов, гипертекстов и т.д. и отображающий структуру и взаимосвязи между элементами объекта. Компьютерные модели такого вида называют структурно-функциональными;

— отдельную программу, совокупность программ, программный комплекс, позволяющий с помощью последовательности вычислений и графического отображения их результатов воспроизводить (имитировать) процессы функционирования объекта, системы объектов при условии воздействия на объект различных, как правило случайных, факторов. Такие модели называют имитационными.

Выделяются следующие функции моделей [1]:

— познавательная (дает возможность заглянуть в суть изучаемых явлений, лучше понять их);

© 2000 Ю.В. Фролова

E-mail: frolova@univer.omsk.su

Омский государственный университет

- прогнозирование;
- принятие решений (социальное планирование и управление социальными процессами);
- совершенствование измерения.

Моделирование представляет возможность нового мышления относительно социальных процессов, основанных на идеях о появлении сложного поведения из сравнительно простых действий [3].

Компьютерное моделирование — метод решения задачи анализа или синтеза сложной системы на основе использования ее компьютерной модели. Суть компьютерного моделирования заключена в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели. Качественные выводы, получаемые по результатам анализа, позволяют обнаружить неизвестные ранее свойства сложной системы: ее структуру, динамику развития, устойчивость, целостность и др. Количественные выводы в основном носят характер прогноза некоторых будущих или объяснения прошлых значений переменных, характеризующих систему [4]. Компьютерное моделирование является существенным средством для изучения глобального и адаптивного поведения, которое возникает в сложных системах.

Существует множество различных подходов к моделированию и пониманию социальных процессов. Развитие современных подходов к моделированию в социальных науках [3]:

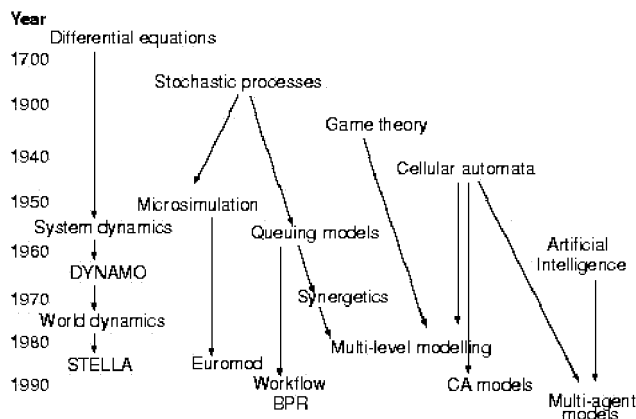


Рис.1

Остановимся на одном из них — мульти-агентном моделировании, используя специально разработанное инструментальное программное средство для построения мульти-агентных моделей Swarm.

2. Мульти-агентная система моделирования Swarm

Swarm - универсальный пакет для моделирования параллельно распределенного искусственного мира [7]. Главная часть Swarm это множество библиотек, располагающихся в исходной директории. Кратко, директория организована следующим образом:

- **lib, include, bin.** Установленные библиотеки, включающие файлы.
- **scr.** Swarm библиотека исходных файлов.

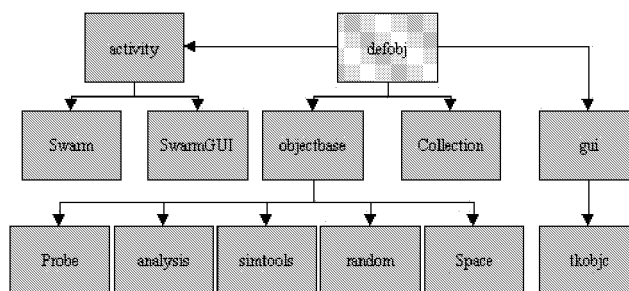


Рис.2

- **defobj.** Поддержка стиля Swarm Objective-C программированием;
- **Collection.** Коллекционная библиотека – различные объекты, которые «коллекционируют» другие объекты (Arrays, Lists и упорядоченные Lists объектов);
- **activity.** Спецификация выполнения механизма – «процесс» (Schedules, ActivityGroups и Swarms);
- **objectbase.** Базовый класс для имитированных объектов – «агенты»;
- **Space.** Библиотека пространственной среды (Управляет информацией для 2D решетки или сеток, в настоящее время главным образом поддерживаются 2-мерные пространства);
- **random.** Библиотека случайного числа (Генераторы и распределения произвольного числа);
- **simtools.** Собранные инструменты полезны для развития Swarm имитаций (Набор различных инструментальных средств);
- **gui.** Библиотека графического интерфейса;
- **tkobjc.** Объекты графического интерфейса;
- **analysis.** Объекты, которые помогают с обработкой данных (Более легкий интерфейс для графов, вычисления статистики);
- **Probe.** Расследование состояния и поведения объектов.

Swarm является системой, которая позволяет пользователям разрабатывать модели, включая множество агентов, взаимодействующих друг с другом в пределах некоторой среды. Цель Swarm состоит в том, чтобы уменьшить работу исследователям для построения и имитации искусственного мира и обеспечить стандартизованными инструментальными средствами для управления и анализа результатов моделирования. Ядро Swarm является объектно-ориентированным каркасом для определения поведения агентов и других объектов, которые взаимодействуют в моделировании. Термин «агент» относится к определяемому пользователем объекту в моделировании, который представляется фактической частью модели; объект относится к любому вычислительному объекту в системе, который может не быть частью фактически изучаемой модели (например, объект анализа, собирающий данные). Агенты обычно имеют следующие свойства [3]:

- автономность – агенты действуют самостоятельно, имея прямое управление

их действиями и внутренним состоянием;

— социальная способность – агенты взаимодействуют с другими агентами посредством некоторого «языка»;

— реактивность – агенты способны чувствовать свою среду (которая может быть физическим миром, виртуальным миром электронных сетей, или имитационным миром, включающим других агентов) и отвечать ей;

— действенность – реагируя на свою среду, агенты также способны взять инициативу, имея целеустремленное поведение.

Агент – просто более определенный термин, предназначенный для разъяснения структуры моделирования.

Моделируя процессы, которые происходят через множество параллельно взаимодействующих агентов в Swarm, исследователь, таким образом, моделирует параллельные процессы, которые происходят в некотором реальном или искусственном мире. Агенты связываются друг с другом и со средой посредством сообщения. Swarm содержит системную библиотеку, которая управляет динамическим списком объектов и оперирует сообщениями, проходящими между объектами. Каждый объект содержит некоторые локальные данные, а также спецификацию для них, чтобы среагировать на сообщения, которые посланы ему. Swarm также обеспечивает интерфейс пользователя и инструментальные средства анализа. Основное предположение в пределах данного прототипа Swarm – понятие времени. Текущая система использует дискретное время, планируя алгоритм всякий раз, когда каждый объект принимает сообщение «шаг», направляющие агента выполнить некоторое действие.

Объект в Swarm имеет три основных характеристики: Имя, Данные, и Правила. Имя объекта состоит из уникальной идентификации (ID), которая используется, чтобы послать сообщения на объект, типа (в текущей реализации это символьная строка), и модульного имени (какое, вместе с типом, может быть продуманным как имя класса). Данные являются локальными данными, которые пользователь хочет иметь на агента (например, внутренние состояние переменных). Правила – набор функций, которые обрабатывают любые сообщения, которые посланы объекту, включая сообщение «шага».

Абстрактная модель Swarm – параллельно объектная система, в которой все объекты могут быть непрерывно активными. Объекты Swarm организовываются в иерархию subswarms. Каждый swarm является совокупностью агентов и связанных объектов, а также включает планирование, рассматривающее действия для своих агентов, которые должны быть выполнены [7].

3. Heatbugs – программа демонстрации Swarm

Программа heatbugs — простая демонстрационная модель Swarm, пример того, как простые агенты, действующие только на локальной информации, могут произвести сложное глобальное поведение.

Представьте себе, что Вы хотите смоделировать жуков, которые:

— испускают тепло (или некоторый другой способный рассеиваться фактор) в свою окружающую среду, по мере того, как они двигаются;

- имеют встроенную «идеальную температуру», в которую они должны предпочесть погружаться (то есть, они должны предпочесть иметь среду вокруг себя с этой температурой);
- имеют сенсор, который позволяет им чувствовать сумму тепла, исходящего от их местной окружающей среды в различных направлениях;
- имеют механизм, который позволяет им вычислять, в каком направлении окружающая температура ближе к их идеальной температуре;
- имеют механизм, который позволяет им перемещаться (в конечном темпе), например, в направлении по отношению к желаемой температуре.

Вы хотите смоделировать разнородных жуков, при этом каждый жук имеет:

- собственную идеальную температуру (из некоторого диапазона значений);
- степень распространения собственного тепла (из некоторого диапазона значений).

Окружающая среда, в которой живут жуки, имеет две основные характеристики:

- тепло рассеивается одинаково во всех направлениях, в норме, пропорционально разнице тепла между точками;
- тепло испаряется в норме, пропорционально сумме тепла.

Поведение жуков находится под влиянием их местной среды, в которую они пытаются переместиться по отношению к температуре, которая ближе к их идеальной температуре. Но также, жуки «изменяют» свою окружающую среду и среду других жуков вокруг себя. Например, жук может находиться в точке, имеющей температуру, которая соответствует его идеальной температуре, но только находясь там, жук сам изменит окружающую среду, поскольку он выделяет тепло, другие жуки могут переместиться в область, следуя своим собственным тепло-механизмам, и снова изменять среду для однажды счастливого жука.

Предполагается:

- 1) N жуков живут на 2-мерной квадратной решетке, размером $X \times Y$. Не более чем один жук может занять ячейку в одно и то же время;
- 2) Время дискретно. На каждом шаге происходит множество изменений, то есть жуки перемещаются, тепло рассеивается и испаряется;
- 3) Каждая ячейка в мире в настоящий момент имеет конкретное количество тепла. Тепло рассеивается синхронно между более соседними (8) ячейками, и тепло испаряется из каждой ячейки. В частности, правило обновления тепла в ячейке: $H(t+1) = e * (H(t) + k(AvgH(t) - H(t)))$, где e – степень испарения (0..1); k – степень распространения (0..1); $AvgH$ – среднее число H в 8 соседних ячейках.

Также предполагается, что каждый жук:

- 1) создается с фиксированной идеальной температурой (*idealTemperature*), выбранной произвольно из фиксированного диапазона;
- 2) создается с фиксированным выходным теплом (*outputHeat*), выбранным произвольно из фиксированного диапазона;
- 3) получает самое большое один шанс для того, чтобы переместиться в каждый

шаг времени. Он перемещается в соседа, который имеет температуру, самую близкую к его собственной идеальной температуре. Тем не менее, каждый жук также имеет вероятность того, что он перемещается в произвольного соседа, вместо «рационального» перемещения;

4) выдает тепло в ячейку, которую он занимает, за каждый шаг времени;

5) имеет «недовольство» (*unhappiness*), оценивая свою собственную ситуацию, то есть функцию тепла в ячейке, которую он занимает, и идеальную температуру. В частности: $U = \text{abs}(H - I) / \text{max}(H)$, где U – недовольство (*unhappiness*), H – тепло в настоящее время в ячейке, которую он занимает, I – идеальная температура агента, и $\text{max}(H)$ – максимально возможное значение тепла [5].

После запуска модели на компьютере на экране появляются три окна:

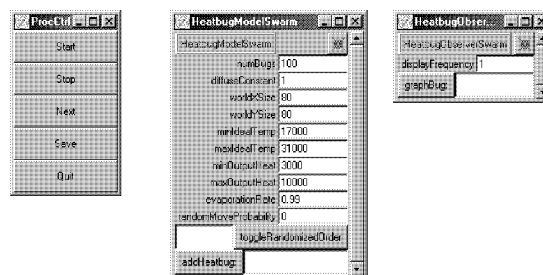


Рис.3

1. Контрольная панель, с кнопками:

Start – запускает выполнение модели (то есть дает поток времени);

Stop – останавливает модель (останавливает течение времени);

Next – передает шаг (после Stop нажмите дважды);

Save – сохраняет позицию окон;

Quit – выход из программы.

2. Окно HeatbugModelSwarm, которое позволяет управлять начальными параметрами модели (перед первым запуском).

numBugs	—	число жуков;
diffuseConstant	—	контрольная степень распространения тепла;
	0	нет распространения,
	1	максимальное «реальное» распространение,
	> 1	создание тепла из ничего!
evaporationRate	—	контрольная степень испарения тепла;
worldXSize	—	ширина решетки;
worldYSize	—	высота решетки;
minIdealTemp	—	min/max диапазон температур, используется
maxIdealTemp		для произвольного выбора, когда жуки
		создаются;
minOutputHeat	—	min/max диапазон выходного тепла,
maxOutputHeat		используется для произвольного выбора,
		когда жуки создаются;

`randomMoveProbability` — вероятность жука переместиться наугад (каждый шаг).

3. Окно `HeatBugObserverSwarm`.

После нажатия `start` появятся два больших окна.

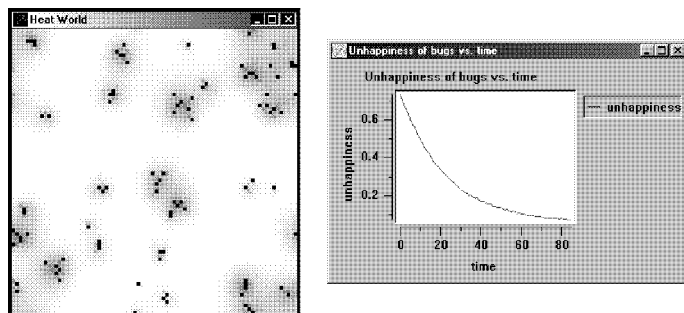


Рис.4

Первое — 2-мерное растровое изображение жуков (темные квадраты), перемещающихся в 2-мерном торе, вместе с (через некоторое время) уровнем температуры в различных местах (более серые означают более горячие). Второе — график среднего недовольства относительно времени.

Наблюдая за ходом развития процесса, можно увидеть, что большинство жуков группируются, и затем тепло начинает накапливаться в этих областях. Сначала среднее недовольство будет падать, а затем выравниваться, впоследствии повышаться.

Можно остановить модель и запустить снова, а затем выполнить ее с другими значениями параметров (например, количество жуков, диапазон температуры или выходного тепла, `diffusionConstant`, и т.п.)

Таким образом, `Swarm` обеспечивает структуру (каркас), чтобы управлять агентами и средой, а также инструментальными средствами анализа для диалогового экспериментирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бартоломью Д. *Стохастические модели социальных процессов*. М.: Финансы и статистика, 1985.
2. *Опыт моделирования социальных процессов*. Киев, 1989.
3. Gilbert, G. Nigel. *Simulation for the social scientist* / Gilbert and Klaus G. Troitzsch 1999.
4. Бахвалов Л.А. *Компьютерное моделирование: долгий путь к сияющим вершинам* // Компьютерра. 1997. N 40. С.26–36.
5. *University of Michigan (Computer Lab)*
<http://www.pscs.umich.edu/LAB/Doc/SwarmStuff/intro-heatbugs.html>
6. Телеконференция *simsoc* в Интернет. <http://www.mailbase.ac.uk/lists/simsoc/>
7. *Swarm Development Group (SDG)* <http://www.swarm.org/community.html>

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ РЕСУРСОБЕСПЕЧЕНИЯ МУЖЧИН НА ПОВЕДЕНИЕ ЖЕНЩИН

Ю.В. Фролова, В.В. Коробицын, А.А. Лаптев

This paper is devoted to idea of modeling and simulation of women's behavior in various situations. The environmental resources distribution influence upon type of forming the family. Simulation modeling was used to confirm this hypothesis.

1. Введение

В социологическом исследовании актуальным вопросом является изучение семьи и гендерных отношений как объектов моделирования. Идея сравнить поведение женщины в различных ситуациях предполагает выявить типы поведения, влияющие на выбор того или иного действия.

Работа посвящена построению математической модели влияния ресурсообеспеченности мужчин на поведение женщин и образование семьи. Для подтверждения модели использовалось имитационное моделирование. Существует несколько современных подходов для имитации социальных процессов. При проектировании модели и проведении компьютерного эксперимента мы применяем мульти-агентный подход. Для реализации используется мульти-агентная система моделирования Swarm.

Мульти-агентное (multi-agent) моделирование - это моделирование глобального поведения системы на основе локальных взаимодействий участников (агентов) системы. Агенты могут представлять растения и животных в экосистемах, машины на дороге, людей в толпе или автономные характеристики в играх. Эти модели обычно состоят из среды или каркаса (сетки), в которых происходят взаимодействия некоторого количества агентов, определенные условиями поведения (процедурных правил) и заданными параметрами. В мульти-агентной модели характеристики каждого агента отслеживаются во

времени. Этот подход моделирования отличается от подходов, где моделируются глобальные усредненные характеристики для целой системы. Мульти-агентное моделирование – это исследование поведения конкретных агентов – частиц системы.

В некоторых мульти-агентных моделях используются пространственные характеристики, когда агент связывает свое поведение со своим (геометрическим) положением в пространстве и имеет возможность передвигаться в окружающей среде. Это могло бы быть естественной моделью, например, для животных при моделировании экологических систем. В то время как растения при таком моделировании не были бы подвижными. Некоторые мульти-агентные модели не используют геометрических характеристик, например, моделирование компьютерной сети может основываться на моделях сетевых компьютеров, но их позиция не влияет на реализацию. Модели, использующие пространственные характеристики, могут иметь непрерывное пространство или дискретное (сетка).

Компьютерные эксперименты при мульти-агентном моделировании включают три основных компонента: агенты, окружающая среда или пространство, и правила взаимодействия. Агенты - «люди» искусственно созданных обществ. Каждый агент имеет внутреннее состояние и правила поведения. Некоторые состояния агентов фиксированы до тех пор, пока они не изменятся посредством взаимодействия с другими агентами или с внешней окружающей средой. Например, в модели, которая будет описана ниже, пол агента и показатель изменения ресурсов фиксированы.

Жизнь в искусственном обществе происходит в окружающей среде. Это может быть, например, ландшафт, топография возобновляемого ресурса, который агенты поглощают и производят. Такой ландшафт смоделирован в виде решетки ресурсов - набор узлов. Однако, окружающая среда, посредством которой агенты взаимодействуют, может иметь более абстрактную структуру. Таким образом, имеются правила поведения для агентов и для узлов (мест) окружающей среды. В итоге, необходимо задать следующие правила взаимодействия: агент - окружающая среда, агент – агент, окружающая среда - окружающая среда.

2. Формализация модели

На данном этапе построена исследовательская компьютерная модель, представляющая собой модель взаимодействия мужчин и женщин (агентов) в среде, характеризующейся распределением ресурса.

Главным фактором поведения агентов-женщин является поле ресурса, образованное за счет дохода агентов-мужчин. В результате моделирования получается определенная картина, показывающая следствие локального взаимодействия агентов. Считаем, что образовалась семья, если агент-мужчина и агент-женщина находятся в соседних клетках, и с течением времени их позиции в среде не изменяются.

Случайным образом задаются положение агентов-мужчин, их первоначальный запас данного ресурса и коэффициент естественного расхода наличного ресурса. С учетом величины капитала агентов-мужчин происходит распределение ресурса в окружающем их пространстве. Начальная позиция агентов-женщин в среде задается случайным образом. С течением времени координаты агентов-мужчин не изменяются, а агенты-женщины двигаются по определенному правилу.

Предполагается, что в рамках данной модели агенты женского рода стремятся продвинуться в направлении скопления ресурса, который жестко связан с положением агентов-мужчин. При этом локальный максимум капитала приходится на клетку, занятую агентом-мужчиной, поэтому агенты-женщины должны останавливаться в близкой окрестности агентов-мужчин. Так как первоначальное распределение ресурса среди агентов-мужчин различно, то агенты-женщины должны стремиться к самым богатым, ориентируясь на мощное поле ресурсов вокруг агентов-мужчин. Если клетка, в которой располагается агент-женщина, лучше в отношении ресурсообеспечения по сравнению с соседними, то агент-женщина не изменяет своего положения.

С течением времени величина капитала изменяется под влиянием поведения агентов. Если в клетке находится агент-мужчина, то в ней происходит естественный рост и расход ресурса (мы можем влиять на соотношение роста и спада капитала). Агент-женщина поглощает определенное количество ресурса в клетке, где она находится. Происходит дальнейшее распределение («расплывание») окружающего агентов пространства ресурса. Вследствие регулярного изменения окружающего агентов поля ресурса, агенты-женщины находятся в постоянном движении, наличие капитала агентов-мужчин меняется. Итогом моделирования является эволюция образования семей.

3. Реализация модели

Поле ресурса описываем функцией $u(x, y, t) : U \times R^+ \rightarrow R^+$, где $U \subset R^2$ — область моделирования. Пусть $U = [0, 1] \times [0, 1]$. Динамику изменения функции $u(x, y, t)$ опишем дифференциальной краевой задачей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \Delta u + \beta u - \gamma u^2 + \delta, \quad (x, y) \in U \setminus \partial U, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y),$$

$$\begin{cases} u(x, 0, t) = u(x, 1, t), \\ u(0, y, t) = u(1, y, t). \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение параболического типа описывает процесс распространения ресурсов в U . Тип уравнения выбирается по аналогии с распространением энергии, тепла и вещества в уравнениях математической физики [1].

Начальные данные задаются ненулевыми в окрестностях нахождения агентов-мужчин

$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_i(x, y), & \text{если } (x, y) \text{ находится в окрестности } O_i(x, y) \\ & \text{агента-мужчины,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Краевые условия в данной задаче замыкают пространство решений на двухмерном торе.

Константа $\varepsilon > 0$ — скорость распространения ресурсов.

Функции, входящие в уравнение:

рост и потребление ресурсов агентами

$$\beta(x, y) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1, & \text{если в } (x, y) \text{ находится агент-мужчина,} \\ \beta_0 - \beta_2, & \text{если в } (x, y) \text{ находится агент-женщина,} \\ \beta_0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

потребление ресурсов, связанное с перенасыщением i -го агента-мужчины

$$\gamma(x, y) = \begin{cases} \gamma_i, & \text{если в } (x, y) \text{ находится } i\text{-й агент-мужчина,} \\ \gamma_0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

источник дополнительных ресурсов агентов-мужчин

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \delta_0, & \text{если в } (x, y) \text{ находится агент-мужчина,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Направление перемещения агентов-женщин опишем функцией $m = (m_x, m_y)$, $m : U \rightarrow B^2$, где B^2 -шар в R^2

$$m_x = \left(\frac{\nabla u(x, y)}{|\nabla u(x, y)|}, h_x \right), \quad m_y = \left(\frac{\nabla u(x, y)}{|\nabla u(x, y)|}, h_y \right),$$

h_x, h_y — векторы, направленные вдоль осей Ox, Oy соответственно, и длиной, равной шагу перемещения.

4. Компьютерный эксперимент

Построенная модель реализована на языке Objective-C в мульти-агентной системе моделирования Swarm. Возможности встроенного графического интерфейса пользователя в данном пакете позволяют визуально наблюдать за ходом развития процесса. С помощью специального инструментария, содержащегося в основных библиотеках, мы выводим на экран анимационную картину. Выводится среда исследования (сеточная область), на которой располагаются и перемещаются агенты, а также отображается величина ресурса в каждой ячейке. Клетки, содержащие агентов-мужчин и агентов-женщин, окрашены в разные цвета. Степень распределения ресурса в среде различается по цветовой гамме:

чем больше капитал ресурса, тем ярче цвет. Таким образом, мы можем выявить агентов-мужчин с большим ресурсом, основываясь на окружающем его «ореоле». Имитацию процесса можно наблюдать как в непрерывном, так и в пошаговом развитии. В любой момент времени можно узнать величину наличного ресурса агента-мужчины, расположение агентов, вызвав вспомогательное графическое окно на каждого агента. Изменяя в данном окне значение параметров, мы имеем возможность переместить любого агента, поменять его характеристики.

При первоначальном запуске программы-модели появляется пользовательская панель управления, позволяющая переключать режимы работы (остановка, непрерывное и пошаговое развитие, сохранение любого этапа исследования), панель начальных данных модели, где отображаются коэффициенты и начальные значения параметров, которые исследователь может установить.

Для описанной выше модели проведены компьютерные эксперименты и подобраны коэффициенты, при которых поведение агентов согласуется с формализацией реализуемого социального процесса. Рассматривалось поведение агентов при образовании семьи. Определялись параметры, которые влияют на количество созданных семей, продолжительность существования семьи, конечное распределение ресурса, тип поведения агентов.

Экспериментально выявлены три типа поведения агентов и соответствующие им формы семьи. Они зависят от потребностей женщин в ресурсах и от возможностей мужчин обеспечить их этими ресурсами.

Первый тип образуется, когда возможность мужчин в обеспечении ресурсами примерно равна среднему уровню потребности женщин, в этом случае образуются стабильные семьи, состоящие из двух агентов разного пола, например, моногамные семьи.

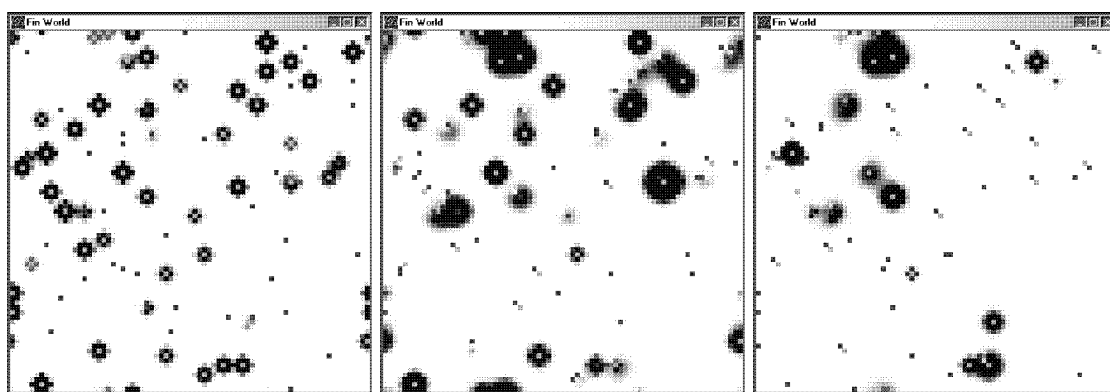


Рис.1. Стадии развития моногамных семей

На рисунке 1 мы видим три стадии развития социума: начальную, промежуточную и финальную. В начальной стадии агенты располагаются случайным образом. Светлые точки — агенты-мужчины, темные — агенты-женщины. Вокруг агентов-мужчин образован темный «ореол», характеризующий наличие ресурсов. Через некоторый промежуток времени (на промежуточной стадии)

видно: уменьшение ресурса у одних агентов-мужчин и увеличение у других, перемещение агентов-женщин ближе к ресурсообеспеченным агентам-мужчинам, образование нескольких семей. В этих семьях устанавливается баланс роста и потребления ресурса. В финальной стадии практически все агенты образовали моногамные семьи.

Второй тип поведения наблюдается в случае, когда потребности женщин существенно превышают средний уровень обеспечения ресурсами мужчин. При этом, даже если семьи и образуются, то они существуют непродолжительное время, а в большинстве случаев вообще не возникают. Такой тип поведения можно охарактеризовать термином «парная семья». «Парная семья - известное соединение отдельных пар на более или менее продолжительный срок» [2, с. 50]. «Парная семья, сама по себе слишком слабая и слишком неустойчива» [2, с. 52].

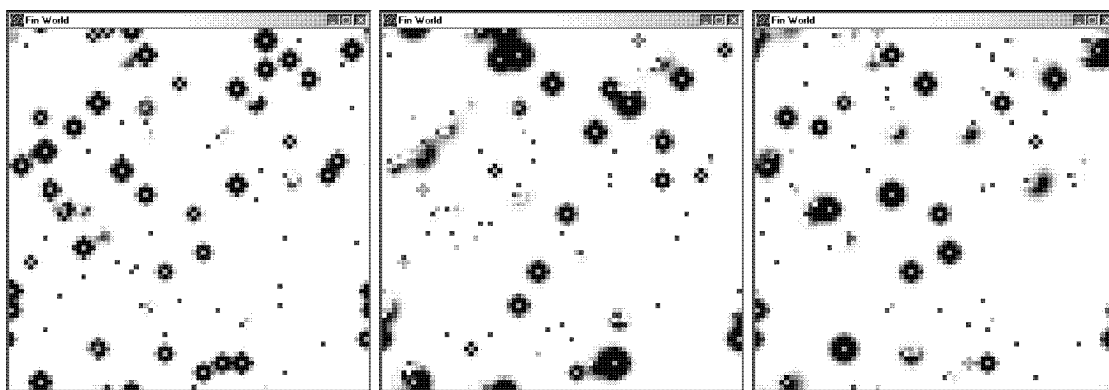


Рис.2. Стадии развития «парных семей»

В финальной стадии (рис. 2) видно отсутствие стабильных семей. При непрерывном наблюдении за процессом развития социума заметно образование и распад кратковременных семей.

Третий тип возникает тогда, когда возможность мужчин в обеспечении ресурсами превышает средний уровень потребности женщин, в этом случае образуются семьи, прототипом которых являются, например, полигамные семьи (полигиния), в которой один мужчина может обеспечить своими ресурсами существование нескольких жен.

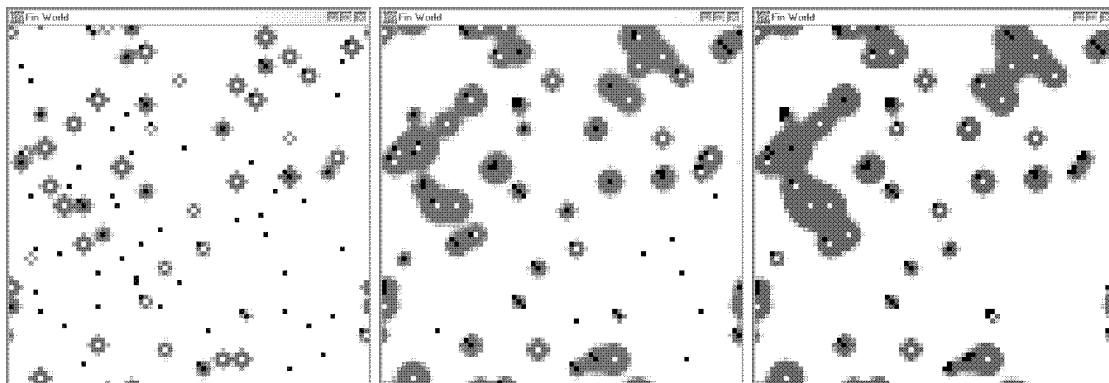


Рис.3. Стадии развития полигамных семей

На рисунке 3 в финальной стадии изображены полигамные семьи. Вокруг агентов-мужчин скапливаются несколько агентов-женщин.

5. Заключение

Разработана модель влияния ресурсообеспеченности мужчин на поведение женщин и образование семьи. Проведена серия компьютерных экспериментов с целью определения типов поведения. Были выявлены три типа и соответствующие им три формы семьи, которые могут быть интерпретированы как моногамные, парные и полигамные. Эти формы хорошо согласуются с формами семей, описанных в работе [2]. Это дает основание полагать, что данная модель хорошо описывает влияние отношения общего ресурса, которым обладают мужчины, к общим потребностям женщин на формы образования семьи и типы поведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1977.
2. Энгельс Ф. *Происхождение семьи, частной собственности и государства* / Маркс К., Энгельс Ф. Сочинения. М., 1961. Т.21.
3. Epstein J.M., Axtell R. *Growing Artificial Societies*. Washington, Brookings Institution Press, 1996.
4. Смелзер Н. *Социология*. М.: Феникс, 1994.
5. Телеконференция *simsoc* в Интернет. <http://www.mailbase.ac.uk/lists/simsoc/>

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОРГАНИЗАЦИИ ОДНОГО СОЦИАЛЬНОГО МОНИТОРИНГА*

А.К. Гуц, Р.Т. Файзуллин

This article is publication of scientific report which was done for Omsk Center of humanitarian, social, economic and political investigations in 1996. The purpose of given work was search of mathematical basis for «non-representative» selection of information, which could be used for social monitoring in Omsk city

ВВЕДЕНИЕ

Для организации социального мониторинга в г.Омске необходимо получать значения наиболее важных для жизни города социально-экономических показателей. Для этого, как правило, проводятся социологические исследования, основанные на выборочных опросах населения. Опрашивается только часть жителей города. В результате опросов в распоряжение исследователя поступают так называемые *статистики*, являющиеся некоторыми производными числовыми характеристиками от выборочных данных. Например, среднее значение энергопотребления для тех жителей, которые были опрошены. Это выборочное среднее. Можно ли по нему судить о среднем значении энергопотребления всех жителей города? Такие вопросы являются стандартными для статистиков. Правильный ответ зависит от методики организации опроса, и, в частности, от того, какая часть населения была вовлечена в опрос и в какой мере эта часть населения *представляет* настроения основной массы жителей. Идея *представительности* (или «по-ученому» *репрезентативности*) – наиболее живучая в социологических исследованиях. О ней все время говорят, о ней никогда не

*Работа выполнена по заказу Центра гуманитарных, социально-экономических и политических исследований (г.Омск) в 1996 г.

© 2000 А.К. Гуц, Р.Т. Файзуллин

E-mail: guts@univer.omsk.su, fz@univer.omsk.su

Омский государственный университет

забывают при проведении исследований и, тем не менее, она является наиболее неформализуемой на современном уровне социологической науки, и в силу этого именно с ней связаны главные провалы социологических прогнозов.

ГЭПИЦентр предложил следующую методику проведения мониторинга. Город разбит на 447 участков, которые городские власти определили из каких-то своих соображений с целью проведения выборов. Была проведена серия выборов, на основе которых определены 15 различных показателей $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$ (активность избирателей, процент голосов за лидера и т.д.), каждый из которых имеет числовую характеристику для любого из 447 участков. Затем, опираясь на эти данные [1, 9], были отобраны пять специально *выделенных* участков (около 5000 избирателей) для проведения будущих опросов, в результате которых получаемые выборочные среднее и дисперсия будут использоваться как *оценки* соответствующих городских показателей (телефонизация, энергопотребление и др.), предлагаемые властям для реализации задач по управлению городом.

ГЭПИЦентр выделил пять участков на основе кластерного анализа данных $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$ следующим образом. Берутся участки i , для которых самыми большими по модулю являются коэффициент корреляции и коэффициент близости по Cousine (?) [1]. Такими оказались участки $i = 52, 219, 281, 375, 411$.

Насколько удачен такой выбор? ГЭПИЦентр пытается показать, что статистически значимо с уровнем доверия в 95 % утверждение, что выборочное среднее для других тестов X (телефонизация, энергопотребление и др.) по пяти участкам

$$\frac{1}{5}(x_{52} + x_{219} + x_{278} + x_{372} + x_{408}) = \frac{1}{447}(x_1 + \dots + x_{447}), \quad (0.1)$$

где $X^{(j)} = (x_1, \dots, x_{447})$, то есть равно «городскому среднему» (см. [1]).

На основании такой оценки городского среднего ГЭПИЦентр предполагает возможным в будущем делать замеры только на указанных пяти участках и полученные статистики (оценки городского среднего) использовать в управлении городом.

По сути дела, проделанная ГЭПИЦентром работа – это: 1) формулировка идеи методики проведения мониторинга – «идея пяти участков», 2) ее апробация на некоторых социально-экономических показателях (тестах).

Возникают вопросы:

1) Насколько можно доверять тому способу разбиения на участки, который применяется городскими властями?

Хотя это дает возможность удешевлять обследования за счет того, что в распоряжении исследователей поступают регулярно обновляемые списки избирателей, составляемые властями под контролем Закона о выборах, тем не менее, сам способ разбиения может приводить к тому, что наравне с однородными по социальному составу участками имеются участки совершенно неоднородные. В какой мере это отразится на результатах мониторинга? Методика мониторинга должна гарантировать, что указанные моменты не отразятся на конечном результате.

2) Насколько корректен выбор 5 участков? Известно, что кластеризация сильно зависит от выбора метрики, лежащей в основе ее метода. Более того, сама кластеризация ГЭПИЦентра неадекватно отражает идею близости выборочного среднего к среднегородскому (см. Заключение).

3) Насколько корректно проверялась гипотеза (0.1)? ГЭПИЦентр использовал критерий Стьюдента, а он требует нормальности от X , которая в свою очередь подлежит проверке.

4) Каков доверительный интервал для «городского среднего», оцениваемого по выборочному среднему для пяти участков?

5) И самое главное. Будем исходить из того, что 5 участков выбраны и для 15 показателей гипотеза (0.1) верна. Делается стратифицированная выборка только в 5 указанных участках для нового «чисто экономического» 16-го показателя X . Будет ли гипотеза (0.1) верна для X ? и почему?

ГЭПИЦентр предложил нам:

1) вывести и математически обосновать теоретические доверительные интервалы для статистик из отчета [1];

2) апробировать полученные доверительные интервалы на данных из отчета [1];

3) в случае неудачи в пункте 2) разобраться с методом выделения 5 участков, примененным в отчете [1].

Ниже мы решаем поставленные задачи. Но, по существу, делается большее: на основе выборочных данных ГЭПИЦентра проводится исследование жизнеспособности самой методики ГЭПИЦентра, в основе которой предположение о возможности оценивать «чисто экономические» показатели через «чисто политические», опираясь на «политизированные составляющие» этих «чисто экономических» показателей.

Данные ГЭПИЦентра, а это выборки, отражающие несколько выборных кампаний, проведенных в г.Омске, послужили для нас экспериментальной основой к проведению исследований вполне определенного среза реакций взрослого населения миллионного оборонно-промышленного города. Это не выборка, связанная с прогнозированием результатов голосования или возможных (но *не обязательно реализующихся!*) действий людей по тому или иному поводу. Это числовые данные, отражающие *действительные реакции людей в момент истины*, когда происходит само действие, а не регистрируется имитация действия, столь характерная для человека в том случае, когда он оказался в сфере внимания либо социологов, либо журналистов, либо представителей власти. Тем самым методика ГЭПИЦентра – это опора на единственно, что может быть достаточно надежным при проведении любых выборов, – на объективные данные (мы исключаем случай фальсификации результатов голосований), *представляющие* базовые экономико-политические показатели $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$ (активность избирателей, процент голосов за лидера и т.д.). Это дает надежду, что анализ других показателей, спроецированных на «политическое пространство»,

порожденное показателями $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$, унаследует какую-то часть «момента истины», заключенного в этих пятнадцати, и поэтому будет объективным и достоверным, но, естественно, на протяжении лишь вполне определенного времени, мера которого тем длиннее, чем стабильнее общество.

Глава 1

АНАЛИЗ СТАТИСТИК И ДЕТЕРМИНИСТСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ

По представленным ГЭПИЦентром результатам голосований [10], точнее, по данным первичной социологической обработки результатов голосований, были проведены дополнительно к документу [1] исследования по оценке и апробации алгоритма выбора «репрезентативных» избирательных участков, то есть специально отобранных для «для организации социального мониторинга в социально-трудовой сфере».

Каждый показатель – это вектор размерности 447. Рассматривались 15 векторов $X^{(j)}$, каждый размерности $K = 447$, где 447 – это число избирательных участков города Омска. Каждый из векторов отражает определенную характеристику результатов голосования (например, активность на данных выборах, голосование за лидера и т.п.). Часто вектор $X^{(j)}$ будем называть j -м тестом. Совокупность векторов $X^{(j)}$, $j = 1, \dots, 15$ представляют выборочные данные, которые и были подвергнуты математическому анализу.

1.1 Стандартная обработка данных и проверка гипотез о нормальности распределения

Для каждого вектора $X^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, k = 15$, который в дальнейшем мы называем тестом,

$$X^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_{447}^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

было найдено городское среднее

$$\bar{X}^{(j)} = \frac{1}{447} \sum_{i=1}^{447} x_i^{(j)}$$

и (несмещенное) среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_{(j)}^2 = \frac{1}{446} \sum_{i=1}^{447} (x_i^{(j)} - \bar{X}^{(j)})^2.$$

Отметим, что мы не включаем в рассмотрение численность зарегистрированных избирателей на участке, как равноправную рассматриваемым нами производным величинам от результатов голосования.

В формировании избирательных участков изначально присутствует произвол, или, иначе говоря, *формирование группы из пяти участков, проведенное ГЭПИЦентром, это один из удачных, но не единственный* способ агрегирования данных. Таким образом, рассмотрение численности избирателей было бы классическим примером артефакта. Конечно, плотность населения на участке или, более общо (и туманнее), степень урбанизации правомерно включать в рассмотрение, но получение подобных данных требует самостоятельных теоретических и полевых исследований.

Каждый вектор-тест $X^{(j)}$ центрировался по формуле

$$x_i^{(j)} \rightarrow x_i^{(j)} - \overline{X}^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, 447,$$

а затем нормировался –

$$x_i^{(j)} \rightarrow \frac{x_i^{(j)}}{((x_1^{(j)})^2 + \dots + (x_{447}^{(j)})^2)^{1/2}}.$$

Далее в этой главе имеем дело с такими векторами, то есть вначале центрированными, а затем нормированными.

Возникает вопрос о характере функции распределения выборочных данных ГЭПИЦентра. В отчете [1] неявно предположено, что тесты имеют нормальное распределение или, что допустимо считать их нормальными.

Было осуществлено несколько проверок гипотезы о нормальности случайных величин $X^{(j)}$, представленных 15 выборками-тестами, которые показывают, что *все тесты не отвечают случайным величинам с нормальным распределением*. Поэтому использование критерия Стьюдента в отчете [1] не является обоснованным.

Данное заключение сделано на основе следующих расчетов.

Для вычисления коэффициента вариации вектора-теста j или, иначе говоря, для 447 реализаций соответствующей случайной величины применялась формула [2, с.107]:

$$v_{(j)} = \frac{\sigma_{(j)}}{\overline{X}^{(j)}}.$$

Для реализации нормального закона данное отношение должно лежать в пределах интервала 0.08–0.4, среднее значение – 0.25 [2, с.107]. Ниже приведены значения для 15 тестов:

1) .2566,	2) .1055,	3) .4867,
4) .2570,	5) .1516,	6) .5146,
7) .2574,	8) .2997,	9) .3185,
10) .2563,	11) .0826,	12) .1375,
13) .5922,	14) .3387,	15) .5931.

Как можно видеть, данный тест на нормальность проходят выборки с номерами: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14.

Вычисленные выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса для 15 векторов-тестов:

Коэффициент асимметрии –

$$A^{(j)} = \frac{1}{447\sigma_{(j)}^3} \sum_{i=1}^{447} (x_i^{(j)} - \bar{X}^{(j)})^3$$

1) 1.9204, 2) .9352, 3) 3.1324,
 4) 1.9290, 5) 1.5321, 6) 3.9161,
 7) 1.8921, 8) .7601, 9) 3.0463,
 10) 1.9189, 11) .4007, 12) .4007,
 13) 2.7776, 14) 1.2547, 15) 2.5607,

Эксцесс –

$$E^{(j)} = \frac{1}{447\sigma_{(j)}^4} \sum_{i=1}^{447} (x_i^{(j)} - \bar{X}^{(j)})^4$$

1) 4.4936, 2) 4.0021, 3) 16.2068,
 4) 4.5195, 5) 5.9499, 6) 21.4883,
 7) 4.8916, 8) .6750, 9) 16.4988,
 10) 4.4902, 11) 2.7244, 12) 2.7244,
 13) 7.3284, 14) 2.4295, 15) 10.2354.

Средние значения ассоциированных нормально распределенных случайных величин (в случае исходного нормального закона) равны нулю, и отклонения от среднего подчиняются так называемому закону трех сигм [2, с.108]. Среднеквадратичные отклонения для теоретического распределения асимметрии и эксцесса вычисляются по явным формулам:

$$S_A^2 = \frac{6(K-1)}{(K+1)(K+3)},$$

$$S_E^2 = \frac{24K(K-2)(K-3)}{(K-1)^2(K+3)(K+5)}.$$

Для $K = 447$ пороговые значения 3σ соответственно равны: $3S_A = 0.34563$ и $3S_E = 0.6866$. Выборочные значения (из таблиц выше) для $A^{(j)}$ и $E^{(j)}$ соответственно превышают этот порог, что приводит нас к обоснованному выводу о неприемлемости гипотезы нормальности для всех векторов-тестов [2].

Проверка гипотезы нормальности методом Колмогорова-Смирнова [2, с.100], также показывает, что гипотеза нормальности неприемлема. Следует отметить, что применение критерия Колмогорова-Смирнова является в данном случае даже излишним, так как более грубые методы – сравнение вариаций, асимметрии, эксцесса – позволяют гарантированно отвергнуть гипотезу

нормальности. На рисунках 1, 2, 3 приведены гистограммы, отвечающие нескольким векторам-тестам.

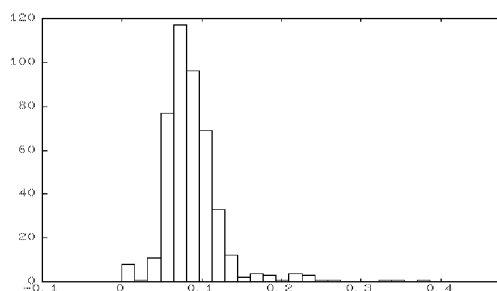


Рис 1. Гистограмма для теста 3

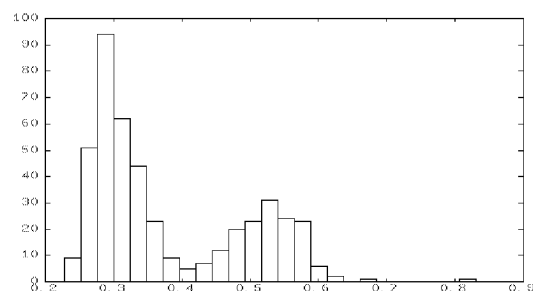


Рис 2. Гистограмма для теста 8

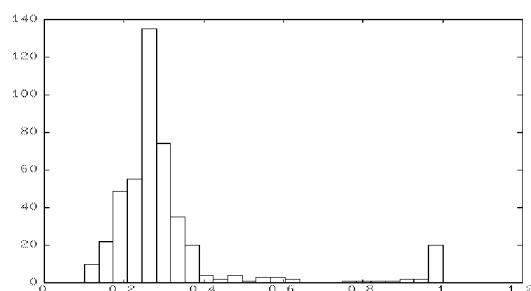


Рис 3. Гистограмма для теста 13

Высота каждого столбика на приведенных выше гистограммах равна количеству участков, показавших соответствующий процент активности в данном тесте. Координата x изменяется от нуля до единицы, что отвечает диапазону от нуля до 100 процентов. Тест 3 (активность по избирательным участкам при голосовании за Конституцию) представлен гистограммой на рисунке 1, тест 8 (активность по избирательным участкам при голосовании за лидера (за сильную личность)) – на рисунке 2, тест 13 (активность на выборах 20.03.94) – на рисунке 3.

Явственно прослеживается асимметрия для тестов 3 и 13, что сразу же исключает гипотезу о нормальности законов распределения. Рассмотрение рисунка 2 (теста 8) позволяет даже сделать предположение о двух независимых законах, которым подчинены две группы участков, причем в силу наблюдаемой асимметрии эти законы также далеки от нормального.

1.2 Вывод об избыточности данных

По таблице полученных векторов была определена корреляционная матрица $\|k_{(st)}\|$ для системы из 15 векторов, как матрица взаимных скалярных произведений нормированных векторов-тестов.

Ниже выписаны абсолютные значения элементов данной матрицы $\|k_{(st)}\|$ по строкам:

```

1) 1.0 .12 .36 1.0 .20 .49 .94 .00 .37 1.0 .00 .00 .83 .04 .38
2) .12 1.0 .56 .12 .13 .50 .06 .17 .51 .12 .09 .09 .21 .05 .26
3) .36 .56 1.0 .36 .24 .75 .25 .08 .81 .36 .24 .24 .45 .04 .47
4) 1.0 .12 .36 1.0 .20 .49 .94 .00 .37 1.0 .01 .01 .83 .04 .38
5) .20 .13 .24 .20 1.0 .24 .15 .21 .21 .20 .21 .21 .18 .09 .13
6) .49 .50 .75 .49 .24 1.0 .37 .10 .76 .49 .25 .25 .61 .04 .57
7) .94 .06 .25 .94 .15 .37 1.0 .01 .26 .94 .03 .03 .75 .03 .30
8) .00 .17 .08 .00 .21 .10 .01 1.0 .06 .00 .02 .02 .06 .03 .10
9) .37 .51 .81 .37 .21 .76 .26 .06 1.0 .37 .20 .20 .47 .07 .58
10) 1.0 .12 .36 1.0 .20 .49 .94 .00 .37 1.0 .00 .00 .83 .04 .38
11) .00 .09 .24 .01 .21 .25 .03 .02 .20 .00 1.0 1.0 .08 .03 .13
12) .00 .09 .24 .01 .21 .25 .03 .02 .20 .00 1.0 1.0 .08 .03 .13
13) .83 .21 .45 .83 .18 .61 .75 .06 .47 .83 .08 .08 1.0 .11 .46
14) .04 .05 .04 .04 .09 .04 .03 .03 .07 .04 .03 .03 .11 1.0 .31
15) .38 .26 .47 .38 .13 .57 .30 .10 .58 .38 .13 .13 .46 .31 1.0

```

Можно сделать вывод об избыточности рассматриваемой системы векторов-тестов, так как оказалось, что группы векторов с номерами 1, 4, 7, 10 и 11, 12 попарно имеют коэффициенты корреляции Пирсона, сравнимые с единицей.

Рассмотрение собственных чисел корреляционной матрицы, при исключенных векторах, например 4, 7, 10 и 11, показало, что оставшаяся система векторов в совокупности линейно независима, минимальное по модулю собственное число λ_m симметричной матрицы корреляции

$$(\|k_{(st)}\|_{s,t=1}^m - \lambda_m \|\delta_{(st)}\|_{s,t=1}^m) U = 0, \quad m = 1, \dots, k = 11$$

монотонно убывает при увеличении размерности m миноров $\|k_{(st)}\|_{s,t=1}^m$ корреляционной матрицы, и в итоге имеет порядок 10^{-2} (и равно 0.05).

Для определения собственных чисел матриц миноров применялся численный метод Якоби-Эберляйн, численно устойчивый в случае возможных совпадений собственных чисел [3, с.355].

Следует отчетливо понимать, что имеющаяся у нас матрица и ее миноры – всего лишь один из возможных исходов для экспериментов, подобных проведенному ГЭПИЦентром. Что подразумевается под этими словами? Обратим внимание на хорошо коррелированные векторы 1, 4, 7, 10. Малые различия, которые присутствуют в компонентах данных векторов, обусловлены различным способом агрегирования данных (рассмотрением активности на выборах, активности за лидера и т.д.). Очень хорошая корреляция данных векторов-тестов

означает не что иное, как то, что в действительности рассматривается лишь одна значимая случайная величина – активность избирателей на выборах. Таким образом, нам принципиально безразлично, какой именно вектор из набора 1, 4, 7, 10 векторов-тестов следует подставлять в нашу матрицу. Очевидно, что варьироваться подобным образом могут и другие векторы, причем следует отметить, что вариации возможны не только в результате артефакта эксперимента, как это произошло с векторами 1, 4, 7, 10, но и в зависимости от реальных внешних причин, происходящих во времени и влияющих на политическую реакцию населения, – не следует забывать, что мы рассматриваем политический процесс по времени, а не какую-то абстрактную реализацию некой случайной величины.

Поэтому рассматриваемая матрица является лишь представителем целого класса матриц, которые отличаются друг от друга на величины, зависящие от вариаций векторов-тестов, которые в свою очередь определяются способом агрегирования данных или другими случайными факторами. Если варьируя векторы-тесты мы можем получить вырожденную матрицу, то с некоторой вероятностью случайные величины, реализацией которых являются векторы, будут в совокупности линейно зависимы. Если же произвольно выбранный способ агрегирования дает нам матрицу, для которой минимальное по модулю (вообще-то они все положительны) собственное число существенно меньше возможных вариаций векторов-тестов, то это означает, что соответствующие случайные величины зависимы с большой степенью вероятности.

В нашем конкретном случае это означает, что число векторов-тестов, основанных на обработке результатов голосования, может быть выбранным не более, чем 8–9, причем предпочтительнее выбор 8. Вариации норм векторов 1, 4, 7 достигают величины порядка сотых, и мы имеем минимальное собственное число (по модулю) такого же порядка для корреляционной матрицы порядка 8–9.

Поэтому следует отметить, что полученные в результате полевых исследований данные, конечно, не являются бесполезными, так как они позволяют экспериментально определить степень устойчивости данных от способа агрегирования и, что очень важно, число независимых параметров, которые определяют срез реакции населения.

1.3 Кластеризация и пространственная близость

Было проведено упорядочение номеров (i) избирательных участков по степени близости соответствующих выборочных значений $x_i^{(j)}$ тестов $X^{(j)}$ на i -ом участке к значениям городских средних $\bar{X}^{(j)}$ (относительно среднеквадратичного отклонения $\sigma_{(j)}$) одновременно для всех 15 тестов. Для этого рассматри-

вался вектор

$$\Delta_i = \left(\frac{|x_i^{(1)} - \bar{X}^{(1)}|}{\sigma_{(1)}}, \dots, \frac{|x_i^{(15)} - \bar{X}^{(15)}|}{\sigma_{(15)}} \right) \quad (1.1)$$

и вычислялась его норма $\|\Delta_i\|$.

Оказалось, что вне зависимости от выбора конкретной меры близости, как то малости эвклидовой нормы вектора Δ_i , или нормы-максимум, или нормы по подмножествам индексов j , упорядочение участков устойчиво. Иначе говоря, первые десять номеров остаются среди первых пятнадцати, первые тридцать номеров остаются среди первых 50 и аналогично первая сотня номеров остается среди первых 150, вне зависимости от выбора нормы близости. Ниже приведены списки первых тридцати номеров участков при упорядочении по эвклидовой (1) и норме-максимум (2), дающих наиболее близкие значения тестов к своим городским средним:

(1)

1845, 1701, 1672, 1837, 1330, 1595, 1662, 1668,
1770, 1604, 1850, 1347, 1847, 1862, 1846, 1608,
1808, 1666, 1350, 1677, 1859, 1802, 1265, 1811,
1589, 1775, 1844, 1720, 1778, 1644

(2)

1845, 1701, 1662, 1770, 1604, 1595, 1787, 1608,
1808, 1668, 1837, 1835, 1847, 1350, 1330, 1872,
1666, 1347, 1704, 1775, 1613, 1802, 1619, 1589,
1778, 1850, 1720, 1651, 1865, 1846

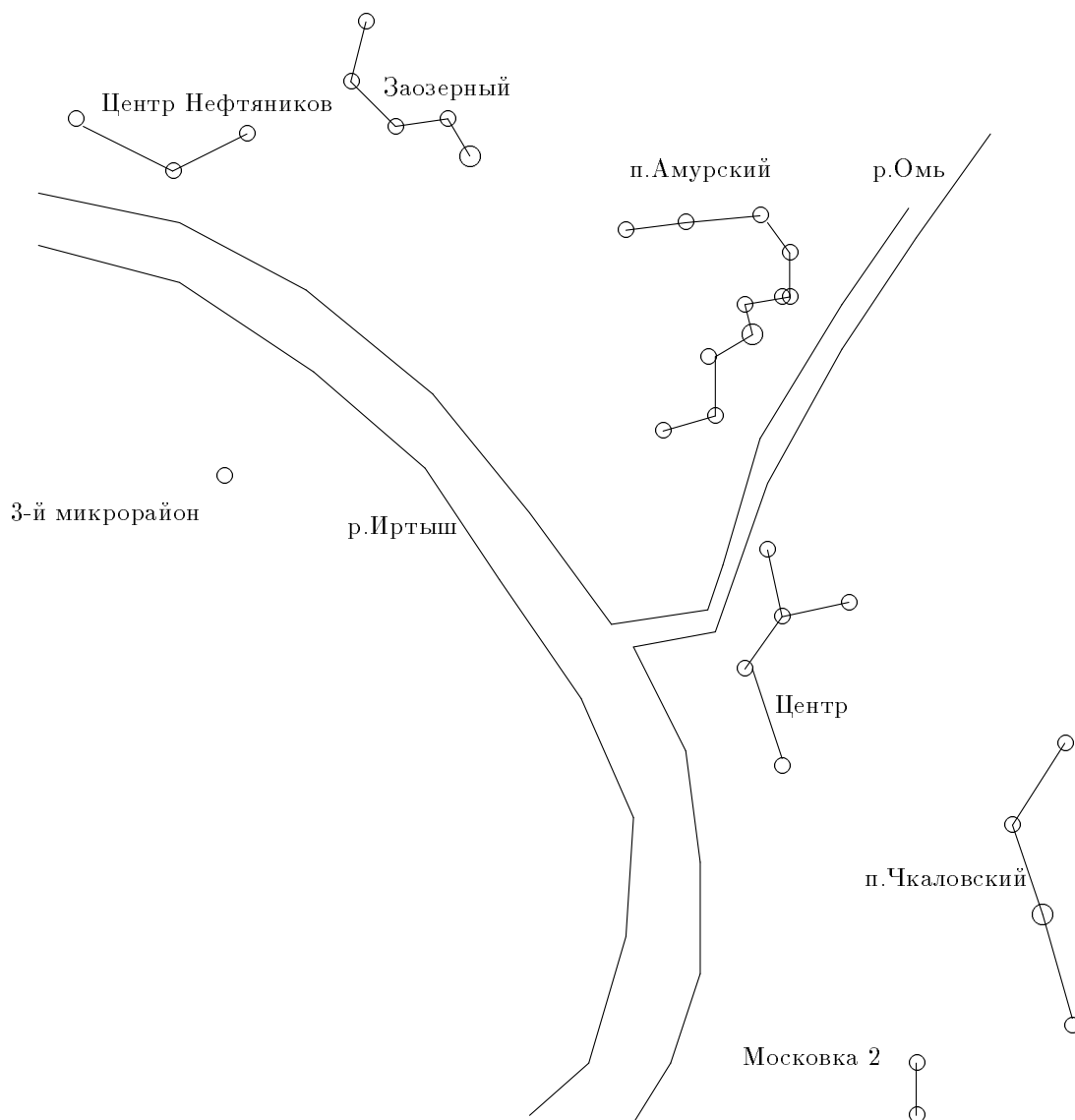
Конечно, хорошо известен факт эквивалентности норм в конечномерном случае, но следует отметить, что данный математический факт еще не гарантирует выявленной устойчивости номеров, точнее говоря, не предсказывает степени устойчивости.

Более того, было выявлено, что наблюдается пространственная консолидация избирательных участков с соответствующими номерами, которые на карте города образуют вытянутые конфигурации, а не хаотические пятна. Данный факт содержит в себе большее, чем просто очевидную близость номеров.

Это служит экспериментальным доказательством существования того, что на языке статистики называется совместной функцией распределения, причем данная функция, по всей видимости, является гладкой по пространственным переменным.

Отметим, что факт пространственной консолидации отчетливо наблюдается и в случае независимого исследования, проведенного в г. Надыме, несмотря на то, что в Надыме имеется всего 40 избирательных участков.

На рисунке 4 показано расположение первых 30 избирательных участков, наилучших по степени близости к средним значениям по городу Омску [11].



Следует отметить, что ранее выбранные ГЭПИЦентром с помощью алгоритма кластеризации [1] участки 52(1259), 219(1691), 281(1714), 375(1808),

411(1844), являются приемлемыми и с точки зрения предложенного здесь упорядочения, а также представительными для выявленных конфигураций. Они, за исключением 219 избирательного участка, принадлежат первой сотне номеров (но и 219 имеет номер 111).

Кроме того, данные участки являются приемлемыми представителями зон со средним политическим откликом, равномерно представляющим город по районам. Конечно, следует отметить, что у ГЭПИЦентра в его отчете [1] выпадает важная зона, непосредственно лежащая в центре города. Эта зона учтена в предлагаемой нами кластеризации. Поэтому участки, выбранные ГЭПИЦентром, можно дополнить участками из нашей кластеризации, например, в центре города.

Отметим, что не вполне оптимальный выбор ГЭПИЦентром участков был обусловлен абстрактным алгоритмом кластеризации, не предполагавшим физической подоплеки кластеризации, как то пространственная консолидация участков со средним откликом.

Возвращаясь к пространственной консолидации, обратим внимание на то, что на самом деле можно построить линии уровня, как отклонения от среднего отклика, по всем рассматриваемым величинам. Более того, по каждой величине (активность, голосование за лидера и т.п.) можно построить аналогичные картины линий уровня.

Данная информация может оказаться полезной с точки зрения организации адекватной избирательной кампании и, как следствие, позволит учесть желания людей, проживающих на данной территории.

1.4 Приближения среднего по 5 выделенным участкам

Из набора рекордных по степени близости к средним значениям $\overline{X}^{(j)}$ номеров избирательных участков нами выбирались случайным образом 5 номеров, и по ним вычислялось среднее по городу для каждого теста и по всем тестам сразу. Оказалось, что для любых 5 номеров из первых тридцати, отклонение w (или ww) от среднего по тестам (относительно дисперсии по тесту) лежит в пределах $0.05 - 0.2$, где

$$w^{(j)} = \frac{1}{\sigma^{(j)}} \left| \overline{X}^{(j)} - \frac{1}{5}(x_{i_1}^{(j)} + \dots + x_{i_5}^{(j)}) \right|,$$

$$w = \frac{1}{15}(w^{(1)} + \dots + w^{(15)}),$$

и

$$ww = \sqrt{\frac{1}{15}(w^{(1)})^2 + \dots + (w^{(15)})^2}.$$

Для наихудшего возможного случая – равномерного закона, реализацией которого может быть соответствующий тест, это дает отклонение порядка 0.05 размаха выборки.

Также отметим, что участки 52, 219, 281, 375, 411, исследуемые ГЭПИЦентром [1], являются приемлемым набором (w и ww порядка 0.18). Но следует отметить, что первые участки сохраняют свою приемлемость и при формировании наборов по 2, 3, 4 участка даже при взвешенном представительстве, тогда как выделенные ГЭПИЦентром участки теряют свои привлекательные качества.

Несмотря на это, выделенные ГЭПИЦентром участки представляют среднее, что все-таки лучше, чем произвольные пять из 447 для произвольных w и ww порядка 0.35 – 0.5.

1.5 Принципиальная возможность экстраполяции

Основываясь на полученных результатах, правомерно попытаться экстраполировать выводы о представительности территорий выбранных избирательных участков для оценки средних значений по городу и других определяющих параметров. В сущности, рассмотренные ранее векторы-тесты – это производные величины от чисто физических параметров, описывающих условия проживания, и от параметров, характеризующих степень осознания условий проживания.

Рассмотрим функцию $H(i)$, определенную на плоском графе, вершинами которого являются избирательные участки, а ребра определяют преимущественные пути перераспределения некоторых ресурсов между ареалами, коррелированными с вершинами графа. Это вполне допустимая аппроксимация для представления функции двух переменных, определенной на некоторой плоской области, которая в свою очередь представляет населенный пункт.

Под значениями функции H мы будем понимать «функцию уровня жизни» прилегающей к участку территории. Следует отметить, что под такой функцией мы понимаем не общеупотребительное и достаточно смутное социологическое содержание, а строго конкретное функциональное определение, о значимости которого можно дискутировать, но которое, по крайней мере, можно применять в вычислениях, и значимость которого можно проверять.

Выбор функции H неоднозначен, одним из возможных вариантов может быть задание значения в вершине i величины:

$$H(i) = \alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^+ \dots + \alpha_{in}^2 + \dots,$$

где двойной индекс означает соответственно номер участка и номер ресурса, определяющего, в определенной мере, уровень жизни.

Предполагается, что проводятся локальные усреднения по подобластям и значения средних считаются значениями H на вершинах графа. Более естественным будет рассматривать не саму функцию, а ее отклонения от среднего значения $V = H - \overline{H}$, причем считать отклонения нормированными. Статистическим аналогом введенной в рассмотрении функции V будет двумерно распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и еди-

ничным среднеквадратичным отклонением. Отметим, что и далее мы будем придерживаться детерминистского подхода, не забывая при этом проводить статистические аналогии.

Естественно предполагать нормированность ресурсов, то есть, что сумма квадратов ресурса k по всем вершинам равна единице.

Приведенные выше слова «в какой то мере» определяют неоднозначность функции H . Вернее была бы запись вида:

$$H(i) = Z_1 \alpha_{i1}^2 + Z_2 \alpha_{i2}^+ \dots + Z_n \alpha_{in}^2 + \dots,$$

где коэффициенты Z_k определяют значимость ресурса для конкретной группы населения. Например, степень обеспеченности углем очень значима для населения, проживающего в частном секторе, и наоборот, домашние телефоны представляются чем-то нереальным и не относящимся к непосредственным нуждам этой группы населения.

Конечно, данные коэффициенты не являются предметом дискуссии, они должны быть определены экспериментально. Кроме того, H не является наблюдаемой физической величиной; на самом деле мы имеем дело с реакциями населения, в частности, с рассмотренными ранее результатами выборов, которые и служат тестами на значения функции H .

Более строго рассматриваются l функций $f_m(i)$, $m = 1, 2, \dots, l$, которые, кроме того, что они являются функциями от вершины, являются нелинейными функциями от $H(i)$. На языке статистики можно сказать, что случайная величина f_m коррелирована со случайной величиной H . Как видим, в статистическом подходе опускается индекс i , что, по существу, сводит пространственную функциональную зависимость к реализациям случайной величины, что также не вполне достаточно.

Рассмотрим зависимость:

$$f_m(i) = a_m + b_m V(i) + c_m V^3(i) + \dots + g_m(i),$$

где $a_m, b_m, c_m, \dots$ — коэффициенты ряда функции f_m по функции H , а $g(i)$ некоторая функция, не зависящая от V .

Рассмотрим среднее от функции f_m , иначе говоря, возьмем приближение интеграла по всем вершинам графа. Первое слагаемое даст нам a_m , второе не будет присутствовать, третье и далее также не принесут вклада. Среднее от функции $g_m(i)$ по всем вершинам равно нулю, в противном случае среднее относится на счет константы a и переопределенная функция g будет иметь уже нулевое среднее.

Очевидно, что если f_m существенно зависит от V , то среднеквадратичное функции g_m должно быть существенно меньше, чем среднеквадратичное слагаемых, содержащих степени V . В противном случае предыдущая запись была бы просто формальным представлением функции.

В случае существенной зависимости, при пространственном представлении функций $f_m(i)$, узлы, в которых V достигает нуля, должны представлять связную совокупность и характеризоваться лишь осцилляциями функции g_m , малыми по сравнению с среднеквадратичным отклонением V .

Как видно из предыдущего, консолидация избирательных участков по признаку среднего отклика дает нам именно такие связные конфигурации, причем конфигурации совпадают для попарно независимых векторов-тестов.

Отсюда следует, что дополнительная функция, столь же зависимая от V , как и те, которые мы рассматривали ранее, должна давать средний отклик на тех же консолидированных участках, как и рассмотренные ранее функции.

Ответ на вопрос, является ли рассматриваемая функция f_{l+1} столь же зависимой от V , как и предыдущие векторы-тесты, представляет в общем случае нетривиальную задачу. Но для некоторых функций эту зависимость можно сделать обоснованной и прийти к выводу о ее (по крайней мере, не худшей) зависимости от V . Например, степень телефонизации населения не зависит от политических реакций того же населения на данный момент времени, но, по всей видимости, обратная зависимость есть. Можно сказать, что одна из этих величин – определяющая, а вторая – производная. Амплитуда колебаний функции g может лишь увеличиться при переходе от определяющих к производным величинам.

Таким образом, отклонения от среднего по городу для политических реакций населения мажорируют отклонения от среднего для определяющих величин.

1.6 Ошибки оценки среднего для произвольного вектора-теста

Основываясь на материалах предыдущих параграфов, определим ошибку оценки городского среднего в некотором смысле произвольного 16-го теста Y выборочными средними для конечного числа участков.

Рассмотрим вектор-тест Y^l , полученный в результате линейной комбинации известных нам 15 векторов-тестов:

$$Y^l = \gamma_1 X^{(1)} + \dots + \gamma_{15} X^{(15)},$$

где коэффициенты γ_j представляют собой компоненты нормированного вектора, выбранные с помощью генератора случайных чисел (равномерный закон), число l определяет количество генерируемых векторов Y . Мы сформировали таким образом 500 векторов; каждый из них – это выборка-тест, который мог бы быть измерен по всем 447 участкам.

Другими словами, мы как бы провели замеры 500 новых показателей (тестов), «порожденных» исходными 15 тестами ГЭПИЦентра. Отметим, что, рассматривая произвольную линейную комбинацию заданных векторов-тестов, мы просто следуем предположению о том, что *любая реакция населения или базовая характеристика обеспечения населения взаимосвязана с факторами, определяющими политические и некоторые другие реакции населения, учтенные ГЭПИЦентром в тестах $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$* .

Насколько обоснованно такое предположение? Допустим, что мы упустили один из важных факторов при обработке тестов $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$ и он проявится

в некотором другом важном тесте, не связанном с рассмотренными ГЭПИЦентром, но зависящим от базовых характеристик проживания.

Какова вероятность такого события? Вспомним, что обработка результатов голосования показала избыточность 15 тестов, вполне хватает и 8-9. То же показывает обработка результатов голосования в г.Надыме, где рассматривались уже 22 теста. Значит, стараясь отразить независимые характеристики результатов голосования, мы выделили 9 определяющих факторов и не смогли, как оказалось, в дополнительных 6 (г.Омск) и 13 (г.Надым) тестах выделить 10-й важный фактор. Рассматривая определение важного фактора как независимое испытание (по получаемому в полевых работах вектору-тесту можно определить определяется новый или старый фактор), мы получим вероятность, что в дополнительных тестах 10-й фактор не выявился с вероятностью $P_1 = (9/10)^6$ для г. Омска и с вероятностью $P_2 = (9/10)^{13}$ для Надыма. Кроме того, количество факторов (9) одно и то же для Омска и Надыма, а это означает, что необходимо рассматривать вероятность неучета 10-го фактора порядка произведения вероятностей P_1 и P_2 , что в итоге дает число порядка 0.1.

С точки зрения линейной алгебры, предположение об учете всех определяющих параметров означает, что результат любого аналогичного измерения (после операций центрирования и нормировки) будет точно представляться как линейная комбинация наших 15 векторов $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$.

Мы формировали выборки, давшие 500 векторов Y^l . Для каждого Y^l вычислялась ошибка ϵ_l :

$$\epsilon_l = \frac{\sigma_l}{\bar{Y}^l - p_m},$$

где σ_l – среднеквадратичное отклонение для вектора-теста Y^l ; $\bar{Y}^l$ – среднее по тесту, а p_m – выборочное среднее по m выделенным участкам.

Оказалось, что для рассматриваемого ГЭПИЦентром числа участков $m = 5$, ошибка $|\epsilon_l|$ не превышает 0.5. Средняя ошибка:

$$\sum_l \epsilon_l = 0.$$

Выбор наилучших участков принципиально картину не меняет.

Можно утверждать, что с вероятностью, большей, чем 0.95, ошибка оценки городского среднего для, в общем-то произвольно взятого, нового теста Y^l выборочным средним по 5 выделенным ГЭПИЦентром участкам не превысит 40% среднеквадратичного отклонения σ_l по городу. С вероятностью 0.9 можно гарантировать точность 0.35.

Рассмотрим другие возможные меры ошибки, эквивалентные оценке через среднеквадратичное. В наихудшем случае – случае равномерного распределения, максимальная ошибка определения среднего будет равна примерно 0.2 размаха выборки. В случае закона распределения близкого к нормальному максимальная ошибка будет ограничена интервалом 0.0032-0.16 значения среднего. Это следует из оценки вариации, использованной нами ранее.

Но мы можем усреднять и по меньшему числу участков, чем 5, например, из имеющихся у нас участков организовать выборки по 2, 3, 4 участка и оценить вариацию среднего при различных усреднениях. Отметим, что оценки среднего по выборкам из 2 и 3 участков не коррелируют с оценками среднего по 5 участкам.

Если данная вариация велика, то можно сделать обоснованный вывод, что усреднение по данным 5 участкам не совсем удовлетворительно. Данная процедура хорошо известна под названием – метод складного ножа [5, с.10]. Таким образом, отсеиваются векторы Y с ошибкой оценки среднего выше, чем $0.1 - 0.15\sigma$.

Также, если известно, что корреляция вектора-теста Y с некоторым из данных 15 векторов-тестов значима (т.е. больше 0.7), то можно гарантировать с вероятностью 0.95, что ошибка оценивания среднего лежит в интервале от нуля до 0.15 среднеквадратичного по тесту Y . На рисунках 5, 6, 7 приведены гистограммы распределения ошибки ϵ , для усреднения по 5 выделенным участкам, для усреднения по 12 участкам, для случая значимой корреляции вектора Y (0.7) с одним из заданных векторов.

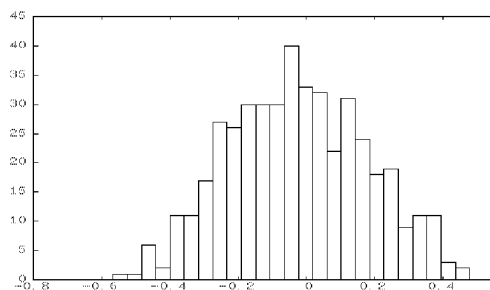


Рис 5. Гистограмма для ошибки ϵ_l
для участка 5

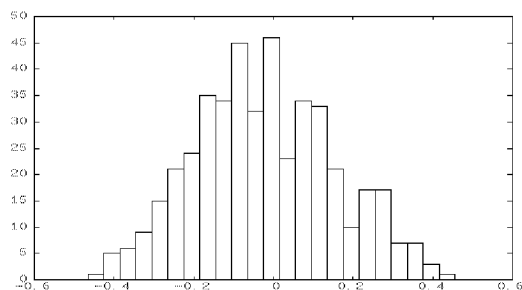


Рис 6. Гистограмма для ошибки ϵ_l
для участка 12

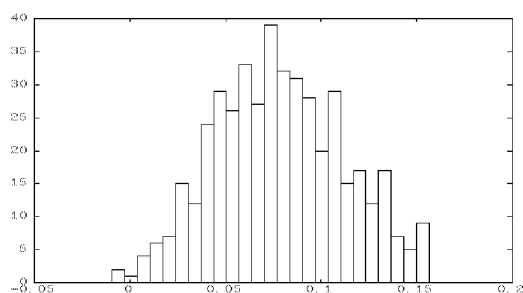


Рис 7. Гистограмма для ошибки ϵ_l в случае значимой корреляции с 1 тестом

Вышеприведенные оценки вероятности сделаны на основе численного эксперимента, диапазон изменения ошибки определяется подобными гистограммами.

Глава 2

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ И ВЫВОД ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ

2.1 Постановка задачи

2.1.1. Задача оценки средних городских показателей

Жители города разбиты по K участкам. Проводятся измерения некоторых жизненно-важных величин для этих участков. Например, число проголосовавших на участке за лидера, деленное на число голосовавших избирателей участка, число телефонов на участке, деленное на число избирателей, и т.д. В принципе, измеряемое число может принимать любое (вещественное) значение. Естественно считать, что интересующая нас величина измеряется с ошибкой, так как на процесс измерения влияют самые разнообразные *случайные* факторы. Более того, сама измеряемая величина как явление общественной жизни является случайной, в том смысле, что нельзя ее считать досконально и точно известной даже для соответствующей административной службы: избиратели уезжают или умирают без предупреждения, телефоны ставятся и снимаются более или менее регулярно, и это не всегда своевременно отражается в документах телефонных служб.

Как оценить среднее значение интересующей нас величины (теста) X , называемой средним по городу, и ее возможное отклонение, если использовать знание значений этой величины только на некоторых n участках, с какой-то долей уверенности, что представленные нам цифры отражают реальную ситуацию? Отметим специально, что для ГЭПИЦентра особый интерес представляет либо $n = 5$, либо n порядка 10.

Эта задача является традиционной для статистики.

Для ее решения используем методы *математической* статистики, которая в отличие от статистики предъявляет, во-первых, строго доказанные оценки, а, во-вторых, предупреждает в каких рамках их следует применять. Вольности в интерпретации чреваты ошибками при принятии решений.

Будем ниже считать, что участки с номерами $i = 1, \dots, 5$ — это специально выделенные ГЭПИЦентром.

2.1.2. Математическая формулировка задачи

Итак, для каждого участка задано значение (реализация) x_i случайной величины X_i , $i = 1, \dots, K$. Все X_i независимы и имеют одно и то же распределение

$F(x)$. Пусть существуют среднее $\mu = \mathbf{M}X_i$ и дисперсия $\sigma^2(F) = \mathbf{M}(X - \mu(F))^2$. По сути дела, мы имеем одну случайную величину X с распределением $F(x)$ и ее реализации $x_1, \dots, x_n$ (выборка).

Требуется найти интервальные оценки для $\mu(F)$ и $\sigma^2(F)$.

Пусть

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X}_n)^2$$

– выборочные среднее и (смещенная) дисперсия.

Предположим, что величина X положительна и ограничена $X \leq \tau$ (тогда $\sigma(F) \leq \tau/2$). Такое предположение, если вспомнить о практической подоплеке нашей задачи, вполне разумно и естественно. Но тогда справедливо неравенство [6, с.52]

$$\mathbf{P}_{F_n}(|\bar{X}_n - \mu(F)| \leq \delta) \geq \gamma, \quad (2.1)$$

где

$$\gamma = 1 - \exp\left(-\frac{\delta^2 n}{4\tau^2}\right)$$

и F_n – функция распределения выборочного среднего $\bar{X}_n$, которое рассматривается как случайная величина. То есть с уровнем доверия (значимости) γ или, иначе говоря, в $\gamma 100$ % из 100 неизвестное нам среднее $\mu(F)$ будет лежать в интервале

$$(\bar{X}_n - \delta, \bar{X}_n + \delta).$$

Для использования формулы (2.1) необходимо знать функцию $F_n(t)$, и это главное препятствие на пути к успеху в решении задачи.

По центральной предельной теореме при $\mathbf{M}X^2 < \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\bar{X}_n} \left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu(F)}{\sigma(F)} \leq t \right) = \Phi(t).$$

Значит, при достаточно большом n можно считать, что выборочное среднее $\bar{X}_n$ имеет нормальное $F_n = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2(F)/n)$ распределение. Но как раз $\sigma^2(F)$ неизвестно, поэтому неизвестна и F_n . Более того, замена F_n на $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2(F)/n)$ возможна с ошибкой порядка $1/\sqrt{n}$; в лучшем случае – порядка $1/\sqrt{n^3}$ [7, с.276-277]. В условиях, предлагаемых ГЭПИЦентром $n = 5$ ошибка лежит в пределах $0.09 - 0.45$, то есть составляет в худшем, и наиболее вероятном случае, 45 %. Это много! Напомним, что все 15 тестов не имеют нормального распределения.

Поэтому нужно как-то обосновать гипотезу ГЭПИЦентра (0.1) без предположения о нормальности тестов.

2.2 Доверительный интервал для городского среднего в случае произвольного распределения F с $MX^2 < \infty$

2.2.1. Непараметрический метод Чоу-Роббинса

Найти доверительный интервал для $\mu(F)$, не зная ее функции распределения, безнадежно. Гарантированная оценка среднего $\mu(F)$ без какой-либо априорной информации о F невозможна. Например, такая ситуация может случиться при «больших выбросах» величины X на отдельных участках [6, с.49-50]. Изложим метод Чоу-Роббинса получения доверительного интервала для среднего «фиксированной ширины» [8, §10.10].

Предположим, что F имеет конечный второй момент. Зададим числа δ и γ и последовательность a_n , сходящуюся к a , где $\Phi(a) = (1 + \gamma)/2$.

Найдем число

$$n(\delta) = \min_n \left\{ n \leq \frac{a_n^2}{\delta^2} \left(\frac{1}{n} + s_n^2 \right) \right\}$$

— число остановки.

Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{P}_{F_n}(|\bar{X}_{n(\delta)} - \mu(F)| \leq \delta) \geq \gamma.$$

2.2.2. Аprobация метода Чоу-Роббинса на статистиках ГЭПИЦентра

Имеются данные $x_1, \dots, x_K$ по ($K = 447$) участкам. Посмотрим чему окажется равным число остановки $n(\delta)$ для различных δ при уровне доверия $\gamma = 0.95$.

Применим следующий алгоритм. Берем $\delta_k = 1/k$, ($k = 1, 2, \dots$) и $a_n = a = 1.96 = \Phi^{-1}(0.975)$. Для данного k находим все такие n , которые не меньше, чем $4k^2(1/n + s_n^2)$. Из них берем самое маленькое. Это и есть $n(\delta_k)$.

В таком случае с уровнем доверия 95% городское среднее лежит в интервале

$$(\bar{X}_{n(\delta_k)} - 1/k, \bar{X}_{n(\delta_k)} + 1/k)$$

при одном, но очень суровом условии, — число k достаточно большое.

Поскольку [8, теорема 10.10.2]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(\delta_k)}{a^2 k^2 \sigma^2(F)} = 1,$$

то следует, задавая последовательно $k = 1, 2, \dots$, находить число остановки $n(\delta_k)$. При малой дисперсии $\sigma^2(F)$ есть шанс, что оно при очень больших k будет лежать еще в пределах K . Более того, если обнаруженное ГЭПИЦентром для пятнадцати показателей (тестов) X экспериментальное наблюдение

$$\bar{X}_5 \approx \mu(F) \tag{2.2}$$

отражает объективную социальную закономерность, то следует ожидать, что число остановки будет еще лежать в пределах от 5 до 10 при очень больших k . Рост k – это сужение доверительных границ, то есть все более точная оценка городского среднего $\mu(F)$. Отметим, что формула дает оценку среднеквадратичного отклонения

$$\sigma(F) \sim \sqrt{\frac{n(\delta_k)}{a^2 k^2}} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Сказанное выше означает следующее:

1) если для всех статистик ГЭПИЦентра при нарастании k число остановки будет достаточно долго лежать в пределах от 5 до 10, то выводы ГЭПИЦентра относительно наблюдения (2.2) небезосновательны;

2) если 1) не верно, то есть число остановок быстро превысит разумные пределы (более 20 (?) участков), то усилия, предпринятые ГЭПИЦентром по поиску облегчения и удешевления полевых работ, малоосновательны;

Большого трудно достичь, поскольку нам почти ничего не известно о распределении F .

Указанный алгоритм легко реализуется на компьютере.

Ниже даются кривые, характеризующие поведение доверительного интервала в зависимости от числа используемых участков (ось X). На рис. 8-12 горизонтальная прямая – это городское среднее; кривая, «зажатая» между двумя другими похожими кривыми, – кривая выборочных средних.

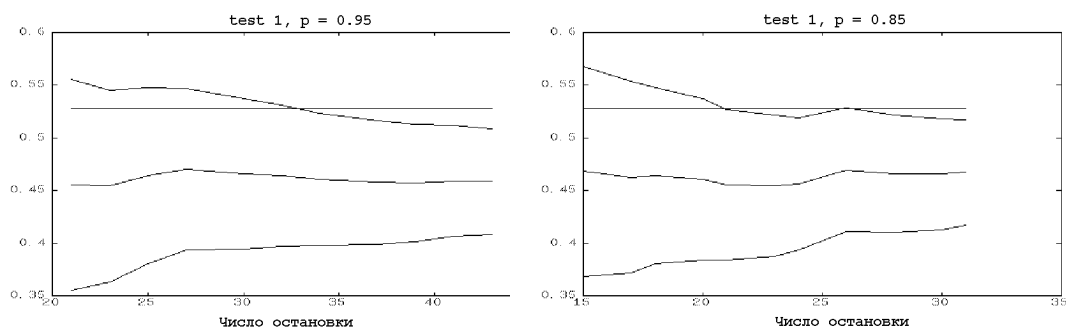


Рис 8. Доверительный интервал для теста 1

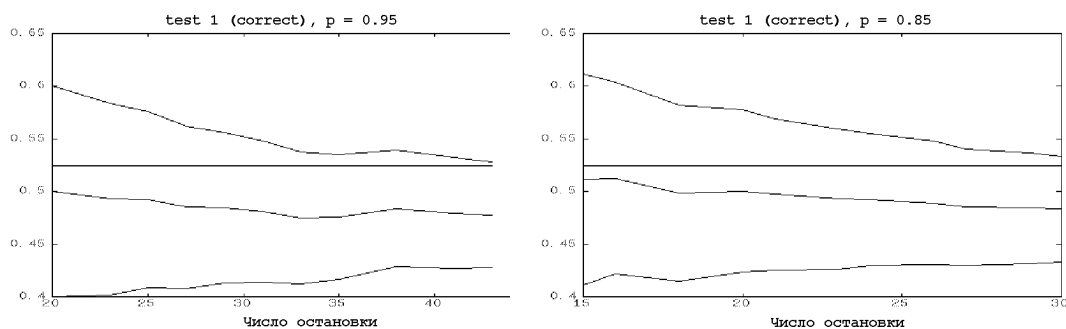


Рис 9. Доверительный интервал для теста 1 с учетом выделенных участков

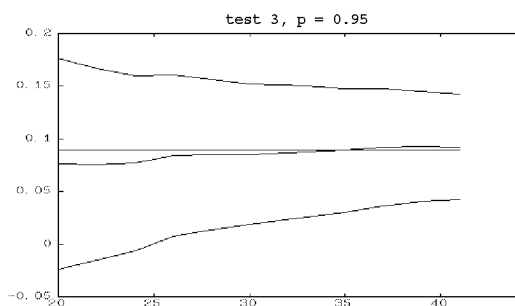
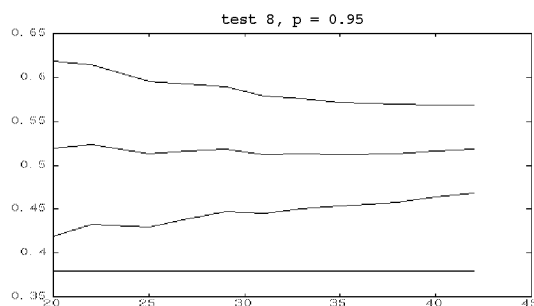
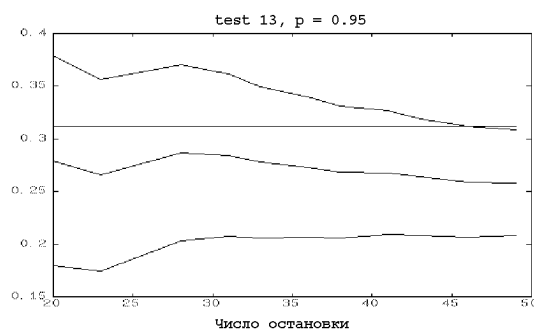
Рис 10. Доверительный интервал
для теста 3Рис 11. Доверительный интервал
для теста 8

Рис 12. Доверительный интервал для теста 13

На рис. 8, 9 видно, как влияют специально выбираемые участки на характеризацию городского среднего посредством выборочных средних. В целом, для описания городского среднего хватает участков в количестве, на порядок меньшем, чем общее число участков 447 (тем не менее, для теста 8 не всегда хватает и 45 участков. — см. рис. 2, 11).

2.3 Доверительный интервал для городского среднего значения при асимптотически нормальном распределении F с $MX^2 < \infty$

В §1.2 говорилось о сложностях, связанных с применением центральной предельной теоремы для выборочного распределения F_n . Однако, если сама величина X имеет нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu(F), \sigma^2(F))$, то и F_n нормальное $\mathcal{N}(\mu(F), \sigma^2(F)/n)$. Делать предположение о нормальности X не хочется. Более того, как показал анализ статистик ГЭПИЦентра, величины, отвечающие всем 15 тестам $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$, не имеют нормального распределения (см. §1.1).

Таким образом, остается надеяться на метод Чоу-Роббинса. Но он слишком груб. Полезно для подстраховки иметь альтернативный способ получения доверительного интервала для $\mu(F)$. Можно, в случае малого отклонения от нормального закона для X , надеяться на то, что доверительный интервал,

полученный все же при допущении предположения о нормальности, окажется вполне согласующимся с тем интервалом, что получен на основе метода Чоу-Роббинса. В результате есть шанс иметь более убедительную оценку городского среднего. На каком пути должно появляться допущение о нормальности? Этот путь должен контролировать ошибку, получаемую нами в том случае, когда интересующая нас величина считается нормально распределенной.

Предположим, что каждое X_i ($i = 1, \dots, K$) имеет измеряемое значение (реализацию) вида

$$x_i = \frac{1}{K_i} \sum_{l=1}^{K_i} z_{i,l}, \quad (2.3)$$

где $z_{i,1}, \dots, z_{i,K_i}$ – случайная выборка внутри участка, отвечающая показателю Z_i , рассматриваемому как случайная величина (см. §2.1), тогда при объеме выборки порядка 400 (число, например, избирателей на участках порядка 1000), вполне обоснованно считать X_i нормально распределенной величиной $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Но тогда среднее $\bar{X}_n$ является нормальной величиной

$$\mathcal{N}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1} n\mu_i, \frac{1}{n^2} \sum_{i=1} n\sigma_i^2\right).$$

Таким образом, можно находить доверительные интервалы традиционным способом на основе распределения Стьюдента [8, с.644] с уровнем доверия γ :

$$\bar{X}_n - t_{(1+\gamma)/2}[n-1] \frac{s_n}{\sqrt{n-1}} < \mu(F) < \bar{X}_n + t_{(1+\gamma)/2}[n-1] \frac{s_n}{\sqrt{n-1}}, \quad (2.4)$$

где $t_\alpha[\nu]$ – α -квантиль распределения величины t с ν степенями свободы;

$$S_\nu(t_\alpha[\nu]) = \mathbf{P}_t(t < t_\alpha[\nu]) = \alpha.$$

Вычисление доверительного интервала (2.4) для статистик ГЭПИЦентра при $n = 5$ позволит проверить отчасти наблюдение ГЭПИЦентра (2.2). Дело в том, что, во-первых, неизвестна степень случайности в отборе данных $z_{i,l}$, а, во-вторых, не все показатели x_i представимы в виде (2.3).

Полезен ли такой путь? Судя по Приложению к Отчету [1], ГЭПИЦентр предполагает в будущем проводить работы по схеме, подпадающей под формулы (2.3) и (2.4). Точнее, планируется ГЭПИЦентром делать выборки $z_{i,l}$, $l = 1, \dots, K_i$ объема $K_i = 100$, $i = 1, \dots, 5$ для каждого из пяти заранее отобранных участков (принцип отбора обосновывается в Гл.1) для снятия показателей по тесту Z , из которых формируется величина X по формуле (2.3). Объем выборки $z_{i,l}$ не столь хорош (будем надеяться на опыт группы, производящей выборку объема 100), как хотелось бы, но позволяет применить центральную предельную теорему, и, следовательно, считать, что X_i являются нормально распределенными величинами $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$.

2.4 Доверительный эллипсоид для k тестов

К сказанному в предыдущем параграфе полезно добавить следующее. Как показывает вычисление коэффициентов корреляции для тестов $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$, а они, как правило, отличны от 0 и 1, мы не можем рассматривать тесты как независимые, особенно в случае их нормального распределения. Поэтому для получения более корректных результатов необходимо использовать многомерный статистический анализ.

Пусть даны «чисто политические» тесты $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$ и новый «чисто экономический» Y . Все эти 16 показателей коррелируют друг с другом. Как оценить среднее для Y через $\bar{Y}_5$, используя информацию о верности гипотезы (0.1) для $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$ и метод доверительных интервалов?

Переобозначим $X, X^{(1)}, \dots$ через $Y^{(1)}, \dots, Y^{(k)}$, где $1 \leq k \leq 16$, то есть не все из тестов $X^{(j)}$ (и даже X) рассматриваются.

Будем предполагать, что величины $Y^{(1)}, \dots, Y^{(k)}$ имеют совместное нормальное распределение $\mathcal{N}(\{\mu^{(j)}\}, \{\|\sigma_{st}\|\})$, где

$$\mu^{(j)} = \mathbf{M}Y^{(j)}$$

– городское среднее величины $Y^{(j)}$; а $\|\sigma_{st}\|$ – ковариационная матрица:

$$\sigma_{(st)} = \mathbf{M}[(Y^{(s)} - \mathbf{M}Y^{(s)})(Y^{(t)} - \mathbf{M}Y^{(t)})] \quad s, t = 1, \dots, k$$

(см. [7, с.177]).

Основание для этого предположения дают не статистики ГЭПИЦентра, а его планы на будущее [1], хотя несомненно нужно проводить исследования на совместную нормальность отдельно в каждом конкретном социологическом обследовании по k тестам.

Пусть для каждого теста $Y^{(j)}$ дана выборка $y_1^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}$ – замеры этого теста на участках с номерами $1, \dots, n$

$$u_{(st)} = \sum_{i=1}^n (y_i^{(s)} - \bar{Y}_n^{(s)})(y_i^{(t)} - \bar{Y}_n^{(t)}), \quad s, t = 1, \dots, k,$$

где

$$\bar{Y}_n^{(j)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^{(j)}$$

– элементы матрицы внутреннего рассеяния. Если $n > k$, то есть в случае, когда число отобранных для мониторинга участков n больше числа тестов, участвующих в мониторинге k , с вероятностью 1 матрица $\|u_{(st)}\|$ положительно определена [7, с.555]. Таким образом, при пяти участках и более пяти тестах вероятность иметь положительно определенную матрицу рассеяния может отличаться от 1.

Как показал Хотеллинг [7, с.592-593], с уровнем доверия γ доверительный эллипсоид для совокупности городских средних $(\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)})$ имеет вид

$$n \sum_{s,t=1}^k u^{(st)} (\bar{Y}^{(s)n} - \mu^{(s)}) (\bar{Y}^{(t)n} - \mu^{(t)}) < \frac{1 - z_\gamma}{z_\gamma}, \quad (2.5)$$

где

z_γ – 100 γ -процентный квантиль бета-распределения $Be(\frac{1}{2}(n-k), \frac{1}{2}k)$,

$$\|u^{(st)}\| = \|u_{(st)}\|^{-1}.$$

Можно сделать грубую оценку, увеличивающую уровень доверия γ , заменив эллипсоид на шар

$$\sum_{j=1}^k (\bar{Y}^{(j)n} - \mu^{(j)})^2 < \frac{(1 - z_\gamma) \max_j \lambda_{(j)}}{nz_\gamma},$$

где $\lambda_{(j)}$ – собственное число матрицы рассеяния $\|u_{(st)}\|$. Другими словами, с уровнем доверия γ вектор городских средних $(\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)})$ лежит в шаре с центром в векторе выборочных средних по n и с радиусом

$$r_\gamma = \sqrt{\frac{(1 - z_\gamma) \max_j \lambda_{(j)}}{nz_\gamma}}.$$

Это дает γ -доверительный интервал для городского среднего $\mu(X)$ 16-ого теста X

$$(\bar{X}_5 - r_\gamma, \bar{X}_5 + r_\gamma). \quad (2.6)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ статистик ГЭПИЦентра показал:

1) Все пятнадцать тестов $X^{(j)}$, $j = 1, \dots, 15$ ГЭПИЦентра не отвечают случайным величинам с нормальным распределением. Поэтому использование критерия Стьюдента в отчете [1] для проверки гипотезы (0.1) не является обоснованным. Другими словами, нельзя считать доказанным, что для 95 из 100 реализаций (выборок) $x_1, \dots, x_5$ на особо и заранее отобранных 5 участках теста $X^{(j)}$ среднее

$$\bar{X}_5^{(j)} \approx \bar{X}^{(j)}, \quad (3.1)$$

как это имело место при одной выборке, оказавшейся в распоряжении ГЭПИЦентра.

2) Недоказанное – не значит неверное! Компьютерные эксперименты (§1.6) с генерацией реализаций теста вида

$$X = \gamma_1 X^{(1)} + \dots + \gamma_{15} X^{(15)}$$

показали, что с вероятностью 0.95 ошибка

$$\epsilon_l = \frac{\bar{X} - \bar{X}_5}{\sigma} \quad (3.2)$$

для выделенных ГЭПИЦентром участков не превышает 0.4 (где σ – среднее квадратичное отклонение для вектора-теста X).

Это весомый довод в пользу гипотезы ГЭПИЦентра (0.1) или (3.1).

3) В работе предложен метод построения доверительных интервалов на основе теоремы Чоу-Роббинса, требующий лишь конечности вторых моментов. Апробация метода для тестов ГЭПИЦентра $X^{(j)}$, $j = 1, \dots, 15$ показало, что с уровнем доверия 85 - 95 % ошибка от 10 до 20 % достигается для $n = 15 - 20$ и для $n = 20 - 40$ участков соответственно. При $n < 5$ ситуация ухудшается.

Оценка улучшается, если брать специально отобранные в §1.3 участки. Отбор участков должен производиться до взятия выборок. Тогда не будет нарушаться «парадигма случайного отбора», поскольку речь идет уже о стратифицированных выборках. Таким образом, следует, скорее, говорить о подтверждении методики ГЭПИЦентра, а не о противоречии принципам организации статистических выборок.

Сила метода Чоу-Роббинса – в отсутствии каких-либо обременительных ограничений на распределение величины X , а слабость – в грубости оценки необходимого объема n или в понижении уровня значимости.

4) В §2.3, 2.4 показано, как можно уточнить доверительные интервалы Чоу-Роббинса для исследуемых «экономических» тестов. Для этого требуется от ГЭПИЦентра отработать саму методику взятия выборки $x_1, \dots, x_5$ «экономических тестов» X .

«Экономические тесты» X ГЭПИЦентра разноплановы: каждая выборка $x_1, \dots, x_5$ извлекалась по индивидуальному плану, и, следовательно, величины X могут иметь различные распределения (так и есть в действительности). Или каждый раз надо «возиться» с отдельно взятым тестом, подбирая для него персональный метод нахождения доверительного интервала, или совершенствовать путь, намеченный в §2.3, 2.4.

5) В §1.3 предложен другой способ выделения «репрезентативных участков». При этом было выявлено, что наблюдается пространственная консолидация «репрезентативных» избирательных участков с соответствующими номерами, которые на карте города образуют вытянутые конфигурации, а не хаотические пятна. При предложенной кластеризации реализована основная идея ГЭПИЦентра: участки выделяются по степени близости выборочного среднего по этим участкам к среднему по городу сразу для всех 15 тестов! Это видно из формулы (1.1) для Δ_i , если просуммировать по $i = 1, \dots, 5$ каждую j -ю компоненту векторов Δ_i –

$$\forall j = 1, \dots, 15 \left(\frac{\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i^{(j)} - \bar{X}^{(j)}}{\sigma_{(j)}} \rightarrow 0 \right).$$

Тем самым ГЭПИЦентр получает процедуру кластеризации, свободную от необходимости интуитивного выбора, присущего отчету [1]. Важно отметить, что наш метод кластеризации участков показывает, что выделенные ГЭПИЦентром участки приемлемы и, в какой-то мере, неслучайны.

6) Имеются основания предположить (см. §1.5, 1.6), что новые тесты являются линейной комбинацией 15 тестов ГЭПИЦентра. Другими словами, для

произвольного теста Y можно подвергнуть анализу в рамках идей ГЭПИЦентра только «политизированную составляющую» Y_P – проекцию вектора-теста Y на «политическое пространство» с базовыми векторами-тестами $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$. В таком случае гипотеза ГЭПИЦентра с уровнем доверия 0.95 позволяет считать, что ошибка оценки (3.2) не превысит 0.4.

7) В силу сказанного в 6) каждый новый тест Y должен рассматриваться в комплексе с 15 тестами $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$. Однако вместо линейного разложения Y по $X^{(1)}, \dots, X^{(15)}$ можно использовать методы многомерного статистического анализа, предполагая, например, существование совместного нормального распределения. Это допущение нормальности вполне приемлемо, если корректно делать выборки с учетом пути, указанного в §2.3. Тогда для оценки городского среднего можно использовать доверительный эллипсоид (2.5) или интервал (2.6) из §2.4.

8) Следует строго ограничивать число тестов при измерении показателей (взятии выборки) в зависимости от числа участков, использованных в исследовании (см. §2.4). При пяти участках, в случае числа тестов более пяти, вероятность иметь положительно определенную матрицу рассеяния может отличаться от 1. Даже если матрица рассеяния вдруг окажется положительно определенной, а число тестов превышало разумный предел, это может означать, что получаемые на таком материале выводы являются скорее исключением, чем правилом.

В заключение следует добавить, что практика несомненно внесет коррективы в методику ГЭПИЦентра. Без практики нет полной ясности и с математическим обоснованием этой методики, поскольку математика базировалась на некоторых очевидных для авторов допущениях. Но вот проблема: очевидны ли эти допущения для окружающей нас реальности?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список тестов ГЭПИЦентра

- тест 1 — активность избирателей при выборах в Совет Федерации;
- тест 2 — процентное соотношение проголосовавших за лидера в Совет Федерации (СФ);
- тест 3 — процентное соотношение проголосовавших против всех в СФ;
- тест 4 — активность избирателей по партийным спискам в СФ;
- тест 5 — за лидера партии в СФ;
- тест 6 — против всех партий в СФ;
- тест 7 — активность при голосовании в Государственную Думу (ГД);
- тест 8 — за лидера в ГД;
- тест 9 — против всех партий в ГД;

- тест 10 — активность избирателей при голосовании за Конституцию;
тест 11 — процент, проголосовавших «за» Конституцию;
тест 12 — процент, проголосовавших «против» Конституции;
тест 13 — активность избирателей;
тест 14 — за лидера;
тест 15 — против всех.

Тесты 1 – 12 относятся к голосованию 12.12.93.

Тесты 13 – 15 относятся к голосованию 20.03.94.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Построение территориальной выборки для организации социального мониторинга в социально-трудовой сфере. Формирование сети респондентов для проведения опросов* // Отчет по теме: х/д N 18-94 от 12.09.94. Омск: ГЭПИЦентр, 1995.
2. Герасимович А.И., Матвеева Я.И. *Математическая статистика*. Минск: Высшая школа, 1978.
3. Уилкинсон Дж., Райнш К. *Справочник алгоритмов на Алголе. Линейная алгебра*. М.: Машиностроение, 1976.
4. Беллман Р. *Введение в теорию матриц*. М.: Наука, 1976.
5. Эфрон Б. *Нестандартные методы непараметрической статистики*. М.: Наука, 1984.
6. Вапник В.Н. *Восстановление зависимостей по эмпирическим данным*. М.: Наука, 1979.
7. Уилкс С. *Математическая статистика*. М.: Наука, 1967.
8. Закс Ш. *Теория статистических выводов*. М.: Мир, 1975.

АРХИВНЫЕ ИСТОЧНИКИ

(Научный архив Центра гуманитарных, социально-экономических и политических исследований – 1)

9. Отдел 03 фонд 02 сектор 01 дело 152. Построение территориальной выборки для организации социального мониторинга в социально-трудовой сфере. Формирование сети респондентов для проведения опросов // Отчет по теме: х/д N 18-94 от 12.09.94. Омск: ГЭПИЦентр, 1995.

10. Отдел 04 фонд 03 сектор 05 дело 005. Результаты Всероссийского референдума о доверии президенту РФ 25.04.1993 г. Отдел 04 фонд 03 сектор 05 дело 018. Результаты голосования по выборам в Государственную Думу РФ 12.12.1993 г.
11. Отдел 04 фонд 03 сектор 05 дело 033. Описание границ избирательных участков г.Омска по выборам в Государственную Думу РФ 12.12.1993 г.

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Н.Ф. Жихалкина

In this article the dynamic approach to the cluster-analyze problems is suggested. Algorithm which based on the gravitational laws is used to look for clusters.

При решении задач классификации наблюдений рассматриваются взаимосвязи большого числа признаков. Увеличение размерности и, как следствие, потеря обозримости результатов приводят к задачам, требующим сведения множества характеристик к небольшому ряду обобщающих итогов. Объединение признаков и замена их одним, искусственно построенным на их основе, легло в основу такого направления математической статистики, как многомерный анализ. Наиболее значимыми его разделами являются кластерный анализ (классификация объектов) и факторный анализ (исследование связей).

В общем случае под кластерным анализом понимается методология проведения классификации неоднородных статистических совокупностей.

Пусть множество $I = \{I_1, \dots, I_N\}$ обозначает N объектов, принадлежащих одному классу α , $C = \{C_1, \dots, C_k\}$ – множество наблюдаемых показателей или характеристик, которыми обладает каждый элемент из I . Характеристики C_j , $j = 1, \dots, k$, как правило, являются количественными и называются измерениями. Пусть r_{ij} – результат измерения j -й характеристики объекта I_i , тогда $\vec{r}_i = [r_{ij}]$ – вектор измерений для i -го объекта. Таким образом, для множества объектов I имеется множество векторов измерений $\mathcal{R} = \{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\}$. Это множество может быть представлено как N точек в k -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^k$.

Задача кластерного анализа заключается в том, чтобы на основе данных, содержащихся в множестве $\mathcal{R}$, разбить множество объектов I на s , $s < N$ кластеров (подмножеств) $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, так, чтобы $\forall j \in [1, \dots, N] \exists! d \in [1, \dots, s]: I_j \subset \alpha_d$ и чтобы объекты, принадлежащие одному кластеру, были «сходными» или «однородными», а разным кластерам – «разнородными» [2]. Далее необходимо количественно определить понятия «сходства» и «разнородности». Для

этой цели используется функция расстояния или метрика [2, 6]. Таким образом, задача кластеризации представляет собой проблему выделения однородных групп объектов. Существует несколько подходов к ее решению [6]:

1. Вероятностно-статистический подход – выделение групп, каждая из которых представляет реализацию некоторой случайной величины.

2. Вариационный подход – разделение совокупности по некоторому признаку на группы в соответствии с определенными интервалами.

3. Структурный подход (далее, согласно [6], под кластерным анализом будем понимать именно это направление) – выделение компактных групп объектов, удаленных друг от друга, а также поиск «естественного разбиения» совокупности на области скопления объектов (визуализация данных). Этот подход используется для двух видов исходных данных: матриц близости или расстояния между объектами и объектов, представляющих точки в многомерном пространстве.

Методы решения задач кластерного анализа [2, 3, 5, 6] подразделяются на три группы [6]:

1. Процедуры прямой классификации (эвристический подход) – выделение кластеров с заранее заданными свойствами (например, среднее межточечное расстояние внутри кластера меньше среднего расстояния от данных точек до остальных). Имеется набор определений кластера. Искомое разбиение зависит от выбора конкретного определения. В рамках этого направления развиваются иерархические процедуры, алгоритмы диагонализации, эталонные процедуры [6] и др.

2. Оптимизационное направление – решением задачи является разбиение, удовлетворяющее некоторому критерию оптимальности. Этот критерий представляет собой функционал, называемый целевой функцией. Примером такого функционала является внутригрупповая сумма квадратов отклонений [2].

3. Аппроксимационные методы – отношения, заданные в исходных данных, требуется наилучшим образом аппроксимировать отношением, отвечающим требованию о классификации.

Среди методов прямой классификации можно выделить подкласс алгоритмов, в которых вначале задается *число* кластеров, а затем происходит *разделение* объектов [6]. Тем самым решение задачи кластеризации разбивается на два этапа:

- 1) определение числа кластеров;
- 2) распределение объектов между кластерами.

В задачах классификации в зависимости от природы как рассматриваемых объектов, так и наблюдаемых показателей, *проблема определения числа кластеров* может представлять отдельный интерес.

Для ее решения предлагается «гравитационный» метод, основанный на динамике системы точек в k -мерном евклидовом пространстве, координаты которых определяются векторами измерений $\vec{r}_i$, $i = 1, \dots, N$. При этом в качестве меры близости или однородности объектов рассматривается евклидова метрика $d(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = [\sum_{j=1}^k (r_{1j} - r_{2j})^2]^{1/2}$.

В целом, стандартные методы кластеризации характеризуются тем, что

множество данных, полученное в процессе наблюдений, статично. Существуют алгоритмы, в которых динамически меняется положение кластера (алгоритм эталонного типа «Форэль-1», эвристические приемы перемещения объектов в исходном пространстве [6] и др.). Оказывается, что привнесение динамики в систему исходных данных также может быть полезным как при определении числа кластеров, так и при последующей группировке объектов.

Предлагаемый метод кластеризации основан на аналогиях с задачей N тел [7], известной из механики, что послужило причиной выбора названия - «гравитационный». В методе также происходит преобразование координат k -мерного вектора, названное «отражением», которое представляет собой аналог оператора рекомбинации в эволюционных алгоритмах оптимизации [9].

ШАГ 0: Будем рассматривать множество векторов измерений $\vec{r}_i$, $i = 1, \dots, N$ как систему материальных точек с равными массами в пространстве $\mathbb{R}^k$, распределенных внутри некоторого k -мерного гиперкуба. Пусть n – номер итерации, $n := 0$.

ШАГ 1: Происходит взаимодействие материальных точек под действием гравитационных сил на основе закона тяготения (задача N тел). Строится модель взаимодействия частиц без столкновений. Используя разностную схему «с перешагиванием», осуществляется переход от дифференциальных уравнений к конечно-разностной аппроксимации производных [7].

Алгоритм основан лишь на аналогиях с реальными процессами. При этом обязательным требованием остается прямая зависимость силы взаимодействия между частицами от их массы. Обратная зависимость этой силы от степени расстояния может варьироваться, что приводит к различным реализациям предлагаемого метода (в классической механике сила взаимного притяжения обратно пропорциональна расстоянию между частицами, возведенному в степень $(k-1)$, где $k > 2$ – размерность пространства). Вводится ряд ограничений. Во-первых, при вычислении координат берется среднее значение скорости за последние два шага по времени, во-вторых, начальные скорости частиц равны нулю, и это условие сохраняется на каждом шаге, тем самым скорости не накапливаются [4]. Окончательно, опираясь на законы движения Ньютона, формулы расчета координат взаимодействующих частиц при работе алгоритма принимают вид [4, 7]:

$$\begin{cases} \vec{a}_i^{n+1} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (\vec{r}_j^n - \vec{r}_i^n)}{|\vec{r}_j^n - \vec{r}_i^n|^{k_1}} \\ \vec{r}_i^{n+1} = \vec{r}_i^n + \frac{\lambda_i^n}{2} (\vec{a}_i^n + 2\vec{a}_i^{n+1}) \\ \vec{r}_i^0 = \vec{r}_{i_0}. \end{cases}$$

Настраиваемыми параметрами алгоритма являются:

- 1) «шаг по времени» λ_i^n ;
- 2) радиус взаимодействия R_1 , который либо задается на основе некоторых эвристических соображений, либо зависит от размерности пространства и числа взаимодействующих материальных точек [4]. Каждая точка $\vec{r}_i^n$ взаимодействует лишь с теми точками $\vec{r}_j^n$, которые попали в сферу с центром в $\vec{r}_i^n$ радиуса R_1 ;
- 3) $k_1 \in [1, \dots, k]$.

ШАГ 2: ($k \geq 2$) «Отражение» в координатной плоскости Oxy : x -координата точки вычисляется через y -координаты «соседей». Ось Ox выбирается случайным образом из k координатных осей используемой системы координат, ось Oy задается аналогично. Таким образом, выбор плоскости «отражения» происходит по схеме Бернулли с вероятностью успеха $p_{cross} = \frac{1}{k(k-1)}$ [8].

$$\begin{cases} x_i^{n+1} = x_i^n + \mu_i^n \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (y_j^n - y_i^n)}{\|\vec{r}_j^n - \vec{r}_i^n\|^{k_2}} \\ y_i^{n+1} = y_i^n - \mu_i^n \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j (x_j^n - x_i^n)}{\|\vec{r}_j^n - \vec{r}_i^n\|^{k_2}}. \end{cases}$$

Как и на шаге 1, настраиваемыми параметрами являются μ_i^n , радиус взаимодействия R_2 и $k_2 \in [1, 2]$.

ШАГ 3: $n := n + 1$. Переход на шаг 1. В общем случае в качестве критерия остановки задается число итераций.

Согласно классификации методов кластерного анализа, приведенной в [6], основными отличительными чертами предложенного метода являются:

- по характеру отношения, которое отыскивается как результат кластеризации: метод строит разбиение с пересекающимися кластерами;
- по степени участия человека в процедуре выделения кластеров: человек участвует в процессе построения разбиения;
- по объему необходимых априорных сведений для работы алгоритма (задание параметров): число кластеров неизвестно, но задано пороговое значение величины близости (радиус взаимодействия).

В программной реализации гравитационного метода каждая точка наделяется массой, равной единице ($m_i \equiv 1$). Важным параметром является радиус взаимодействия. Естественнo предположить, что его величина должна быть мала в сравнении с линейными размерами рассматриваемой области, λ_i^n и μ_i^n не зависят ни от номера итерации, ни от вектора состояния и равны константам. Степени расстояния k_1, k_2 выбираются равными двум независимо от размерности задачи.

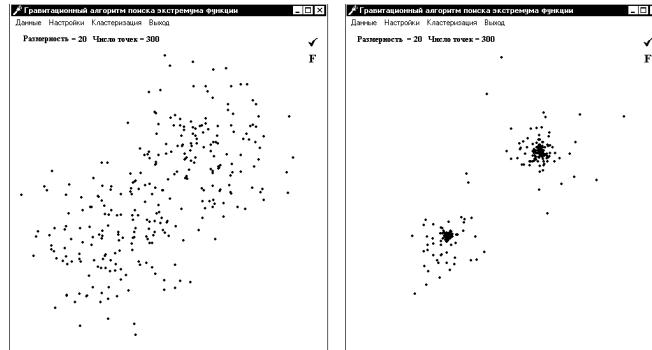


Рис. 1. Размерность пространства = 20, число точек = 300

Первый этап тестирования алгоритма проходил на выборках с по координатным нормальным законом распределения [8]. На рисунках 1, 2, 3 представлены начальные (слева) и конечные (справа) конфигурации. В силу того,

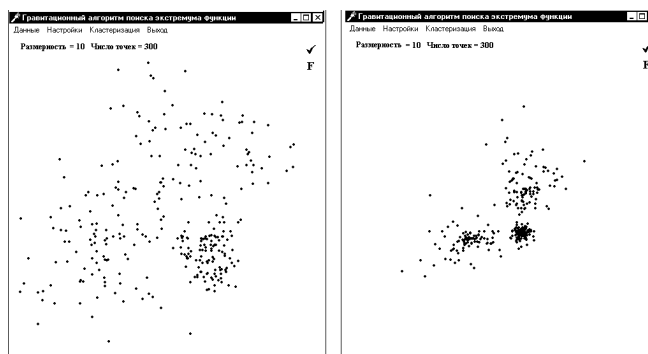


Рис. 2. Размерность пространства = 10, число точек = 300

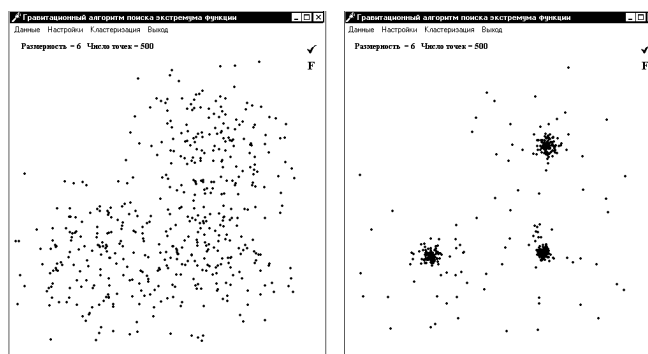


Рис. 3. Размерность пространства = 6, число точек = 500

что координаты точек имеют независимое распределение, результаты расчетов приведены для одной координатной плоскости. Использовалось несколько выборок (рис. 1 – две, рис. 2, 3 – три), отличающихся друг от друга математическим ожиданием и дисперсией. Число полученных кластеров совпадает с исходными данными, а центры областей скопления точек согласуются с математическими ожиданиями заданных распределений.

Дальнейшая апробация алгоритма проводилась на базе социологических данных обобщенной активности избирателей по различным параметрам для городов Надым и Омск [1]. Каждому избирательному участку отвечала материальная точка в пространстве, размерность которого совпадала с количеством оценочных параметров. Векторы наблюдений принадлежали отрезку $[0, 1]$, иными словами, область распределения точек представляла собой единичный гиперкуб. Отметим, что поиск кластеров производился как для полного объема данных, так и для различных проекций. В ходе численных экспериментов получены следующие результаты: для обоих городов (Омск – 447 избирательных участков, 15 параметров активности; Надым – 38 избирательных участков, 22 параметра активности) при достаточно малом шаге по времени (0.005) и зависимости радиуса взаимодействия от размерности пространства разделения на кластеры не наблюдается (рис. 4, 5), конечная конфигурация представляет собой один кластер со сгущением плотности в центре. Наличие одного кластера является подтверждающим фактором одномодальности рас-

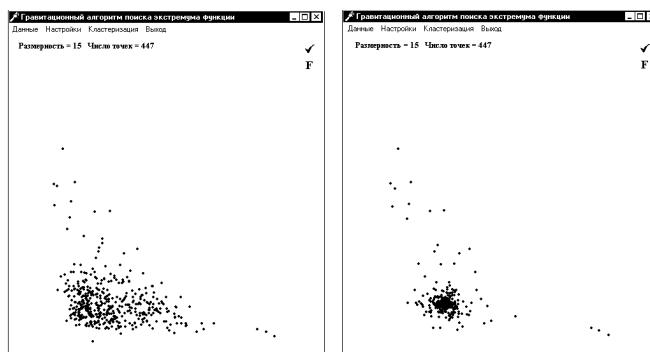


Рис. 4. Данные по Омску

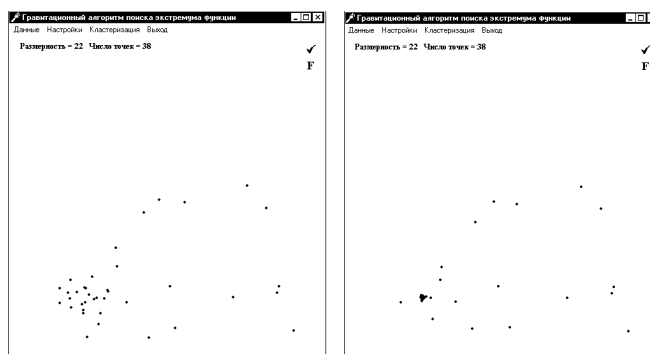


Рис. 5. Данные по Надыму

пределения исходной выборки [1].

Необходимо отметить, что на данном этапе разработки метода обработка полученных результатов (число кластеров, их взаимное расположение и т.д.) проводилась визуально. Подобная практика применяется на начальном шаге решения задач прямой классификации. В ряде случаев визуализация данных позволяет выявить некоторые регулярные структуры и получить априорную информацию об имеющихся кластерах. Кроме того, динамический подход к задаче кластеризации дает возможность проследить формирование новых кластеров в процессе эволюции системы, что может оказаться полезным при решении задач прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К., Файзуллин Р.Т. *Математическое исследование методики организации одного социального мониторинга* // Наст. сборник.
2. Дюран Б., Оделл П. *Кластерный анализ*. М.: Статистика, 1977. 128 с.
3. Жамбю. М. *Иерархический кластер – анализ и соответствия*. М.: Финансы и статистика, 1988. 342 с.

-
4. Жихалкина Н. Ф., Файзуллин Р. Т. *Гравитационные аналогии в задаче оптимизации* // Математические структуры и моделирование. 1998. Омск: ОмГУ. Вып. 2. С.60–76.
 5. *Классификация и кластер* / Ред. Дж. Вэн Ройзин. М.: Мир, 1980.
 6. Мандель И.Д. *Кластерный анализ*. М.: Финансы и статистика, 1988. 176 с.
 7. Поттер П. *Вычислительные методы в физике*. М.: Мир, 1975. С.162–193.
 8. Чистяков В. П. *Курс теории вероятностей*. М.: Наука, 1982. 156 с.
 9. Reeves C. R. *Genetic Algorithms for the Operations Reseacher* // INFORMS Journal on Computing. V.9. N 3. 1997. P.231–250.

МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В РЕГРЕССИОННЫХ И АДАПТИВНЫХ МОДЕЛЯХ ПРИ АНАЛИЗЕ ДИНАМИЧЕСКИХ РЯДОВ

И.П. Геращенко

Theoretical foundations of forecasting in adaptive and regression models and applications of these models in dynamic sequences analysis are regarded in the article. The statistical conditions of adequacy of the chosen model to the investigated process are discussed. The efficiency of the adaptive and regression models using for demographic processes forecasting is shown. A level of birth rate in Omsk region is analyzed with the help of considered models. The conclusion is made about the greatest conformity of the investigated process to the adaptive model with the factor of smoothing 0.6 and to the regression polynomial model with $k = 3$. It is emphasized that it is better to use the adaptive model to forecast demographic parameters when a non-stable socio economic situation holds. Regression models should be applied to the analysis of the phenomena having stable general laws of development during the period of the forecast

Информационной базой для анализа социально-экономических процессов являются динамические ряды. Динамические ряды качественно отличаются от простых статистических выборок. Эти отличия заключаются в следующем:

- последовательные во времени уровни временных рядов являются взаимозависимыми, особенно это относится к близко расположенным наблюдениям;
- в зависимости от момента наблюдения уровни во временных рядах обладают разной информативностью: информационная ценность наблюдений убывает по мере их удаления от текущего момента времени;
- с увеличением количества уровней временного ряда точность статистических характеристик не будет увеличиваться пропорционально числу наблюдений, а при появлении новых закономерностей развития она может даже уменьшиться.

При исследовании динамических рядов обычно выделяют четыре основных составляющих [1, 2]: долговременную эволюторно изменяющую составляющую

(T), долгосрочные циклические колебания (K), краткосрочные циклические колебания (S) (сезонную компоненту) и случайную составляющую (E):

$$Y = f(T, K, S, E).$$

Три первые составляющие, в принципе, представляют собой тренд, т.е. детерминированную составляющую. Случайная составляющая образована в результате суперпозиции большого числа внешних факторов, которые не участвуют в формировании детерминированной составляющей и оказывают, каждый отдельно, незначительное влияние на изменение показателя. В целом влияние этих факторов на изучаемый показатель проявляется в изменении во времени его значений. В зависимости от взаимосвязи факторов может быть построена аддитивная или мультипликативная модель ряда динамики. Аддитивная модель ряда динамики ($Y = T + K + S + E$) характеризуется главным образом тем, что характер циклических и сезонных флуктуаций остается постоянным. В мультипликативной модели ряда динамики ($Y = T K S E$) характер циклических и сезонных флуктуаций остается постоянным только по отношению к тренду.

Основная задача анализа динамических рядов состоит в выделении на основе знания отрезка ряда $\{y_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ детерминированной и случайной составляющих, а также в оценке их характеристик. Получив оценки детерминированной и случайной составляющих, можно решать задачи прогноза будущих значений как самого динамического ряда, так и его составляющих.

В случае аддитивной модели динамический ряд может быть представлен следующим образом:

$$y_t = f(t, x_t) + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (1)$$

где y_t – значения динамического ряда; $f(t, x_t)$ – детерминированная составляющая; x_t – значения детерминированных признаков, влияющих на детерминированную составляющую в момент времени t ; e_t – случайная составляющая; T – длина ряда.

Ряды динамики, у которых в качестве признака упорядочения используется время, называются временными (трендовая модель):

$$y_t = f(t) + e_t. \quad (2)$$

Они состоят из последовательных значений (уровней) показателя, характеризующего состояние процесса в определенные, как правило, равноотстоящие друг от друга моменты времени, причем каждый показатель представлен в большинстве случаев лишь одним временным рядом.

Для аппроксимации тенденции изменения исследуемого показателя применяют аналитическое выравнивание, используя при этом разнообразные математические функции, в которых задействован только один фактор – время. В общем случае соотношение (2) принимает следующую форму [3]:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i(t) + e_t, \quad (3)$$

где $\varphi_i(t)$ – известные функции времени. Например, в случае полиномиальной зависимости $\varphi_i(t) = t^i$, при экспоненциальной зависимости формула (3) преобразуется в соотношение

$$y_t = \alpha_0 e^{\alpha_1 t} + e_t, \quad (4)$$

а в простейшем случае линейного тренда – в

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + e_t. \quad (5)$$

Априорные предположения о форме тренда могут быть сформулированы в виде рабочей гипотезы. На практике прибегают к анализу графического изображения уровней динамического ряда. Целесообразно использовать для этих целей графическое изображение сглаженных уровней, в которых случайные и волнообразные колебания в некоторой степени погашены. При выборе вида зависимости $f(t, x_t)$ часто используют метод конечных разностей, который основан на свойствах различных кривых, применяемых при выравнивании динамических рядов. Например, в случае рабочей гипотезы о постоянстве абсолютных приростов (первая разность): $f(t+1) - f(t) = \Delta_1 = \text{const}$, и нулевом значении абсолютных приростов $\Delta_2 = \Delta_1(t+1) - \Delta_1(t) = 0$ приходим к линейному тренду. По Б. С. Ястремскому [4] для аналитического выравнивания динамического ряда применима линейная функция, если любые три равностоящих уровня имеют нулевую вторую разность. Порядок разностей, остающихся примерно равными друг другу, принимается за степень полинома, т.е., если примерно одну и ту же величину имеют вторые разности, то для выравнивания используется парабола второго порядка. Если же имеет место гипотеза постоянства темпов роста

$$\frac{f(t+1)}{f(t)} = \text{const},$$

то получаем экспоненциальный тренд (4), который в логарифмах приводится к линейному.

Если тренд линеен относительно своих параметров или может быть сведен к линейному посредством преобразований, а случайная составляющая имеет известную матрицу ковариаций, то задача сводится к задаче множественной регрессии. Обозначив $\varphi_i(t)$ через x_{ti} , уравнение (3) можно переписать в матричной форме:

$$Y = X\alpha + e,$$

где Y – вектор-столбец значений уровня ряда; α – вектор-столбец коэффициентов уравнения регрессии; e – вектор-столбец отклонений фактических от выравненных значений; X – матрица значений $\varphi_i(t)$, включая единичный столбец, отвечающий свободному члену.

Параметры тренда оцениваются по методу наименьших квадратов [5], т.е. подбираются таким образом, чтобы график функции роста располагался на минимальном удалении от точек исходных данных. Математически критерий оценки параметров регрессионной модели записывается следующим образом:

$$\sum \{y(t) - y_t\}^2 \rightarrow \min, \quad (6)$$

где y_i определяется по формуле (3). Оценки коэффициентов тренда получают из соотношений:

$$\alpha = (X^T X)^{-1} X Y, \quad M(\alpha) = \alpha, \quad S_\alpha^2 = \sigma^2 (X^T X)^{-1}. \quad (7)$$

Оценку дисперсии случайной составляющей получают по формуле

$$S^2 = \frac{1}{T - k - 1} \sum_{t=1}^T (Y(t) - y_t)^2 = \frac{1}{T - k - 1} \sum_{t=1}^T e_t^2, \quad (8)$$

где y_t рассчитывается по формуле $y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i(t)$.

Прогнозные значения детерминированной составляющей для случая независимых уровней остаточной компоненты можно определить или вычислить на основе экстраполяционных методов. Точечный прогноз детерминированной составляющей на глубину τ выполняется по формуле

$$f(T + \tau) = Y(T + \tau) = X^T \alpha = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i(t + \tau). \quad (9)$$

Причем

$$M[f(T + \tau)] = f(T + \tau), \quad \text{а} \quad D[f(T + \tau)] = \sigma^2 X^T(T + \tau) (X^T X)^{-1} X(T + \tau),$$

где $X^T(T + \tau) = [1, \varphi_1(T + \tau), \dots, \varphi_k(T + \tau)]$.

Интервальный прогноз для детерминированной составляющей на глубину τ при условии, что случайная составляющая имеет нормальное распределение, задается следующей формулой:

$$f(T + \tau) - t_p S_{f(T+\tau)} \leq f(T + \tau) \leq f(T + \tau) + t_p S_{f(T+\tau)}, \quad (10)$$

где $t_p = St^{-1}(p, T - k - 1)$ — доверительная граница распределения Стьюдента с $T - k - 1$ степенями свободы, соответствующая уровню значимости p , а $S_{f(T+\tau)}$ определяется по формуле

$$S_{f(T+\tau)} = S \sqrt{X^T(T + \tau) (X^T X)^{-1} X(T + \tau)}.$$

В том случае, если тренд нелинеен относительно коэффициентов и его невозможно линеаризовать, применяют нелинейные методы оценки коэффициентов, основанные на итерационных процедурах, на каждом шаге которых используются алгоритмы линейных оценок. В качестве одного из таких методов нелинейного оценивания можно предложить метод Ньютона-Гаусса [3]. Кроме этого, часто используют для линеаризации тренда метод разложения в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми, реже — вторыми производными [6]:

$$Y(t) = f[\varphi(t), \alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots, \alpha_{0k}] + \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} (\alpha - \alpha_{0i}) + \dots + e.$$

Аналитическое уравнение представляет собой математическую модель развития явления и дает выражение статистической закономерности, проявляющейся в рядах динамики. Следует помнить, что прием аналитического выравнивания на основе регрессионных моделей содержит в себе ряд условностей, связанных прежде всего с тем, что уровни, характеризующие тот или иной динамический ряд, рассматриваются как функции времени. В действительности развитие явлений обусловлено не тем, сколько времени прошло с отправного момента, а тем, какие факторы влияли на развитие, в каком направлении и с какой интенсивностью. Развитие явлений во времени выступает как внешнее выражение этих факторов, как их суммарное действие, оказывающее влияние на изменение уровня в отдельно взятые промежутки или моменты времени. Выявить основную тенденцию развития методом наименьших квадратов можно лишь тогда, когда выяснено, что изменяющиеся во времени процессы протекают на всем рассматриваемом промежутке времени одинаково, что их количественное и качественное изменение происходит под действием одного и того же комплекса основных факторов, определяющих движение данного ряда динамики.

Модели, учитывающие общие закономерности изменения социально-экономического явления в изучаемый интервал времени и изменения во времени влияния комплекса факторов, называют многофакторными динамическими моделями [7]. Допустим, что величина исследуемого показателя $y(t)$ зависит от изменения нескольких факторов: $x_1, x_2, \dots, x_m$. Располагая данными по некоторой совокупности объектов за ряд лет, можно построить корреляционную модель, характеризующую зависимость $y(t)$ от указанных факторов для каждого периода времени. Связь между переменной $y(t)$ и m независимыми факторами можно охарактеризовать функцией регрессии $y(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, которая показывает, каково в среднем значение переменной $y(t)$, если переменные x примут конкретные значения. Данное обстоятельство позволяет использовать модель регрессии не только для анализа, но и для прогнозирования социально-экономических явлений.

Предположим, что зависимость может быть представлена линейной функцией. Тогда модель будет иметь вид:

$$\text{для периода } t = 1: y_1 = a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m;$$

$$\text{для периода } t = 2: y_2 = a_{02} + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m;$$

$$\text{для периода } t = 3: y_3 = a_{03} + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + \dots + a_{m3}x_m; \text{ и т.д.}$$

Для всех периодов получим систему из T уравнений, и для каждого из факторов будет T коэффициентов регрессии, т.е. будем иметь временные ряды для каждого из коэффициентов регрессии:

$$\begin{array}{cccccc} a_{01} & a_{02} & a_{03} & \dots & a_{0T} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1T} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mT} \end{array}$$

Рассматривая каждый из этих временных рядов, можно представить a_m как

функцию времени и, используя аналитическое выравнивание методом регрессионного анализа, построить прогнозы коэффициентов регрессии на период времени t , т.е. определить значения величин $a_{0t}, a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{mt}$.

Тогда величина признака y на период t может быть представлена как:

$$y_t = a_{0t} + a_{1t}x_1 + a_{2t}x_2 + \dots + a_{mt}x_m. \quad (11)$$

Значения факторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ необходимо определить также на момент времени t . Обычно для этого используют либо контрольные цифры, либо экстраполяцию по линии тренда.

В динамических процессах в большинстве практических случаев сбор данных или весьма затруднителен, или связан с большими затратами, поэтому чаще всего каждому значению зависимой переменной $y(t)$ соответствует только одно наблюдение независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$. Тогда уравнение (11) преобразуется в следующее соотношение:

$$y(t) = a_0 + a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \dots + a_mx_m(t), \quad (12)$$

и его коэффициенты определяются методом наименьших квадратов по формуле (7). Интервальная оценка прогноза для Y , определяемая в точке $X(T+\tau) = (1, x_{1T+\tau}, x_{2T+\tau}, \dots, x_{mT+\tau})$ определяется по формуле аналогичной (10).

Следует подчеркнуть, что прогноз уровня, характеризующего определенный объект с опорой на метод аналитического выравнивания, основан на предположении, что те же самые условия, в которых формировались уровни ряда в прошлом, будут существовать и в будущем. Использование экстраполяции в изменившихся условиях, появление новых факторов, оказывающих влияние на формирование уровней временного ряда, будет сопряжено с более или менее значительными ошибками. Причем экстраполяция на отдаленные даты подвержена более значительным ошибкам, чем краткосрочная экстраполяция. Это в известной степени может объясняться определенной инерционностью развития управляемых объектов: чем выше уровень управления, тем более инерционен объект управления. Однако с удалением периода прогноза от фактических уровней временного ряда влияние инерционности развития снижается и возрастает влияние новых условий и факторов. Поэтому целесообразно постоянно обновлять временные ряды по мере получения новых данных, что обуславливает и корректировку уровней ряда.

Выделим особенности модели аналитического выравнивания уровней динамического ряда методом регрессионного анализа, которые накладывают ограничения на ее использование. Во-первых, динамические ряды, к которым применяется аппроксимация, должны быть достаточно длинными. Во-вторых, применение аппроксимации наиболее целесообразно в случае медленно и плавно меняющегося уровня. В-третьих, аппроксимация как метод моделирования практически не адаптируется к изменяющимся условиям формирования уровней ряда; при появлении новых данных построение модели должно быть проведено заново. В-четвертых, при использовании для расчета параметров уравнения

метода наименьших квадратов считается, что значимость информации в пределах отрезка аппроксимации одинакова независимо от давности полученных данных, в то время как более поздние данные имеют большую ценность.

Кроме этого, динамические ряды социально-экономических показателей часто имеют небольшую длину и подвержены значительным колебаниям, которые аппроксимация предвидеть не может. А в случае прогнозирования наиболее важным является не тенденция развития исследуемого процесса, сложившаяся в среднем на всем периоде предыстории, а последние значения этого процесса. Свойство динамичности развития экономического явления здесь преобладает над свойством его инерционности. Поэтому при прогнозировании более эффективными являются методы, учитывающие неравноценность уровней временного ряда и быстро приспосабливающие свою структуру и параметры к изменяющимся условиям. В практике анализа социально-экономических процессов такие методы получили название адаптивных методов моделирования и прогнозирования.

В основе адаптивных методов лежит модель экспоненциального сглаживания, возможность которой для прогнозирования была доказана Р. Брауном [3]. В отличие от линейных и нелинейных временных трендов, где на основании известного отрезка временного ряда $\{y_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ необходимо было постулировать форму тренда с точностью до параметров, метод экспоненциального сглаживания позволяет анализировать временной ряд и получать прогноз без предварительного задания формы тренда. Требуется лишь, чтобы в области исследования тренд изменялся достаточно постепенно, эволюторно.

Сущность метода экспоненциального сглаживания заключается в том, что временной ряд сглаживается с помощью взвешенной скользящей средней, в которой веса распределяются по экспоненциальному закону. Наблюдения входят в обработку не с одинаковыми, а с экспоненциально убывающими весами, т.е. настоящие наблюдения воспринимаются с большим доверием, чем прошлые. Такая взвешенная скользящая средняя характеризует значения динамического ряда в конце интервала сглаживания, т.е. является характеристикой последних уровней ряда. В основе экспоненциального сглаживания лежит следующая теоретико-вероятностная схема:

$$y_t = f(t) + e_t, \quad M(e_t) = 0, \quad D(e_t) = \sigma^2, \quad \text{cov}(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j. \quad (13)$$

Из первоначального временного ряда $\{y_t, t = 1, 2, \dots, T\}$ сглаженный ряд $S_t(y)$ можно получить с помощью линейного оператора сглаживания:

$$S_t(y) = \alpha y_t + (1 - \alpha)S_{t-1}(y) \quad (14)$$

или для последнего уровня:

$$S_T(y) = \alpha y_T + \alpha(1 - \alpha)y_{T-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{T-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{T-2} y_2 + (1 - \alpha)^T y_1,$$

где α – константа сглаживания, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Оператор сглаживания линеен, поэтому, применяя его к отдельным составным частям теоретико-вероятностной схемы (13), можно в результате сложения получить результат сглаживания всего ряда.

Оператор сглаживания можно вновь применить к уже сглаженным значениям; в результате получим оператор сглаживания второго порядка. Применяя несколько раз оператор сглаживания, а также, подбирая соответствующим образом константу сглаживания, можно практически исключить случайную составляющую, в результате останется только преобразованная детерминированная составляющая.

Одним из главных преимуществ экспоненциального сглаживания в отличие, например, от метода скользящей средней, является то, что существует возможность построения аналитического выражения для прогнозных оценок уровней динамического ряда. Теорема Брауна, являющаяся фундаментальной в методе экспоненциального сглаживания, утверждает, что коэффициенты полиномов, по которым производится прогнозирование, определяются с помощью дисконтированного метода наименьших квадратов и аналитически выражаются через сглаженные значения ряда. Тогда для прогнозирующего полинома степени N имеем:

$$y_{T+\tau} = a_0^{(T)} + \sum_{i=1}^N \frac{a_i^{(T)}}{i!} \tau^i. \quad (15)$$

По этому полиному можно получать прогноз в точках $(T + \tau)$. Коэффициенты полинома определяются из условия:

$$\alpha \sum_{\tau=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{\tau} \left(y_{t-\tau} - \sum_{i=1}^N \frac{a_i^{(t)}}{i!} \tau^i \right)^2 \rightarrow \min.$$

При $N = 1$ имеем:

$$y_{t+\tau} = a_0^{(t)} + a_1^{(t)} \tau, \quad (16)$$

и для коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0^{(t)} &= 2S_t^1(y) - S_t^2(y) \\ a_1^{(t)} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha} [S_t^1(y) - S_t^2(y)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Расчетное значение в момент времени t получаем по формуле (16):

$$y_t = a_0^{(t-1)} + a_1^{(t-1)} \tau, \quad \text{где } \tau = 1. \quad (18)$$

Для прогнозирования наиболее часто используют квадратичный полином, т.е. $N = 2$. В этом случае формулы (16), (17) примут вид:

$$y_{t+\tau} = a_0^{(t)} + a_1^{(t)} \tau + \frac{a_2^{(t)}}{2} \tau^2, \quad (19)$$

и для коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_0^{(t)} &= 3S_t^1(y) - 3S_t^2(y) + S_t^3(y), \\ a_1^{(t)} &= \frac{\alpha}{2(1 - \alpha)} [(6 - 5\alpha)S_t^1(y) - 2(5 - 4\alpha)S_t^2(y) + (4 - 3\alpha)S_t^3(y)], \\ a_2^{(t)} &= \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha)^2} [S_t^1(y) - 2S_t^2(y) + S_t^3(y)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассчетное значение в момент времени t получаем по формуле

$$y_t = a_0^{(t-1)} + a_1^{(t-1)}\tau + \frac{1}{2}a_2^{(t-1)}\tau^2, \quad \text{где } \tau = 1. \quad (21)$$

Для расчетов удобнее использовать рекуррентные формулы [3, 5], эквивалентные (17), (20), где для корректировки параметров используется ошибка прогноза:

$$e(t) = y(t) - y_t, \quad (22)$$

где y_t определяется по формулам (18) и (21).

При $N = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} a_0^{(t)} &= y(t) + (1 - \alpha)^2 e(t), \\ a_1^{(t)} &= a_1^{(t-1)} + \alpha^2 e(t). \end{aligned} \quad (23)$$

При $N = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} a_0^{(t)} &= y(t) + (1 - \alpha)^3 e(t), \\ a_1^{(t)} &= a_1^{(t-1)} + a_2^{(t-1)} - \frac{3}{2}\alpha^2(2 - \alpha)e(t), \\ a_2^{(t)} &= a_2^{(t-1)} + \alpha^3 e(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Из этих формул видно, что при появлении нового наблюдения необязательно хранить весь предыдущий отрезок временного ряда, надо лишь знать коэффициенты прогнозирующего полинома, найденные по этому отрезку.

Для прогнозирования на глубину τ за пределы известного отрезка используют прогнозирующий полином (15). Но если в окрестности точки T детерминированная составляющая близка к постоянной, применяют аппарат однократного экспоненциального сглаживания, и прогноз определяют по формуле

$$y(T + \tau) = S_T^1(y), \quad (25)$$

а доверительный интервал прогноза равен:

$$Y(T + \tau) \in \left[S_T^1(y) \pm t_p(T - 1)S\sqrt{\frac{\alpha}{2 - \alpha}} \right]. \quad (26)$$

Если в окрестности точки T детерминированная составляющая линейна, то применяют двойное экспоненциальное сглаживание, и точечный прогноз осуществляют по формуле (18) при $t = T$, а доверительный интервал прогноза определяют по формуле (10) или из следующего соотношения:

$$Y(T + \tau) \in \left[y_{T+\tau} \pm t_p(T - 2)S\sqrt{\frac{\alpha[1 + 4(1 - \alpha) + 5(1 - \alpha)^2 + 2(4 - 3\alpha)\tau + 2\alpha^2\tau^2]}{(2 - \alpha)^3}} \right]. \quad (27)$$

Если детерминированная составляющая нелинейна в окрестности T , то применяют тройное экспоненциальное сглаживание и точечный прогноз определяется формулой (19) при $t = T$.

Экспоненциальное сглаживание как метод выравнивания лежит в основе более сложных методов адаптивного моделирования. Например, Уинстером [4, 5] была предложена модель, учитывающая сезонную составляющую динамического ряда.

Анализ применимости той или иной модели для экстраполяции уровней динамики должен основываться на ее адекватности исследуемому процессу [8, 9]. Модель является адекватной, если математическое ожидание остаточного ряда близко или равно нулю и значения остаточного ряда случайны, независимы и подчинены нормальному закону распределения.

Проверка равенства математического ожидания уровней ряда остатков нулю осуществляется с использованием t -критерия Стьюдента:

$$t = \frac{|\overline{e(t)}|}{S_e} \sqrt{T}, \quad (28)$$

где $\overline{e(t)}$ – среднее значение уровней остаточного ряда; S_e – среднее квадратическое отклонение уровней остаточного ряда. Гипотеза отклоняется, если $t > t_{кр}$, определенного по таблице Стьюдента с заданным уровнем значимости.

Проверку случайности уровней остатков можно провести методом пиков. В соответствии с ним каждый уровень ряда сравнивается с двумя рядом стоящими. Если он больше или меньше их, то эта точка считается поворотной и $p_t = 1$, в противном случае $p_t = 0$. Далее подсчитывается сумма поворотных точек $p = \sum_{t=1}^T p_t$. В случайном ряду чисел должно выполняться строгое неравенство:

$$p > \left[\frac{2(T-2)}{3} - 2\sqrt{\frac{16T-29}{90}} \right]. \quad (29)$$

Квадратные скобки обозначают целую часть числа.

При проверке независимости (отсутствия автокорреляции) определяется отсутствие в ряду остатков систематической составляющей. Это можно проверить на основе d -критерия Дарбина-Уотсона, основанного на автокорреляции первого порядка ($e_t = \rho e_{t-1} + \varepsilon_t$):

$$d = \frac{\sum_{t=2}^T [e(t) - e(t-1)]^2}{\sum_{t=1}^T e^2(t)}. \quad (30)$$

Вычисленная величина этого критерия сравнивается с двумя табличными уровнями: d_l – нижний и d_u – верхний уровни, которые определяются в зависимости от числа наблюдений T и количества регрессоров k . Если d находится в интервале от 0 до d_l , то уровни остатков сильно коррелированы $\rho \neq 0$,

корреляция между уровнями положительная, а модель не адекватна. Если его значение попадает в интервал от d_u до 2, то уровни ряда являются независимыми $\rho = 0$. Если d превышает 2, то это свидетельствует об отрицательной корреляции и перед анализом его величину надо преобразовать: $d^* = 4 - d$. В случае $d_l < d < d_u$ ситуация не определена, т.е. однозначного вывода сделать нельзя и необходимо применение других критериев, например, первого коэффициента автокорреляции $r(1)$, являющегося точечной оценкой параметра ρ и определяемого по формуле

$$r(1) = \frac{\sum_{t=2}^T e(t)e(t-1)}{\sum_{t=1}^T e^2(t)}. \quad (31)$$

Присутствие в остаточном ряду существенной автокорреляции подтверждается, если первый коэффициент автокорреляции значим.

Если ошибки в исходной модели коррелированы по времени, а именно, образуют авторегрессионный процесс первого порядка, то для улучшения прогнозирования можно в качестве оценки величины $Y(T + \tau)$ использовать не $X^T \alpha$, а

$$f(T + \tau) = Y(T + \tau) = X^T \alpha + \rho e_t = X^T \alpha + \rho[Y - X^T \alpha], \quad (32)$$

где ρ заменяют его точечной оценкой $r(1)$.

Соответствие ряда остатков нормальному закону распределения определяют различными методами, например, с помощью RS -критерия:

$$RS = \frac{e_{\max} - e_{\min}}{S_e}, \quad (33)$$

где $e_{\max}$, $e_{\min}$ – максимальный и минимальный уровень остатков. Если значение критерия попадает между табулированными, то гипотеза о нормальном распределении ряда принимается.

Для характеристики точности модели можно воспользоваться коэффициентом детерминации R^2 , определяющим долю дисперсии $y(t)$, объясненную регрессией y_t , или средней относительной ошибкой:

$$\overline{e_{\text{отн}}} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T \frac{|e(t)|}{y(t)} \cdot 100\%. \quad (34)$$

Если величина относительной ошибки менее 5% , модель достаточно точно описывает исследуемый процесс, ошибка 15% считается приемлемой.

Если построенная модель адекватна, т.е. выполняются все вышеперечисленные требования, то с выбранной доверительной вероятностью можно утверждать, что при сохранении сложившихся закономерностей развития социально-экономического явления прогнозируемая величина попадет в доверительный интервал, предсказанный на основе выбранной модели.

Покажем эффективность использования регрессионных и адаптивных моделей для прогнозирования демографических процессов. Демографические прогнозы представляют существенную часть социальных и естественно-научных прогнозов и служат мощным аналитическим средством познания и управления развития обществом. Они дают возможность вовремя заметить нежелательные отклонения в демографическом развитии страны или региона и принять соответствующие меры по их устранению. Демографические прогнозы являются основной и исходной базой для подготовки прогнозов в области трудовых ресурсов. Они необходимы также для того, чтобы заранее предусмотреть возникновение возможных диспропорций между будущей возрастной структурой населения и будущими объемами социальных требований. Так, изменение численности детей того или иного возраста необходимо учитывать при планировании развития здравоохранения, просвещения, а также многих отраслей промышленности. На базе перспективной численности определяются как будущие ресурсы общества, так и потребность общества в тех или иных благах. Поэтому для социально-экономического планирования развития страны или региона важно, чтобы эти прогнозы были как можно более достоверны.

Проанализируем на основе вышеприведенных моделей рождаемость в Омской области в 90-е годы. В таблице 1 приведены данные по анализу адекватности адаптивной модели при различных коэффициентах сглаживания и регрессионной модели при различных значениях регрессора $k = 1, 2, 3$. Адекватность модели оценивали при доверительной вероятности 90% и $T = 11$, анализ статистики Дарбина - Уотсона и RS -критерия проводили при уровне значимости 5%.

Таблица 1

	Адаптивная модель						Регрессионная модель		
	Коэффициент сглаживания						Степень полинома		
	0,1	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
S_e	3864,6	1511,7	1234,0	1213,2	1228,8	1269,7	1490,7	831,9	736,8
R^2							0,960	0,982	0,988
t	3,10	2,24	1,09	0,73	0,47	0,28	0,12	0,22	0,25
p	4	5	5	6	4	4	4	4	5
d	0,1	0,77	1,47	1,74	1,96	1,86	0,56	1,47	1,71
$r(1)$	0,83	0,61	0,21	0,05	-0,07	-0,18	0,599	0,133	0,063
RS	1,85	2,20	3,01	3,34	3,54	3,65	3,301	2,88	3,46
$\overline{\epsilon_{отн}}$	13,5%	5,2%	4,4%	4,3%	4,1%	4,1%	4,71%	2,88%	2,44%

На основании приведенных данных можно сделать вывод, что наибольшее соответствие исследуемому процессу достигается в адаптивных моделях с коэффициентом сглаживания 0,6-0,9 и в регрессионных моделях с $k = 2, 3$. В линейной регрессионной модели в остаточном ряду присутствует существенная положительная автокорреляция.

В таблице 2 представлены точечные оценки прогноза уровней динамического ряда до 2004 года. Прогнозы по линейной регрессионной зависимости построены с учетом авторегрессионного процесса первого порядка. Анализ точечных прогнозов показывает, что в случае адаптивной модели оценки значений уровня ряда убывают с увеличением коэффициента сглаживания, но

в целом наблюдается значительное уменьшение уровней до 75% от уровня 1999 года. В регрессионных моделях прогнозируется также уменьшение рождаемости. Линейная регрессия дает уменьшение уровней в 2 раза по сравнению с 1999 годом. В случае же параболической зависимости, начиная с 2001 года, прогнозируется рост рождаемости, что не является следствием сложившейся демографической ситуации в области. Прогноз по полиномиальной зависимости с $k = 3$ показывает уменьшение уровня, аналогичное адаптивной модели.

Таблица 2

Год	Фактические данные	Адаптивная модель			Регрессионная модель		
		$\alpha = 0,6$	$\alpha = 0,7$	$\alpha = 0,8$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1993	23300	23820	23690	23520	26200	24850	24560
1996	21500	20590	21080	21440	21560	20660	20950
1998	19800	18740	18740	18630	18470	19360	19440
1999	18500	18790	19000	19190	16922	19160	18790
2000	—	17600	17598	17530	15380	19260	18128
2001	—	16660	16650	16525	13830	19660	17390
2002	—	15720	15700	15520	12280	20360	16510
2003	—	14780	14760	14520	10737	21350	15430
2004	—	13840	13800	13520	9190	22650	14090

Любой прогноз должен основываться на знании природы прогнозируемого явления. В случае демографических прогнозов следует помнить, что население воспроизводится под непосредственным влиянием социально-экономических условий, поэтому необходима тесная взаимосвязь демографических прогнозов и перспектив социально-экономического развития региона. Так, кризис 17 августа 1998 года и последовавшие за ним негативные перемены в экономической ситуации изменили складывавшиеся ранее тенденции стабилизации рождаемости в регионе, и, как следствие, повлияли на прогнозируемые оценки. В условиях нестабильности экономики, и тем более кризисных явлений в ней, происходящих в последние годы в России, обоснование ожидаемых изменений уровня рождаемости представляет достаточно сложную задачу. Если в ближайшие годы удастся преодолеть кризисные явления в экономике, приостановить падение промышленного производства и восстановить нормальное развитие рынка, то можно ожидать постепенную стабилизацию уровня рождаемости. Если достичь успеха в этом не удастся, то снижение уровня рождаемости продолжится, и стабилизация будет возможна на более низком уровне к концу периода прогноза.

С точки зрения социально-экономического характера исследуемого явления, при сохранении сложившихся закономерностей развития наибольшее предпочтение можно отдать адаптивной модели с коэффициентом сглаживания 0,6 и полиномиальной модели с $k = 3$. Хотя использование полиномиальной модели для долгосрочных прогнозов динамики рождаемости не оправдано, т. к. уже к 2010 году точечный прогноз по этой модели представлен отрицательным числом, в случае же адаптивной модели уровень рождаемости 2010 года

составляет только 50% от уровня 1999 года. В таблице 3 показаны доверительные интервалы прогнозов для этих моделей до 2004 года, рассчитанные с доверительной вероятностью 80%.

Таблица 3

Год	Адаптивная модель $\alpha = 0,6$		Полиномиальная модель $k = 3$	
	Нижняя граница	Верхняя граница	Нижняя граница	Верхняя граница
2000	16680	18530	17200	19050
2001	15700	17620	16430	18350
2002	14720	16720	15510	17510
2003	13740	15830	14390	16480
2004	12740	14930	13000	15180

В целом можно отметить, что рассмотренные модели прогнозирования дают достаточно достоверные прогнозные оценки уровней динамики рождаемости. Сравнение наших данных с результатами прогнозов Госкомстата РФ [10, 11], показывает, что прогнозируемый Госкомстатом уровень рождаемости в общем попадает в доверительные пределы наших прогнозов. Отсутствие тенденции к стабилизации уровня в наших расчетах, в отличие от прогнозов Госкомстата, связано с учетом падения уровня рождаемости в 1999 году.

Следует подчеркнуть, что адаптивная модель более приемлема для краткосрочных прогнозов и быстрее адаптируется к последним событиям. Поэтому для прогнозирования демографических показателей в условиях нестабильной социально-экономической ситуации лучше использовать эту модель. При анализе явлений, общие закономерности развития которых не меняются в течение периода прогноза, регрессионные модели являются достаточно адекватными исследуемому явлению и позволяют делать более длительные прогнозные оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсен Т. *Статистический анализ временных рядов*. М.: Мир, 1976. 155 с.
2. *Теория статистики* / Под ред. Р. А. Шмойловой. М.: Финансы и статистика, 1998. 576 с.
3. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. *Теория вероятностей и математическая статистика*. М.: Высшая школа, 1991. 400 с.
4. Ефимова М.Р., Петрова Е.В., Румянцев В.Н. *Общая теория статистики*. М.: ИНФРА-М, 1997. 416 с.
5. Четыркин Е.М. *Статистические методы прогнозирования*. М.: Статистика, 1975. 183 с.
6. Болч Б., Хуань К.Дж. *Многомерные статистические методы для экономики*. М.: Статистика, 1979. 317 с.
7. Ковалева Л.Н. *Многофакторное прогнозирование на основе рядов динамики*. М.: Статистика, 1980. 103 с.

8. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. *Эконометрика*. Начальный курс. М.: Дело, 1977. 248 с.
9. Доугерти К. *Введение в эконометрику*. М.: ИНФРА-М, 1997. 402 с.
10. *Предположительная численность населения Российской Федерации до 2015 года* // Статистический бюллетень. М.: Госкомстат России, 1998.
11. Волков А.Г. *Население и рабочая сила в Российской Федерации. Тенденции и перспективы* // Вопросы статистики. 1999. N 10. С.39-45.

ГУМАНИТАРИЗАЦИЯ ОБЩЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Т.Н. Алешкова

A general achievement in culturalogical field was origin of new educational philosophy. Its aims are to educate personality which is responsible for destiny of civilisation to create conditions for forming and opening of creative potential of each personality. One of directions realizing aims of philosophy is humanitarization. It proposes to turn educational process to personality, to account its interests and to create conditions for personal development by means of learning subjects. This intends to find contents richable by general culture, new forms and educational methods directing to creative activity. In this article psychological and methodical approaches to solution of problem of humanitarization are considered

1. Гуманитаризация общего математического образования

В XX веке развитие цивилизации сопровождалось бурным научно-техническим прогрессом, который не всегда использовался во благо человечества, в гуманных целях. В середине XX века многие философы обнародовали свое мнение о том, что наступает кризис цивилизации, технический рост привел к кризисным явлениям в экономической, экологической, социально-культурных областях и, наконец, о том, что перед человечеством уже много раз стоял вопрос собственной безопасности. Таким образом, в философии возродился со времен Средневековья термин философии гуманизма. Спроецировав все вышесказанное на сферу образования оказалось, что цели и содержание современного образования не отвечают требованиям и интересам отдельной личности. Таким образом, возникла новая философия образования. Ее парадигма – воспитать личность, ответственную за судьбу цивилизации, создать условия для формирования и раскрытия творческого потенциала каждой личности, формирования у нее гуманного мировоззрения.

© 2000 Т.Н. Алешкова

E-mail: aleshkova@math.omsu.omskreg.ru

Омский государственный университет

Одним из направлений, осуществляющих цели философии образования, является гуманитаризация. Это мировое явление, а не только отечественное, в нем отражаются общие глобальные процессы. В России гуманитаризация как направление перестройки современного образования появилась в конце 80-х годов. В нормативном документе Министерства образования РФ «Реформа образования в России и государственная политика в сфере образования» сказано, что она «направлена на поворот образования к целостной картине мира— мира культуры, мира человека, на очеловечивание знания, на формирование гуманитарного и системного мышления» [9, с. 14].

Каждый из исследователей этой проблемы вскрывает термин «гуманитаризация» через свое видение путей ее осуществления.

Прежде всего выделим этимологию слова «гуманитарный». Оно происходит от латинского слова «humanitas», что означает «духовная культура». Применительно к школьному математическому образованию, Г.И.Саранцев отмечает, что «смысл гуманитаризации состоит в том, чтобы приобщить ученика к духовной культуре, творческой деятельности, вооружить его методами научного познания» [10, с. 43].

Разработчики концепции школьного математического образования считают, что «основным направлением перестройки содержания и методов обучения математике является реализация ее более тесной связи с практической деятельностью, поворот обучения к человеку, к его многообразным связям с окружающим миром, усиление общекультурной и общеобразовательной значимости изучаемого материала» [1, с. 28].

Многим исследователям проблемы гуманитаризации пути ее осуществления видятся в обновлении всех компонентов методической системы, ее направленности на развитие личности.

Как справедливо заметили многие ученые-педагоги (В.А.Далингер, Г.В.Дорофеев, И.М.Чередов и др.), до недавнего времени школьное образование было нацелено на усвоение знаний, умений и навыков. В связи с этим в учебном процессе преобладали репродуктивные, объяснительно-иллюстративные методы, удельный вес знаний давался самим учителем, поэтому основной формой школьного урока был рассказ учителя.

Подобный подход привел к негативным последствиям: была забыта личность учащегося, ее интересы и такая важная цель школы, как всестороннее гармоничное развитие личности. Для решения этой проблемы необходим новый взгляд на личность ученика, понимание человека как самоценности, а следовательно, требуется другая методическая система обучения.

Как отметил Г.В.Дорофеев, «основной задачей перестройки школьного образования на современном этапе развития общества представляется переориентация методической системы обучения на приоритет развивающей функции обучения по отношению к его образовательной, информационной функции, перенос акцента с увеличения объема информации, предназначенной для усвоения учащимися, на формирование умений использовать информацию, то есть в самых общих терминах, переход от экстенсивного школьного образования к интенсивному. ...Идея приоритета развивающей функции обучения математике

является, по существу, формой гуманитаризации математического образования, его ориентации на формирование подрастающего человека как интеллектуальной личности» [3, с. 2]. Поэтому главная задача среднего образования с точки зрения гуманитаризации - не увеличение информации, не энциклопедичность приобретаемых знаний, а развитие мышления и эмоциональной сферы школьников.

Проблему развития личности в процессе обучения математике рассматривает В.А.Далингер: «степень развитости ученика измеряется и оценивается его способностью самостоятельно приобретать новые знания, способностью использовать в учебной и практической деятельности уже полученные знания» [2, с. 8]. Он считает, что в связи с новым взглядом на систему образования обучение должно строиться по формуле: «Овладение = Усвоение + Применение знаний на практике» [2, с. 8]. Методисты Г.Д.Глейзер, В.А.Далингер, Г.В.Дорофеев, Т.А.Иванова, А.А.Касьян, Н.Розов, Г.И.Саранцев, И.М.Чередов отмечают важность учета личности в реализации гуманитаризации. Так, А.А.Касьян подчеркивает, что «гуманитаризовать образование — значит сделать его личностно-ориентированным, субъективно значимым для каждого человека» [5, с. 20]. Г.В.Дорофеев отмечает, что гуманитаризация предполагает предоставить каждому человеку «возможности для получения математической подготовки, максимально соответствующей его интересам и склонностям ...» [3, с. 3]. Т.А.Иванова указывает в качестве первостепенного компонента в гуманитаризации — структуру личности и подробно излагает материалы исследования психологов в области этой проблемы [4, с. 125-126]. Под гуманитаризацией обучения математике мы понимаем (согласно Т.А.Ивановой) обновленную «традиционную систему с включенным в нее элементом — психологической структурой личности».

Далее мы будем придерживаться этой трактовки процесса гуманитаризации, поэтому выявим сущность психологической структуры личности.

Современные психологи в структуре личности выделяют четыре подструктуры. Первая подструктура связана с направленностью личности, в которую входят убеждения, мировоззрение, идеалы, стремления, интересы, желания. Вторая подструктура представляет социальный опыт в широком его понимании и связана с формированием привычек, знаний, умений и навыков. Третья подструктура включает особенности психических процессов: волю, чувства, восприятие, мышление, ощущения, эмоции, память. Четвертая подструктура определяет психические свойства личности: темперамент, половые, возрастные свойства [7]. Все эти подструктуры находятся во взаимосвязях, и при этом личность - это сплав «биогенных, психогенных и социогенных элементов» [6, с. 8]. Но личность развивается и формируется под воздействием специально организованной деятельности. В ходе развития («становления») личности изменяются ее качества, происходит:

- развитие функциональных механизмов психики;
- усвоение опыта;
- воспитание типологических свойств личности.

Этот триединый процесс становления личности и его результат принято

именовать образованием личности или просто образованием [6, с. 16]. Таким образом, процесс образования отождествляется с процессом развития личности. А следовательно, обучение математике предполагает обновление содержания образования, поиск новых методов и форм уроков.

Анализ литературы показывает, что достаточно широко обсуждался вопрос обновления всех компонентов традиционной методической системы. Так, в российской педагогической энциклопедии отмечено, что «гуманитаризация образования — система мер, направленная на приоритетное развитие общекультурных компонентов в содержании образования и таким образом на формирование личностной зрелости обучающихся» [8, с. 239-240].

Философ А.А.Касьян отмечает, что гуманитаризация предполагает «теоретически осмыслить развитие науки, выявить субъективные компоненты ... социально-культурного значения науки, освоение учащимися уже существующего знания данного типа» [5, с. 20].

Если предыдущие исследователи указывали на проблему выявления «общекультурных» компонентов в содержании образования, то в работах [3, 10] указаны некоторые компоненты, которые осуществляют пути реализации гуманитаризации.

Так, «усиление практического и прикладного аспектов в преподавании математики должно происходить за счет отбора содержания, богатого приложениями, выявления отчетливых связей математических понятий с практической деятельностью человека ... Для формирования представлений учащихся о математике как части общечеловеческой культуры в содержание школьного курса должны органически вплестаться богатые в эмоциональном отношении эпизоды истории науки ...» [1, с. 28-29]. Г.И.Саранцев отмечает, что в содержание образования, «кроме предметных знаний включаются действия, адекватные математическим понятиям, теоремам, общенаучные методы познания, а также специальные методы, эвристические приемы и различные эвристики» [10, с. 43]. Г.В.Дорофеев предлагает включить в традиционное содержание некоторые разделы математики (стохастику, логику, алгоритмику) [3, с. 5]. По его мнению, эти знания в дополнение к традиционным осуществляют связь с наукой, практикой и культурой и составляют «в достаточной мере полноценную содержательную основу школьного образования» [3, с. 5].

Далее в исследовании мы будем придерживаться точки зрения Т.А.Ивановой, которая в содержании общего математического образования выделила гуманитарный потенциал, включающий [4, с. 127]:

- предмет и метод математики, ее ведущие идеи и понятия, связь с другими науками и практикой (математическое моделирование), математический язык;
- процесс познания в математике;
- специфику творческой деятельности;
- методы научного познания (как общие эвристические и логические, так и частные, специфические);
- культуру мышления, включающую и стиль научного мышления;
- историю математики.

2. Цели общего математического образования

Проблемой постановки целей общего математического образования с точки зрения гуманитаризации занимались Г.В.Дорофеев, Т.А.Иванова, Г.И.Саранцев.

Направленность гуманитаризации на достижение воспитательных целей отмечает В.М.Монахов. Он подчеркивает, что «гуманитаризация усиливает мировоззренческую направленность естественно-научных предметов, целостное воспитательное воздействие на школьника».

Для анализа целей математического образования воспользуемся теорией постановки целей, разработанной В.П.Беспалько, И.Я.Лернером, Б.Блумом. Согласно их концепции, выделяют содержание целей и способы их задания. Дидактическая цель должна отражать содержание образования и поставлена «диагностично» (по В.П.Беспалько), т. е. таким образом, чтобы можно было установить — достигнута она или нет. К тому же, согласно Б.Блуму, цель должна отражать уровень усвоения знаний (знание, понимание, применение, анализ, синтез, оценка). После выявления критериев для анализа поставленных исследователями математического образования целей перейдем к непосредственному анализу.

Г.В.Дорофеев формулирует цели следующим образом [3, с. 3]:

- овладение комплексом математических знаний, умений и навыков;
- формирование и развитие качеств мышления, необходимых образованному человеку для полноценного функционирования в современном обществе, в частности формирование эвристического и алгоритмического мышления;
- формирование и развитие абстрактного мышления, а прежде всего его дедуктивной составляющей как специфической для математики;
- формирование и развитие у учащихся потребности и способности непрерывно и целенаправленно расширять и углублять свои знания;
- формирование математического языка и математического аппарата как средства описания и исследования окружающего мира и его закономерностей, в частности как базы компьютерной грамотности;
- ознакомление с ролью математики в развитии человеческой цивилизации, в научно-техническом прогрессе, в современной науке и производстве;
- ознакомление с природой научного знания, с принципами построения научных теорий в единстве и противоположности математики и естественных наук;
- формирование и развитие морально-этических качеств личности, адекватных процессу полноценной математической деятельности.

Г.И.Саранцев выделяет три группы целей общеобразовательного, воспитательного и практического характера.

Первая включает овладение системой математических знаний, умений и навыков, дающих представление о предмете математики, ее языке и символике, моделировании, специальных приемах, об алгоритме, периодах развития математики.

Воспитательные цели сводятся к формированию мировоззрения учащихся,

овладению логической и эвристической составляющими мышления, становлению алгоритмического мышления, воспитанию нравственности, культуры общения, самостоятельности, активности, трудолюбия. ...

К практическим целям математического образования отнесем: формирование умений строить модели простейших реальных явлений, исследовать явления по заданным моделям, конструировать приложения моделей; приобщение к опыту творческой деятельности; ознакомление с ролью математики в научно-техническом прогрессе и современном производстве [10, с. 43].

Таким образом, поставленные цели отражают гуманитарно-ориентированное содержание математического образования, но не диагностичны и не выявляют уровень усвоения знаний.

Поэтому в своем исследовании мы будем использовать цели, сформулированные Т. А. Ивановой. Они представляют собой сплав образовательных, воспитательных и развивающих целей в их традиционном понимании и являются диагностичными.

Итак, выпускник общеобразовательной школы математически образован, если он:

- знает сущность предмета математики;
- имеет представления об особенностях математического метода познания действительности;
- имеет представления о том, что сама математика является методом познания действительности;
- знает ведущие понятия математики и умеет оперировать ими;
- владеет математическим языком и математической символикой;
- имеет представление о математическом моделировании, умеет строить модели простейших реальных явлений и процессов;
- имеет представление о прикладных аспектах математики;
- имеет представление о влиянии математики на социальное развитие общества и наоборот;
- приобщился к опыту творческой математической деятельности и умеет применять его в других видах деятельности;
- осознает гносеологический процесс познания в математике;
- знает основные общенаучные методы познания (эвристические и логические) и умеет применять их как в математической деятельности, так и в других видах деятельности;
- знает специальные (частные) математические методы и приемы и умеет применять их для решения математических и прикладных задач;
- овладел культурой мышления;
- овладел культурой общения, культурой труда;
- имеет представление об основных периодах развития математической науки как части общечеловеческой культуры [4, с. 135].

3. Заключение

Таким образом, гуманитаризация математического образования, являясь следствием нового подхода к образованию, призвана создать условия для формирования и раскрытия творческого потенциала каждой личности. Смысл гуманитаризации математического образования состоит в том, чтобы приобщить ученика к творческой деятельности, вооружить его методами научного познания. Пути ее реализации имеют следующие основные направления (психологические и методические):

- 1) перенос акцента с усвоения объема знаний на развитие личности;
- 2) развитие общекультурных компонентов содержания образования, усиление прикладного и практического аспектов в преподавании математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуманитарная направленность общеобразовательного курса математики. К концепции школьного математического образования* // Математика в школе. 1989. N 2. С.20–30.
2. Далингер В.А. *Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей* / ОмИПКРО. Омск, 1993. 323 с.
3. Дорофеев Г.В. *О принципах отбора содержания школьного математического образования* // Математика в школе. 1990. N 6. С.2–5.
4. Иванова Т.А. *Гуманитаризация общего математического образования: Монография*. Нижний Новгород: Изд-во НГПУ, 1998. 206 с.
5. Касьян А.А. *Гуманитаризация образования: некоторые теоретические предпосылки* // Педагогика. 1998. N 2. С.17–22.
6. Леднев В.С. *Содержание образования: сущность, структура, перспективы*. М., 1991. 224 с.
7. Платонов К.К. *Структура и развитие личности*. М., 1986. 255 с.
8. *Российская педагогическая энциклопедия: В 2 т.* М.: Большая Российская энциклопедия, 1993. Т.1. 608 с.
9. *Реформа образования в России и государственная политика в сфере образования* // Вестник образования. 1992. N 10. С.2–25.
10. Саранцев Г.И. *Гуманитаризация и гуманизация школьного математического образования* // Педагогика. 1999. N 4. С.39–45.

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Т.Н. Алешкова

Psychologists notes that for successful learning of knowledge, learning material should to acquire meaning for scoolar. For this, motivs and needs shoud to arise at scoolar. One of the means of forming motivation is teaching of history of mathematics. It does some didactional functions: 1) it is tool of developmnt of interest to mathematics, 2) it activates learning process, 3) it creates positiv emotions. In this article psycological investigations in the field of motivation are considered and the role of teaching of history of mathematics in forming of motivation is ascertained

1. Значение мотивации в учебном процессе. Ее компоненты

Нами ранее отмечалось, что гуманитаризация образования направлена на развитие личности. Психологами (Дж.Брунер, А.К.Маркова, В.Д.Шадриков, Н.М.Зверева) отмечено, что для полноценного развития личности необходимо обеспечить условия реализации этапов процесса познания: подготовка к восприятию, восприятие, осмысление информации, закрепление и применение, контроль. Очевидно, что для усвоения гуманитарного потенциала содержания математики необходимо, чтобы он приобрел значимость для учащегося. Для этого у личности должны возникнуть мотивы и потребности.

В практике обучения мотивация рассматривается в двух аспектах: с одной стороны, мотивация — категория психологическая, с другой — это результат разнообразных мероприятий методического и педагогического характера. Изложим более подробно эти два подхода в определении мотивации.

Л.М.Фридман под мотивацией понимает «совокупность побуждений к деятельности» [9]. Мотивационная сфера состоит из ряда побуждений: «идеалов и ценностных ориентаций, потребностей, мотивов, целей, интересов и др.»

[6, с. 7]. Такой же классификации придерживается другой известный психолог С.Л.Рубинштейн. Он отмечает, что «потребности, интересы, идеалы составляют различные стороны ... мотивации ...» деятельности личности [8, с. 532].

Дадим психологические характеристики отдельных сторон мотивационной сферы учения.

2. Потребности

Всякая деятельность начинается с потребностей. А.К.Маркова, А.Б.Орлов и Л.М.Фридман дают следующее определение: «Потребность— это направленность активности ребенка, психическое состояние, создающее предпосылку деятельности» [6, с. 7].

Психофизические основы потребностей глубоко раскрыты в работах П.Я.Гальперина. Он рассматривает потребность как побуждение, влечение к цели. «Потребность,— пишет он,— именно в качестве психологического образования становится источником и основанием целестремительности» [3, с. 62]. Целестремительность отсутствует среди физических процессов, и ее вообще нет до тех пор, пока в организме не возникнет противоречие. Что это за противоречие? Это требование действовать, но не так, как умеет организм, а иначе, причем еще не известно как. Результатом выхода из этого противоречия является образование психического отражения ситуации. Его П.Я.Гальперин называет потребностью.

Потребности имеют две функции:

- они являются предпосылкой к деятельности, это означает, что деятельность вне потребности, без потребности не существует; любая деятельность удовлетворяет какие-то потребности человека;
- они направляют и регулируют конкретную деятельность человека [9].

Существует взаимосвязь и взаимообусловленность познавательной потребности и познавательной активности. Так, без потребности не пробуждается активность ребенка, у него не возникают мотивы, он не готов к постановке целей.

Проблема формирования познавательной потребности рассмотрена в исследованиях ряда психологов (Б.Г.Ананьев, Л.И.Божович, П.Я.Гальперин, Н.Ф.Добрынин, А.Н.Леонтьев, А.М.Матюшкин и др.) и педагогов (Д.В.Вилькеев, М.А.Данилов, В.С.Ильин, И.Я.Лернер, М.Н.Махмутов, М.Н.Скаткин, Ю.В.Шаров, Г.И.Щукина и др.). Для практики обучения важны следующие положения.

Л.И.Божович отмечает, что всякому ребенку свойственна потребность в новых впечатлениях, которая переходит в ненасыщаемую познавательную потребность. Поэтому, во-первых, «на нее учитель должен прежде всего опереться, актуализировать ее, сделать более четкой, осознанной у большинства учащихся» [5, с. 8].

Во-вторых, необходимо обеспечить переход от потребности к деятельности. Ведь познавательные потребности учащихся, которые не нашли своей реали-

зации в процессе обучения, вызывают трудности в работе с учеником. Возникают ситуации конфликтности, упрямства и другие нежелательные формы поведения. И в-третьих, учителю важно уделить внимание содержанию учебного материала, в котором реализуется познавательная потребность. Среди различных компонентов содержания образования особая роль принадлежит историко-научному материалу. Исторический материал позволяет формировать у школьников потребность в знаниях, вызывает эмоциональный отклик на слово учителя.

Таким образом, познавательная потребность школьника формируется, перестраивается, совершенствуется в ходе самой учебной деятельности в зависимости от условий ее организации, типа общения с учителем.

3. Мотивы

Главная характеристика мотивационной сферы – мотив. А.К.Маркова дает следующее определение мотива учебной деятельности: «Мотив — это направленность школьника на отдельные стороны учебной работы, связанная с внутренним отношением ученика к ней» [5, с. 18].

К видам мотивов можно отнести познавательные и социальные мотивы. Если у школьника в ходе учения преобладает направленность на содержание учебного предмета, то можно говорить о наличии познавательных мотивов. Если в учебной деятельности активность ученика направлена на отношение с другими людьми, на определение своего положения в коллективе и т. д. , то говорят о социальных мотивах.

И познавательные, и социальные мотивы могут иметь разные уровни.

3.1. Познавательные и социальные мотивы

Познавательные мотивы имеют уровни:

- 1) широкие познавательные мотивы (ориентация на овладение новыми знаниями);
- 2) учебно-познавательные мотивы (ориентация на усвоение способов добытия знаний, приемов самостоятельного приобретения знаний);
- 3) мотив самообразования (ориентация на приобретение дополнительных знаний и затем на построение специальной программы совершенствования) [6, с. 15].

Остановимся подробнее на более высоком уровне учебно-познавательных мотивов — мотиве самообразования — и дадим его психологическую характеристику.

Т.И.Шамова называет этот мотив познавательной самостоятельностью и определяет ее как «свойство личности, характеризующееся ее стремлением и умением без посторонней помощи овладевать знаниями и способами деятельности, решать познавательные задачи с целью дальнейшего преобразования и совершенствования окружающей действительности» [11].

При определении сущности познавательной потребности Т.И.Шамова исходит из того, что качества личности — интеллектуальные, эмоциональные, волевые — социально обусловлены и индивидуально выражены. Это значит, что такое свойство личности, как познавательная самостоятельность, не есть врожденное свойство, а формируется в процессе воспитания. Выделим три взаимосвязанных и взаимообусловленных компонента познавательной самостоятельности:

- 1) мотивационный;
- 2) содержательно-операционный;
- 3) волевой.

Мотивационный компонент включает в себя осознанные побуждения, ведущие к целенаправленной деятельности. Содержательно-операционный компонент заключается в овладении учеником системы ведущих знаний и способов учения. Самообразование возможно только при условии, если ученик уже владеет определенной системой ведущих знаний и располагает умениями самостоятельно их добывать. Несомненно, что одного стремления к деятельности недостаточно для достижения ее цели. Школьникам необходимо для этого приложить волевые усилия, которые и являются третьим компонентом познавательной самостоятельности.

Социальные мотивы могут иметь следующие уровни:

1. Широкие социальные мотивы:

а) мотивы долга и ответственности перед обществом, классом, учителем, родителями и т. п.;

б) мотивы самоопределения (понимание значения знаний для будущего) и самосовершенствования (получить развитие в результате учения);

2. Узколичностные мотивы:

а) стремление получить одобрение, хорошие отметки (мотивация благополучия);

б) желание быть первым учеником и т.п. (престижная мотивация);

3. Отрицательные мотивы: стремление избежать неприятности со стороны учителей, родителей, одноклассников (мотивация избегания неприятностей) [10, с. 271].

3..2. Формирование мотивов в учебной деятельности

Мотив учения рассматривается А.Н.Леонтьевым в аспекте теории деятельности: «Мы называем деятельностью процессы, которые характеризуются психологически тем, что то, на что направлен данный процесс в целом (его предмет), всегда совпадает с тем объективным, что побуждает субъекта к данной деятельности, т. е. мотивом» [4, с. 518-519]. Немотивированной деятельности не бывает. Другая особенность мотива состоит в том, что он прямо связан со смыслом учения, личностной значимостью учебной деятельности. Если изменяется мотив, ради которого школьник учится, то это принципиально перестраивает и смысл всей его учебной деятельности, и наоборот.

А.К.Маркова, Т.А.Матис, А.Б.Орлов отметили, что при формировании мотивов учения необходимо «создание в школе условий для проявления внутренних побуждений (мотивов, целей, эмоций) к учению, осознание их учеником и дальнейшего саморазвития ими мотивационной сферы. Учитель при этом не занимает позицию хладнокровного наблюдателя за тем, как стихийно развивается и складывается мотивационная сфера учащихся, а стимулирует ее развитие системой психологически продуманных приемов» [5, с. 6].

При формировании новых мотивов учения учитель часто использует процесс, который в психологии обычно называют процессом «сдвига мотива на цель». Психологические аспекты этого механизма мы находим у известного психолога А.Н.Леонтьева [4, с. 521]. С каждым шагом этого процесса, в результате осознания учеником противоречия между возникшей познавательной потребностью и возможностью ее удовлетворения своими силами, появляется новый мотив. В результате осознания учебные действия ученика, которые ранее не имели для него внутренней значимости, приобретают личностный смысл. Так, А.Н.Леонтьев [4, с. 521] приводит следующий пример: на первых этапах обучения ребенок иногда выполняет домашние задания только того, чтобы его отпустили погулять. Но по мере успешного выполнения заданий и получения за них положительных оценок эта цель закрепляется, выполнение заданий приобретает для ученика новый смысл, а это значит, что появляется новый мотив учения. Поэтому в мотивационном развитии учащегося следует учитывать, как и в процессе обучения, зону ближайшего развития.

3..3. Теория ближайшего и актуального развития

Л.С.Выготский впервые определил два уровня развития ребенка: актуальный уровень и зону ближайшего развития.

Когда мы наблюдаем за развитием ребенка в школьном возрасте и за ходом его обучения, мы видим, что всякий предмет обучения требует от него больше, чем он может дать на сегодняшний день, т.е. ребенок в школе осуществляет деятельность, которая заставляет его подниматься выше самого себя [2, с. 252].

Уровень, который ребенок достигает при решении задач не самостоятельно, а в сотрудничестве со взрослым, есть зона его ближайшего развития.

Что ребенок знает и умеет на сегодняшний день, что у ребенка уже созрело, задачи, самостоятельно решаемые ребенком, образуют зону актуального развития.

Как же учитывается зона ближайшего развития в реализации механизма «сдвига мотива на цель» в учебной деятельности? В этом механизме у школьника в ходе учебной деятельности возникает познавательная потребность, которую стремился сформировать учитель. Согласно ей, всегда существует возможность удовлетворения этой потребности. Школьник начинает осознавать, каким образом он может удовлетворить ее. Если же он находится на уровне актуального развития, то он самостоятельно формирует новый мотив. Когда школьник находится в зоне ближайшего развития, то в построении нового мотива требуется помощь учителя. Таким образом, осуществляется переход от

одного уровня учебных мотивов к другому. Так, в процессе обучения ребенок сначала имеет мотив, направленный на освоение новых понятий, затем при педагогическом воздействии учителя на ребенка формируется мотив, направленный на приобретение способов получения новых знаний.

А.К.Маркова отмечает, что при изучении и формировании мотивации ученика «важно видеть не его застывшие психологические особенности, т.е. то, что уже достигнуто учеником, а самое главное — процесс становления мотивации, зону его ближайшего развития. Поэтому учителю важно выявлять не только успешность выполнения задания, но и затруднения ребенка в нем; не только фиксировать результат решения, но и способы его получения; определять не только уровни, но и переходы от одного к другому» [5, с. 8].

3.4. Возрастные характеристики мотивов учения

При оценке состояния учебной деятельности, умения учиться и мотивации учения у отдельных школьников учителю важно соотнести их с некоторыми возрастными эталонами.

Младший школьный возраст характеризуется первичным вхождением ребенка в учебную деятельность, овладением видами учебных действий. Широкие познавательные мотивы (интерес к знаниям) могут уже к середине этого возраста преобразоваться в учебно-познавательные мотивы (интерес к способам приобретения знаний); мотивы самообразования представлены пока самой простой формой-интересом к дополнительным источникам знания, эпизодическим чтением дополнительных книг. Широкие социальные мотивы развиваются от общего недифференцированного понимания социальной значимости учения, с которым ребенок приходит в первый класс, к более глубокому осознанию причин необходимости учиться, что делает социальные мотивы более действенными. Позиционные социальные мотивы в этом возрасте представлены желанием ребенка получить главным образом одобрение учителя. Мотивы сотрудничества и коллективной работы присутствуют у младших школьников, но пока в самом общем проявлении. Интенсивно развивается в этом возрасте целеполагание в учении. Так, младший школьник научается понимать и принимать цели, исходящие от учителя, удерживает эти цели в течение длительного времени, выполняет действия по инструкции. Начинает складываться умение соотнесения цели со своими возможностями [5, с. 46].

В среднем школьном возрасте, в 6-7 классах, отношение к учебной деятельности и учебная мотивация имеют двойственный и даже несколько парадоксальный характер. С одной стороны, это период, характеризующийся снижением мотивации учения, что объясняется возрастанием интереса к окружающему миру, лежащему за пределами школы, а также увлеченностью общением со сверстниками. С другой стороны, именно этот период является сенситивным для формирования новых, зрелых форм учебной мотивации, «открывает возможность перехода к новой, более высокой форме учебной деятельности, в которой для учащихся раскрывается ее смысл как деятельности по самообразованию. Переход от младшего школьного возраста к подростковому есть

одновременно переход к иной, более высокой форме учебной деятельности и новому отношению к учению, приобретающему именно в этот период личностный смысл. В среднем школьном возрасте происходит овладение общим строением учебной деятельности, способами самостоятельного перехода от одного действия к другому (от ориентировочных учебных действий к исполнительным и затем контрольно-оценочным), что является важной основой самоорганизации учебной деятельности.

Учебные действия объединяются в приемы, методы, в крупные блоки деятельности. Отдельные действия и операции свертываются, переходят в умственный план, что позволяет быстрее осуществлять учебную деятельность. Существенно развивается умение находить и сопоставлять несколько способов решения одной задачи, поиск нестандартных способов решения, что переводит учебную деятельность с репродуктивного на продуктивный уровень.

В подростковом возрасте возможно осознание своей учебной деятельности, ее мотивов, задач, способов и средств. Существенно укрепляются не только широкие познавательные мотивы, но и учебно-познавательные, для которых характерен интерес к способам приобретения знаний. Мотивы самообразования в этом возрасте поднимаются на следующий уровень, наблюдается активное стремление подростка к самостоятельным формам учебной работы, проявляется интерес к методам научного мышления.

В старшем школьном возрасте возникают потребность и возможность совершенствования своей учебной деятельности, что проявляется в стремлении к самообразованию, выходу за пределы школьной программы. Учебные действия могут перерасти в методы научного познания, способствуя смыканию учебной деятельности с элементами исследовательской. Ориентировочные и исполнительные учебные действия могут выполняться не только на репродуктивном, но и на продуктивном уровне.

В старшем школьном возрасте широкие познавательные мотивы укрепляются за счет того, что интерес к знаниям затрагивает закономерности учебного предмета и основы наук. Учебно-познавательный мотив (интерес к способам добывания знания) совершенствуется как интерес к методам теоретического и творческого мышления. Мотивы самообразовательной деятельности в этом возрасте связываются с более далекими целями, жизненными перспективами выбора профессии.

Складывается четко выраженный интерес к рациональной организации умственного труда, а также стремление к анализу индивидуального стиля своей учебной деятельности, определение сильных и слабых сторон своей учебной работы.

Происходит рождение новых мотивов профессионального и жизненного самоопределения. Развитие целеполагания в этом возрасте выражается в том, что старшеклассник при постановке системы целей учится исходить из планов своего индивидуального самоопределения, а также социальной значимости целей, предвидения социальных последствий своих поступков. Возрастает умение оценивать реалистичность целей, складывается стремление к активному апробированию разных целей в ходе активных действий, что прямо связано с

процессами жизненного самоопределения [5, с. 46-48].

Выше мы стремились показать, что наличие познавательной потребности не ведет к появлению учебной деятельности, а возникновение мотивов учения является недостаточным условием для эффективной учебной деятельности, если у школьника не сформировано умение самостоятельно ставить цели в учебной работе.

4. Цель

«Цель — это направленность активности на промежуточный результат, представляющий этап достижения предмета потребности», — дают определение А.К.Маркова, А.Б.Орлов, Л.М.Фридман [6, с.10].

Для того чтобы реализовать учебный мотив (например, овладеть приемами самообразования), надо поставить и выполнить много промежуточных целей в учебном труде: научиться видеть отдаленные результаты своей учебной деятельности, подчинить им этапы сегодняшней учебной работы, поставить цели для выполнения учебных действий, цели их самопроверки и т. д. Кроме того, надо чтобы учащиеся учились осознавать цели выполнения своих действий и соотносить их с мотивами учебной деятельности, в которую эти действия включены; учебная цель может оставаться одной и той же (например, овладение приемами самообразования), а смысл учебной деятельности будет меняться в зависимости от ее мотива (стать всесторонне развитым человеком, поступить в вуз и т. д.) [6, с.10].

5. Интерес

Другая сторона мотивационной сферы учебной деятельности — интерес к учению. Он «тесно связан с уровнем сформированности учебной деятельности и в этом плане есть выражение и проявление других сторон мотивационной сферы» [6, с.11]. В психологическом словаре [7] дано следующее определение интереса: «Интерес — форма проявления познавательной потребности, обеспечивающая направленность личности на осознание целей деятельности и тем самым способствующая ориентировке, ознакомлению с новыми фактами, более полному и глубокому отражению действительности».

5.1. Уровни учебных познавательных интересов. Роль познавательного интереса в учебной деятельности

В процессе организации учебной деятельности роль познавательного интереса многопланова:

– интерес сообщает познавательной деятельности силу, интенсивность, легкость и быстроту (В.Н.Мясищев);

– под влиянием интереса познание принимает для человека «личный смысл» (А.Н.Леонтьев);

– опираясь на интерес, вся деятельность ученика становится плодотворной (Б.Г.Ананьев).

Г.И.Щукина также указывает на то, что интерес выступает как «мощный побудитель активности личности, под влиянием которого все психические процессы протекают особенно интенсивно и напряженно, а деятельность становится увлекательной и продуктивной» [12, с. 6].

Г.И.Щукина [12] выделяет различные последовательные стадии, которые проходит интерес в своем развитии в учебной деятельности:

1. *Любознательность* — элементарная стадия, которая обусловлена чисто внешними, часто неожиданными обстоятельствами, привлекающими внимание человека. Она еще не обнаруживает подлинного стремления к познанию. И, тем не менее, занимательность как фактор выявления познавательного интереса может служить его начальным толчком.

2. *Любознательность*. На этой стадии интереса обнаруживаются достаточно сильные выражения эмоций удивления, радости познания, удовлетворенности деятельностью.

3. *Познавательный интерес* содействует проникновению личности в существенные связи, отношения, закономерности познания.

4. *Теоретический интерес* связан как со стремлением к познанию сложных теоретических вопросов и проблем конкретной науки, так и с использованием их как инструмента познания.

Из всего вышесказанного следует, что развитая мотивационная сфера создает условия, при которых внутренние усилия школьников согласуются с внешними воздействиями учителя, что и обеспечивает эффективное включение учащихся в учебно-познавательную деятельность.

6. Методика формирования мотивации

Разработаны методики осуществления мотивационного компонента учебно-познавательного процесса [1, 6, 12].

Одна из наиболее простых методик формирования мотивации — занимательность. К сожалению, в основном она способствует возникновению только лишь эпизодического интереса, а не созданию исходной установки на учебную работу.

Более эффективна методика создания мотивационно-проблемных ситуаций или специальных учебно-познавательных задач, в которых отражается практический смысл изучения данной темы. Применяя эту методику, учителю необходимо подобрать такую острую жизненную ситуацию, необходимость разрешения которой была бы совершенно необходимой, но возможной только при хорошем знании предмета.

Еще более эффективна такая методика мотивации, при которой мы обращаемся к формированию представления учащегося о роли хорошего знания предмета в его будущей профессиональной деятельности. Эффективны для данной

методики такие приемы, как убеждение, опора на положительные, впечатляющие примеры и уроки жизни.

7. Роль обучения истории математики в формировании мотивации

Широко известно, что история математики является богатейшим источником поддержания постоянного интереса к изучению математики и богата ресурсами осуществления мотивационного компонента учебно-познавательного процесса. Важно, что обучение истории математики влияет на все компоненты мотивации учения, особенно на мотивы учения.

Приведем пример. Очень часто на том или ином этапе развития человечества возникали такие острые жизненные ситуации, которые можно было решить только при хорошем знании математики. Приведение подобных примеров показывает смысл учения, ценностно ориентирует учащихся. Использование фактов историко-научного характера усиливает воспитательный потенциал учебного предмета, обогащает нравственное представление, понятия, чувства, нравственный опыт школьников.

Использование исторических сведений на уроке создает благоприятный эмоциональный фон, способствует лучшему усвоению знаний. История науки обладает множеством впечатляющих фактов, и учитель, пренебрегающий подобным материалом либо просто умалчивающий о нем, обедняет познавательный и нравственный опыт учащихся.

Следует отметить, что при включении историко-научного материала в учебный процесс выявляется целая система качественных изменений у учащихся: «развитие интереса к предмету, повышение качества ответов, активизация деятельности на уроке, возникновение потребности в самообразовании» [13, с.38].

История математики служит мощным средством повышения интереса к ней. Каждый учитель знает, какой интерес, оживление вызывают краткие экскурсы в историю математики, рассказы о биографиях выдающихся математиков, об истории развития отдельных понятий математики, ее идей и методов. Школьники с увлечением решают старинные исторические задачи, делают сообщения на исторические темы. Элементы истории математики, включенные органично в процесс обучения, способствуют не только формированию интереса к математике, но и к истории математики, побуждают учеников самостоятельно читать литературу по истории математики.

Исторический материал играет большую роль в работе со слабоуспевающими учащимися, т. е. в решении проблемы отрицательной мотивации. В данном случае учитель ищет стимулы, средства к формированию интереса к предмету. При этом историко-биографические сведения особым образом окрашивают учебный материал и делают процесс освоения знаниями более привлекательным. Ученики, ощущающие трудности в обучении, особенно откликаются на подобный материал, создающий положительные эмоции.

Таким образом, включение исторического материала в учебный про-

цесс изменяет мотивационные установки личности, формирует эмоционально-ценностное отношение к математике, дает возможность осуществить гуманитаризацию учебного процесса и тем самым способствует лучшему усвоению предмета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беспалько В.П. *Слагаемые педагогической технологии*. М.: Педагогика, 1989. 190 с.
2. Выготский Л.С. *Мышление и речь* // Собр. соч. М.: Педагогика, 1982. Т.2. 504 с.
3. Гальперин П.Я. *Введение в психологию*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 150 с.
4. Леонтьев А.Н. *Проблемы развития психики*. М.: Изд-во Моск. ун-та., 1981. 584 с.
5. Маркова А.К., Матис Т.А., Орлов А.Б. *Формирование мотивации учения*. М.: Просвещение, 1990. 192 с.
6. Маркова А.К., Орлов А.Б., Фридман Л.М. *Мотивация учения и ее воспитание у школьников*. М.: Педагогика, 1983. 64 с.
7. *Психология: Словарь* / Под общ. ред. А. В. Петровского, М. Г. Ярошевского. М.: Политиздат, 1990. 494 с.
8. Рубинштейн С.Л. *Основы общей психологии*. СПб.: ЗАО «Изд-во «Питер», 1999. 720 с.
9. Фридман Л.М. *Психолого-педагогические основы обучения математике в школе*. М.: Просвещение, 1983. 160 с.
10. Фридман Л.М., Кулагина И.Ю. *Психологический справочник учителя*. М.: Совершенство, 1998. 432 с.
11. Шамова Т.И. *Активизация учения школьников*. М.: Педагогика, 1982. 208 с.
12. Щукина Г.И. *Проблема познавательного интереса в педагогике*. М.: Педагогика, 1971.
13. Ярошевский М.Г., Зорина Л.Я. *История науки и школьное обучение*. М.: Знание, 1978. 48 с.

МОДЕЛИ ВЗАИМОСВЯЗИ ЗНАНИЙ И ПРИЕМОВ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ ИХ УСВОЕНИЯ

Л.И. Боженкова

Various models of intercommunication of knowledges and methods of pupil's educational-cognitive activity are considered in the article. There is also considered the question of the forming at the pupil the modelling method as one of the most frequently used one during the mathematics studying

Познавательная деятельность включает в себя систему определенных действий и входящих в них знаний. Выделяют общие и специфические виды (приемы) познавательной деятельности. Общие виды используются в разных областях знаний, специфические действия отражают особенности изучаемого предмета и используются в пределах данной области знаний [7]. На основе анализа классификаций приемов учебно-познавательной деятельности, выполненных учеными-психологами, с учетом взаимосвязи общих и специфических приемов, составлена следующая классификация [4, 5, 7, 8].

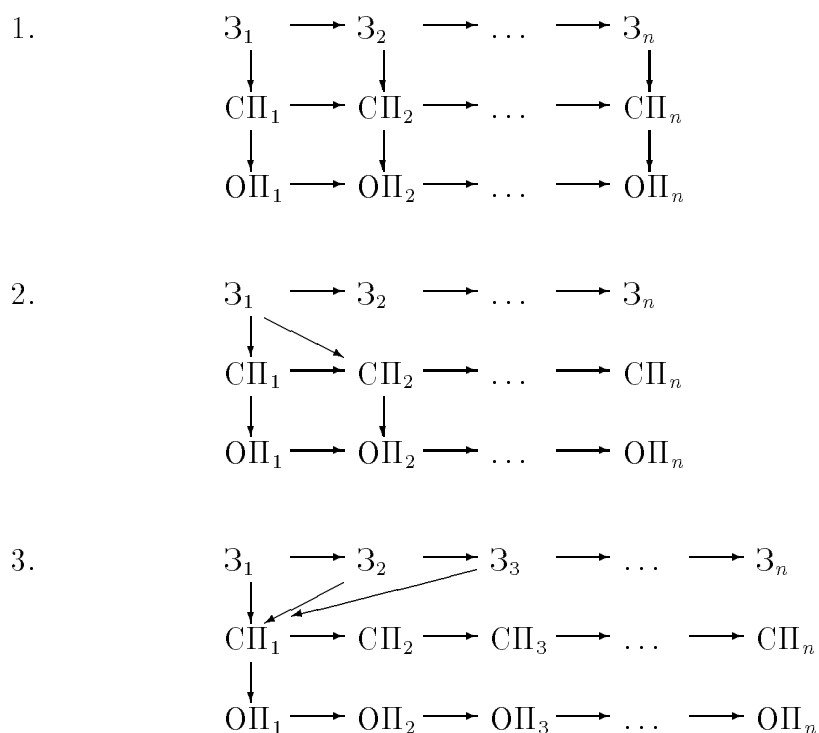
Приемы учебно-познавательной деятельности	
общие специфические	
приемы логического мышления (ОПЛ)	приемы, основанные на ОПЛ - (СПЛ)
психологические приемы (ОПП)	приемы решения задач определенного типа (СП)
учебно-организационные приемы (ОПО)	приемы самоконтроля (СПО), проверки решения задач, доказательства теорем, усвоения понятий
учебно-информационные приемы (ОПИ)	прием моделирования ИС и др. (СПИ)
коммуникативные приемы (ОПК)	приемы, основанные на ОПК - (СПК)

Специфические приемы являются идеальными знаковыми моделями общих приемов, так как включают в себя совокупность законов, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями и их элементами [3].

Психолого-педагогическими исследованиями установлено, что учебно-познавательную деятельность учащихся следует не только формировать, но формировать в строго определенном порядке, считаясь с содержанием слагающих ее действий [1, 4, 5, 7, 8]. Анализ работы учителей математики показывает, что если специальным приемам в обучении математике уделяется то или иное внимание, то общие приемы учебно-познавательной деятельности либо вообще не формируются, либо формируются стихийно. У учащихся в этом случае не формируется умение учиться, поэтому они испытывают трудности в учении и теряют желание самостоятельно добывать знания [2, 5, 7, 8].

Наличие у учащихся сформированных общих приемов учебно-познавательной деятельности способствует не только успешному усвоению математики, но и их общеинтеллектуальному, общекультурному развитию. Это соответствует основополагающему принципу современной концепции школьного математического образования, принципу приоритета развивающей функции в обучении математике.

Приемы познавательной деятельности сначала являются предметом усвоения, а потом — его средством. Рассмотрение приема как предмета специального усвоения необходимо для того, чтобы учащиеся им овладели, а затем, используя прием как средство, ученик все больше проникает в его сущность [1]. Между знаниями (З), общими (ОП) и специфическими приемами (СП) могут быть отношения (связи), выраженные следующими моделями.



Взаимосвязь в первой модели означает, что при усвоении каждого нового знания учащимися используется новый вид специфической деятельности, которая соответствует определенному общему приему. Во втором случае усваивае-

мое знание (Z_1) включается сразу в два или несколько специфических приемов, каждый из которых связан с новым общим приемом. В третьем случае один и тот же специфический прием используется для усвоения ряда предметных знаний.

Эти три указанные модели взаимосвязи приемов неравнозначны по эффективности. В первом случае ученик последовательно усваивает знания и приемы их использования, как общие, так и специфические. Во втором случае ученик при изучении предмета получает максимально возможное число новых приемов. Знаний он приобрел меньше, чем в первом случае, но познавательные возможности его существенно увеличились, что в дальнейшем будет способствовать более эффективному изучению предмета. При этом полученные знания могут использоваться при решении задач различных типов. В третьем случае школьник получает больше знаний, чем в первом случае, но все они могут быть использованы лишь в одном виде деятельности — для решения задач одного типа.

Выбор того или иного способа взаимосвязи знаний и приемов познавательной деятельности зависит от специфики конкретного содержания математики и целей обучения на определенном этапе этой деятельности, от индивидуальных особенностей учащихся.

В каждой из трех рассмотренных моделей взаимосвязи знаний и приемов учебно-познавательной деятельности не выделен вид приема (общий или специфический), так как выбор общих приемов зависит от методики преподавания конкретного раздела математики, а выбор вторых связан с ее содержанием.

Рассмотренные модели позволяют учителю осознанно подойти к целеполаганию, в частности реализовать цели развития познавательных особенностей учащихся при овладении знаниями.

Приведем пример модели второго типа взаимосвязи знаний (Z) и приемов учебно-познавательной деятельности их усвоения.

Z — тип задач — все действия с числами.

ОПЛ — общий прием логического мышления — анализ.

ОПО — общий прием организации деятельности — самоконтроль.

СПЛ — специфический прием логического мышления, соответствующий ОПЛ, — анализ заданий типа: «Вычислить», «Найти значение числового выражения».

СПО — специфический прием организации учебно-познавательной деятельности, соответствующий ОПО, — прием контроля заданий рассматриваемого типа.

Получится следующая модель (рис. 1).

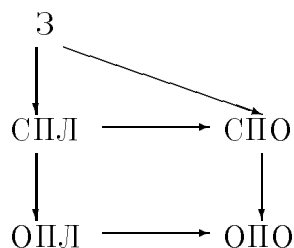


Рис. 1

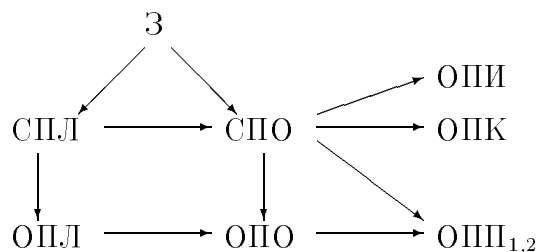


Рис. 2

Кроме этого применение названных специфических приемов способствует усвоению общих приемов: информационных, психологических, коммуникативных при использовании соответствующей методики преподавания данной темы. При этих условиях получается модель взаимосвязи знаний и приемов (рис. 2), используемых на уроке решения примеров на все действия с числами.

Анализ последней модели показывает, что учитель на уроке поставил следующие цели: продолжить: а) развитие логического мышления учащихся (посредством использования СПЛ и ОПЛ); б) формирование умения самоконтроля (посредством использования СПО и ОПО); в) формирование коммуникативных и организационных умений (составление учениками СПО с использованием групповой формы организации учебно-познавательной деятельности); г) развитие внимания и памяти (использование СПЛ и СПО).

В приведенном примере учащиеся строят модель общего метода решения задач определенного типа. Необходимость таких моделей обуславливается тем, что в мышлении многие из операций мыслительного процесса при усвоении знаний чаще всего не осознаются, что затрудняет их применение. СПЛ являются моделью ориентировочной основы умственных действий. Модель ООД в данном случае может быть предъявлена в виде учебной карты с перечнем соответствующих операций.

В процессе обучения математике моделирование, как учебное средство, используется постоянно. Изучая процесс обучения этой деятельности, Н. Г. Салмина выделила ее состав [6]. Конкретизация общего приема моделирования позволяет сконструировать специфический прием построения информационной схемы (ИС). Под ИС понимают модель законченной части текста учебника или другого учебного пособия.

На основе анализа содержания школьного курса математики была проведена типизация задач. Для каждого типа задач составлено предписание к их решению. При этом использовался теоретико-экспериментальный метод моделирования [7]. Конкретное предписание (алгоритмическое, полуалгоритмическое, полуэвристическое, эвристическое, план-предписание) можно рассматривать как специфический прием, связанный с общими приемами.

Методика обучения учащихся приемам строится в соответствии с теорией П. Я. Гальперина, причем учащиеся самостоятельно моделируют прием, применяя его и в незнакомой ситуации [2].

Использование моделей взаимосвязей знаний и приемов их усвоения позволяет учителю прогнозировать и анализировать собственную педагогическую деятельность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брушлинский А. В. *Субъект: мышление, учение, воображение*. М.: ИПП, 1996.
2. Гальперин П. Я. *Управление процессом усвоения знаний*. М.: Педагогика, 1975.
3. Горстко А. Б. *Познакомьтесь с математическим моделированием*. М.: Знание, 1991.
4. Груденов Я. И. *Психолого-дидактические основы методики обучения математике*. М.: Педагогика, 1987.
5. Лошкарева Н. А. *Формирование учебных умений учащихся средней школы // «Самостоятельная деятельность учащихся при обучении математике / Сост. С. И. Демидова. М.: Просвещение, 1985. С.20–28.*
6. Салмина Н. Г. *Знак и символ в обучении*. М, 1988.
7. Талызина Н. Ф. *Формирование познавательной деятельности учащихся*. М.: Знание, 1983.
8. Шамова Т. И. *Активизация учения школьников*. М.: Педагогика, 1982.

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОТОК

Н.А. Бурова

In the processes of humanization and humanitarization of mathematical education an important role is played by the course of the history of mathematics for the students of mathematical faculties of pedagogical high schools. The problems of correction of the motivation set of the students and the increase of their information culture by means of introducing a new historico-mathematical information flow are examined

В процессах гуманизации и гуманитаризации математического образования важную роль играет курс истории математики для студентов математических факультетов педагогических вузов. Рассмотрим проблемы коррекции мотивационного пространства студентов и повышения их информационной культуры путем включения нового информационного потока — историко-математического.

1. Коррекция мотивационного пространства студентов

Место истории математики в ряду других дисциплин. Курс истории математики в педвузах читается после изучения основных математических дисциплин. К этому моменту мотивационное пространство у большинства студентов является сформированным. Студенты математических факультетов педагогических вузов хорошо осознают строгость, четкость, логическую последовательность математических методов, необходимость знания основных математических понятий, идей и методов в своей будущей профессиональной деятельности.

Однако, как показывают результаты анкетирования студентов дневного и заочного отделений математического факультета НГПУ, проведенного до изучения истории математики, большинство из них даже не задумываются о роли

знания истории математики в своей будущей работе. Лишь очень немногие из студентов отмечают, что на уроках математики их учителя время от времени сообщали исторические сведения об изучаемых понятиях. Соответственно, студенты не ставили перед собой цель — изучить историю хотя бы основных математических понятий, идей и методов. Налицо недооценка роли историко-информационной составляющей математических понятий, идей и методов.

После изучения курса истории математики практически все студенты отметили, что роль знания истории предмета очень высока. Кроме того, изучение истории математики не только улучшило их и без того хорошее отношение к предмету «математика», но и во многом способствовало значительному улучшению отношения к таким предметам, как философия, история культуры и т.д.

В процессе изучения курса истории математики изменению подверглось и само отношение к математике как науке. При изучении специальных математических курсов у многих студентов по мере усложнения материала достаточно часто возникали вопросы целесообразности изучения тех или иных разделов математики. Показывая необходимость введения тех или иных понятий, историю их развития, удалось ответить на часть подобных вопросов. При изложении курса истории математики нет необходимости в тщательном детализированном изучении математических понятий, что позволяет давать многие понятия одновременно, прослеживать их связь и место в математике в целом.

Часто знание истории возникновения и развития понятия, идеи или метода способствует его более глубокому осмыслению. Знание из формально усвоенного становится личностным, инструментальным.

Конечно, за то небольшое число часов, которое отводится на курс истории математики, невозможно глубоко изучить историю даже важнейших математических понятий. Цель совсем другая — сформировать интерес к истории математических понятий, идей и методов, а также выработать необходимые навыки работы с источниками информации для дальнейшей самостоятельной работы.

Ненасильственность обучения математике. Одной из важнейших проблем гуманизации математического образования является решение проблемы ненасильственного обучения математике.

Как отмечает Г.В. Дорофеев, [1, с. 76], традиционный метод обучения математике часто является насилием над личностью. Преждевременное введение абстракций при изучении математики вызывает сопротивление учащихся, как утверждает Н.Я. Виленкин [2]. Многие выдающиеся математики, например, Адамар, Курант, Фреше и другие, указывали, что аксиоматический метод великолепен для профессиональных математиков, но с педагогической точки зрения он никуда не годится [2].

Приведем здесь слова Р. Тома: «Истинная проблема, с которой сталкивается преподаватель математики — это не проблема строгости, а проблема построения смысла, проблема «онтологического оправдания» математических объектов» [3, с. 269]. Ж.А. Дьедонне утверждал, что до 15 лет нельзя вводить аксио-

математические системы [4]. А.Д. Александров, И.М. Виноградов, В.С. Владимиров, Л.В. Канторович, С.М. Никольский, А.В. Погорелов, Л.С. Понтрягин, С.Л. Соболев, А.Н. Тихонов выступали за то, чтобы сделать преподавание математики менее формализованным [2].

Ненасильственное изучение математики возможно лишь в том случае, когда у обучаемого удастся сформировать интерес к предмету. Для этого необходимо, чтобы будущие учителя имели значительно более широкое представление о роли математики в различных сферах жизнедеятельности человека и истории зарождения, становления и развития математических идей, понятий и методов.

Как уже отмечалось нами в [5], основная проблема методики преподавания математики заключается в том, что математику мы излагаем дедуктивно, начиная с определений, в то время как сами определения обычно являются продуктом длительного развития соответствующего раздела. Обучаемый не видит всех этапов этого развития, определения он получает в готовом виде, что вызывает часто непонимание и неприятие математики.

Знание исторических аспектов позволит учителю повысить интерес к предмету, показать роль и место математики в системе знаний, проследить эволюцию математического понятия, повысить общий уровень культуры обучаемых, более рационально выстроить методику изложения, а также предотвратить часть возможных ошибок.

Красота математических дисциплин. Многие студенты, правильно оценивая роль и значение метода дедукции, вольно или невольно недооценивают значение таких понятий, как красота, эстетичность математики. В математике, с одной стороны, фиксируется красота окружающей человека природы в таких понятиях, как симметричность, периодичность, красота геометрических форм; с другой стороны, математика создает свою неповторимую красоту математических идей. Верное математическое рассуждение всегда отличается красотой и элегантностью.

Приведем слова И.М. Яглома из предисловия к книге Д. Пидоу «Геометрия и искусство»: «Математика красива — и чисто эстетические критерии играют в ней весьма серьезную роль. Каждый математик знает, что внешняя непривлекательность того или иного доказательства сама по себе служит достаточным основанием, чтобы усомниться в нем: чаще всего она свидетельствует о незавершенности, неполноте рассуждения, если не просто об его ошибочности. Напротив, внутреннее совершенство, стройность математического построения почти всегда гарантируют его истинность и важность» [6, с. 6–7].

Как отмечал известный физик Вернер Гейзенберг, еще в античные времена пользовались двумя определениями красоты. «Одно определение описывает красоту, как гармонию: различные части целого хорошо подходят и к самому целому и друг к другу... Другое определение описывает красоту без ссылок на составные части — как признак чего-то великого и вечного, едва проглядывающей сквозь материальные явления» [7, с. 50].

Применительно к математике использование первого определения согласуются с понятием математической структуры. Красота структуры в целом со-

стоит из того, насколько хорошо подобраны части, ее составляющие. В этом смысле становится понятным содержание выражений «красивое доказательство», «красивое решение задачи» и т.п.

Второе определение красоты является менее формализованным, но по отношению к математике его применение дает нам представление о красоте теории чисел или геометрии как о явлениях вечных.

Смысл красоты теории чисел является разным в различные периоды. Вначале неосознанно закладываются аксиомы, описывающие простейшие свойства чисел, в которых фиксируется многовековой опыт счета. Затем при аксиоматизации числовых систем постепенно вскрывается всё изобилие форм, к которым можно применить эти аксиомы.

Аналогично, в простейших геометрических формах, их красоте заключается возможность дальнейшего комбинирования этих форм, создания прекрасных творений архитектуры. Красота выступает здесь как возможность развития.

В связи с абстрактностью математических понятий, красота, изящество в математике выступают как возможность сближения (отождествления) казалось бы различных задач. По мнению А. Пуанкаре, «математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам» [8, с. 388]. Выражение изящности перенесения свойств одного предмета на другой заключается в математике в понятии изоморфизма. Идеи модели, интерпретации одного математического явления через другое, идеи аналогии, изоморфизма заложены в самой сущности математики, отражают ее красоту.

Умение учителя видеть этот изоморфизм при изучении тех или иных разделов дает огромный результат при изложении материала. Выделение общих черт различных задач позволяет эффективно использовать учебное время, не перегружать школьников излишними подробностями, вместе с ними понять красоту и эффективность использованных методов.

Красота выступает в математике и как экономичность мышления. Например, если мы доказали, что данное множество образует группу, в дальнейшем можем пользоваться всеми групповыми свойствами, что позволяет избежать излишних доказательств.

Язык математики чрезвычайно красив, так как его символы подобраны так, чтобы хорошо описывать единое целое через его части и наоборот — каждую отдельную часть через целое.

Формирование у студентов понятия о том, что их наука чрезвычайно красива, является одной из важнейших задач курса истории математики. На протяжении всей истории ее развития на красоту математики обращали внимание все крупнейшие ее создатели: от школы Пифагора до математиков XX столетия.

Воздействие математики на личностные качества. К сожалению, в данный момент в обществе бытует представление об учителе математики как о сухом, лишенном чувств человеке. Для того, чтобы изменить эту картину, по-видимому, необходимо изменить ее сначала в глазах самих будущих учите-

лей математики. Их изначальное отношение к себе, к своей будущей профессии во многом является определяющим.

Мы старались пробудить в студенте уважение к себе самому как к личности, владеющей самым совершенным инструментом изучения окружающего мира — математикой. Умение живо, заинтересованно излагать свой предмет, его историю, гордиться избранной профессией являются профессиональными чертами учителя.

Профессия учителя в большей степени, чем любая другая, позволяет ощутить себя личностью, дает огромные возможности для самовыражения.

Отметим здесь удивительную особенность предмета математики, отличающую ее от других наук. За многие тысячелетия своего существования ее открытия не теряют своего значения. История математики — меньше всего история заблуждений и ошибок. Если в других науках время от времени обнаруживаются ошибки и происходит коренное изменение всех положений некоторых разделов, а то и всей науки в целом, то в математике дело обстоит иначе: теоремы, доказанные несколько столетий назад, не утрачивают своего значения.

Конечно, математику создают люди, и они могут совершать ошибки. Однако, как отмечает Бурбаки, «вот уже 25 веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки» [9, с. 30].

Хочется в этой связи отметить уважение математиков друг к другу, их корректность в спорах. Многочисленные примеры из истории математики показывают, что математики различных школ и направлений, как правило, уважительно относятся друг к другу, споры о приоритетах того или иного открытия ведутся корректно.

Математики обычно бывают благодарны людям, которые решили те задачи, которые оказались им не по силам, или исправили их ошибки. Известно, что Лейбниц был не прав в отношении логарифма комплексного числа, однако это никоим образом не повлияло на уважение математиков к Лейбницу. Более того, он сам был доволен, когда вопрос прояснился, и горд тем, что это удалось сделать его последователям.

Отметим важность умения математиков исправлять и оценивать свои и чужие ошибки. Профессиональной чертой учителя математики является умение предугадывать и предотвращать ошибки учащихся, с пониманием и уважением относиться к возможным ошибкам. История математики оказывает помощь в формировании такого отношения к ошибкам обучаемых.

2. Повышение информационной культуры студентов

Информационные потребности студентов. Одной из важнейших задач курса истории математики является, по нашему мнению, формирование элементов информационной культуры будущего учителя математики. Эта задача решается многими математическими и гуманитарными курсами. Курс истории

математики в этом аспекте вносит существенный вклад.

Конечно же, для усвоения этого курса уже необходим некоторый уровень такой культуры. Но, в отличие от специальных математических курсов, к которым привык студент математического факультета, курс истории математики требует усвоения гораздо большего объема информации. Вместе с тем, способ подачи новых понятий и идей меняется. Студентам, привыкшим к дедуктивному методу, приходится перестраиваться. На первый план выходит проблема структуризации уже имеющихся знаний, включение в оборот новых сведений о ранее изученных понятиях и идеях, способы хранения такой информации, ее доступность и методы применения в дальнейшем при работе в школе.

Студенты должны уметь работать как с традиционными источниками информации (книгами, журналами, монографиями), так и с новыми электронными информационными источниками. С каждым годом возрастает число студентов, имеющих доступ к современным информационным сетям, поэтому на первый план выходит задача формирования потребностей в такой информации, которая повышала бы культурный уровень будущего учителя, вела к росту его профессионального уровня. Изучение истории математики формирует потребность в такой информации. Некоторые из этих проблем мы отмечали в работе [10].

При изучении некоторых разделов, подготовке рефератов студенты используют все доступные источники информации. Современные студенты предъявляют к ним следующие требования: 1) комфортность в получении информации; 2) доступность многократного обращения к источнику; 3) надежность, достоверность информации; 4) адекватность способа изложения, его эмоциональная окрашенность.

Можно выделить следующие особенности работы студентов с источниками информации: 1) активно используется не только вузовская библиотека, но и другие библиотеки города; 2) используется множество источников для получения достоверной информации; 3) преобладают патерналистские установки в выборе источника (в основном, это мнение преподавателя или руководителя дипломной либо курсовой работы); 4) прагматизм выбора источника информации (именно то, что необходимо в этот момент).

Отметим, что наметилась тенденция повышения историко-информационного уровня студентов. В значительной части дипломных работ присутствуют сведения исторического характера, и для составления исторической справки студент-дипломник использует гораздо больший список литературы.

Такие выводы мы сделали, основываясь на собственных наблюдениях и на результатах анализа, сделанного работниками библиотек [11], [12, с. 62].

Анкетирование, проведенное во время изучения курса на дневном отделении, позволило установить, что до этого времени большинство студентов пользовались лишь библиотекой вуза. При подготовке реферата многие из них использовали другие библиотеки города. Около 25% отметили, что впервые посетили ГПНТБ (Государственная публичная научно-техническая библиотека, г. Новосибирск), значительная часть из них отметили, что им очень понравилось пользоваться этой библиотекой.

Затруднения студентов при работе с информационными источниками. Вместе с тем, значительная часть студентов имеет недостаточно высокий уровень культуры. Это проявляется ярко во время контрольных мероприятий по истории математики: при защите рефератов, сдаче зачетов и экзаменов. Многие студенты используют не более трех источников информации, не могут провести сравнительного анализа источников, не понимают связи истории математического понятия и его отражения в курсе математики средней школы.

Студенты испытывают огромные затруднения, когда встречаются с противоречивой информацией в различных источниках, не могут оценить, какому из них отдать предпочтение. Здесь решающим для них становится мнение преподавателя. В этом случае необходимо проявлять максимум тактичности, стараться познакомить студентов с различными мнениями, во многих случаях это ведет к более глубокому проникновению в суть изучаемого понятия.

У многих студентов возникли большие затруднения из-за неумения обрабатывать значительный объем информации. Здесь решающую роль сыграли структуризация информации, ее предварительная оценка. Особое внимание уделялось вопросам отражения истории понятий в курсе математики средней школы. Несмотря на то, что студенты испытывали в этом большие трудности, значительную часть такой работы выполняли самостоятельно, эта работа принесла им пользу и удовлетворение.

Возникающий постоянно вопрос о качестве и надежности источников информации был решен нами следующим образом: если речь идет о серьезном профессиональном изучении истории математики, то мы полностью согласны с мнением известного историка математики Д.Я. Стройка: «Преподавание истории математики окажется пустой тратой времени, если студенты из-за языковых трудностей не смогут читать тексты в оригинале, оказавшись в полной зависимости от того, что узнают из вторых или третьих рук» [13, с. 8–9].

Если же речь идет о подготовке учителя математики, такой подход неприемлем. Мы вынуждены использовать все имеющиеся учебники, пособия, научно-популярную и специальную литературу. Далеко не всегда можно найти хоть какую-нибудь информацию об истории того или иного понятия или метода. В современных информационных сетях, включая Internet, мало сведений по истории математики.

Чтобы частично восполнить недостаток историко-математической информации, нами было написано учебное пособие [14] для студентов математических факультетов педагогических вузов.

При недостатке информации мы предлагали студентам смоделировать ситуацию, попытаться догадаться, как могли возникнуть такое понятие или метод. Однако в дальнейшем такая информация обязательно должна быть проверена. Если же это невозможно, ее нельзя использовать как достоверную, но можно как вероятную. Важнейшим элементом информационной культуры является умение проводить грань между достоверной и смоделированной информацией.

В дальнейшем именно учитель формирует у учащихся элементы информационной культуры. К сожалению, в настоящее время мы сталкиваемся с тем, что учащиеся и студенты стали меньше читать вообще, а научно-популярной

литературы, в частности. Приобщение студентов к чтению такой литературы мы считали одной из задач курса истории математики. Дело в том, что большая часть научно-популярной литературы обладает такими качествами, которые не характерны для серьезной специальной литературы.

Красочное, живое повествование, интересные подходы, обсуждение на равных с читателем самых сложных и важных проблем, неформальная постановка задач делают такие издания привлекательным для многих читателей. Вместе с тем, в качественной научно-популярной литературе обсуждаются обычно наиболее важные математические проблемы, сообщаются в доступной форме новые идеи и методы, рассказывается история создания этих методов.

Особое место в ряду таких изданий занимают журналы «Квант», «Математика в школе», газета «Математика» (приложение к газете «Первое сентября»). Мы считаем, что перечисленные издания должны быть постоянными спутниками учителя математики. Курс истории математики излагался таким образом, что каждый из студентов в обязательном порядке был вынужден хотя бы раз воспользоваться этими изданиями, а также книгами Г.И. Глейзера [15], [16], [17], [18].

Конечно, чтение научно-популярной литературы служит лишь прологом к чтению специальной математической литературы. Однако не будем забывать, что журнал «Квант» с удовольствием читают не только старшие и младшие школьники, но старшие и младшие научные сотрудники и даже академики [19, с. 3].

Уровни историко-информационного знания. Введем *уровень историко-информационного знания математического понятия*.

Мы будем считать, что студент имеет: 0) *нулевой уровень*, если он не знаком с этим понятием; 1) *первый уровень* предполагает, что студент знает определение понятия и умеет применять его для решения простых задач; 2) на *втором уровне* студент владеет знаниями первого уровня и может включить эти знания в структурно-логическую схему предмета; 3) на *третьем уровне* он владеет знаниями предыдущих уровней, а также знает историю введения и развития этого понятия и может указать источники информации о самом понятии и истории его развития; 4) если студент владеет знаниями предыдущих уровней и знает, как отражается история этого понятия в курсе математики школьного курса и вуза, будем считать, что он имеет знания *четвертого уровня*; 5) *пятый уровень* предполагает, что студент владеет знаниями предыдущих уровней, знает роль и значение этого понятия не только в математике, но и в других науках, может составить прогноз развития этого понятия, роль и место понятия в системе наук, его влияние на развитие математики.

На специальных математических курсах студент получает, в основном, информационное знание второго уровня. Конечно, при изучении отдельных разделов математики в стандартных курсах студентам часто сообщаются сведения исторического характера, но делается это не систематически. Роль курса истории математики состоит в том, чтобы повысить информационный уровень знания важнейших математических понятий, а также научить студентов

оценивать этот уровень и повышать его в дальнейшем для различных понятий, особенно тех, которые изучаются в курсе математики средней школы.

Знаниями пятого уровня овладевают, в основном, те студенты, которые испытывают наибольший интерес к истории создания и развития какого-либо понятия и выбирают его в качестве темы для реферата.

Двуединные рефераты по истории математики Основная работа по повышению уровня историко-информационной математической культуры проводилась со студентами во время подготовки и устной защиты рефератов. Темы рефератов у всех были различны, в реферате обязательно надо было изложить историю некоторого понятия или метода, его роль и значение, а также отражение этого понятия в школьном и (или) вузовском курсе математики.

При этом студенты должны были учитывать вариативность программ для средней школы, проследить, как излагается это понятие (метод) в различного типа классах. Работа такого рода вызвала значительные трудности у студентов, зато они обнаружили для себя много нового и в дальнейшем согласились с тем, что это чрезвычайно полезно.

Проводилась обязательная устная защита рефератов, после сдачи рефератов на проверку каждый студент получал проверенный реферат с несколькими вопросами на обложке, на которые он должен был ответить. Вопросы составлялись таким образом, чтобы исключить формальное переписывание сведений из литературы. Ответы на вопросы можно было сдать письменно заранее, но это не освобождало студента от устной защиты.

Очень часто при подготовке к устной защите студенты полностью перерабатывали реферат. В этом случае не требовалось нового письменного варианта, достаточно было устного объяснения.

Студенты заочного отделения изучают курс истории математики на последнем курсе. При выборе темы реферата они старались как можно больше приблизить ее к теме дипломной работы. Включение исторической справки в дипломную работу становится традицией нашего факультета.

При подготовке реферата студенты сами оценивали свой первоначальный информационный уровень знания того или иного понятия или метода, после защиты реферата преподаватель сообщал им новый уровень. Как правило, оценки студента и преподавателя совпадали. В случае разногласия (оно бывало иногда и в сторону занижения студентом своего уровня) стороны приходили к единому мнению путем беседы, а иногда студенты просили повторить еще раз защиту реферата.

Многие студенты в своих анкетах отмечали, что не ожидали, что история какого-либо конкретного понятия окажется столь интересной и что можно получать удовольствие от работы над рефератом. Здесь усматривается тот факт, что они, кроме всего прочего, скорее всего верно выбрали профессию учителя математики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорофеев Г.В. *Непрерывный курс математики в школе и проблема преемственности* // Математика в школе. 1998. N 5. С.70–76.
2. Виленкин Н.Я. *Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты* // Математика в школе. 1988. N 4. С.7–13.
3. Том Р. *Современная математика – существует ли она?* // На путях обновления школьного курса математики: Сб. статей и материалов. М.: Просвещение, 1978. С.264–274.
4. Дьедонне Ж.А. *Надо ли учить «современной» математике?* // На путях обновления школьного курса математики: Сб. статей и материалов. М.: Просвещение, 1978. С.274–283.
5. Бурова Н.А. *Постановка курса истории математики как фактор гуманизации высшего образования.* / Качество образования: проблемы оценки, управление, опыт: Тез. докл. II междунар. научно-метод. конф. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. С. 205.
6. Пидоу Д. *Геометрия и искусство.* М.: Мир, 1979. 332 с.
7. Гейзенберг В. *Смысл и значение красоты в точных науках* // Вопросы философии. 1979. N 12. С.49–60.
8. Пуанкаре А. *О науке.* М.: Наука, 1990. 736 с.
9. Бурбаки Н. *Теория множеств.* М.: Мир, 1965. 456 с.
10. Бурова Н.А. *О введении курса истории математики на математических факультетах педагогических вузов* // Проблемы развития образования в Новосибирске и области: Тез. докл. Новосибирск: Изд-во НГПУ, 1998. С.19.
11. Лопатина В.А. *Чтение студентами научной литературы как показатель качества образования* // Качество образования: проблемы оценки, управление, опыт: Тез. докл. II междунар. научно-метод. конф. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. С.100.
12. Паршукова Г.Б. *Преддипломный список литературы как показатель качества дипломного проекта* // Пробл. высш. техн. образ.: Межвуз. сб. научн. тр. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999. Вып.14. С.62–69.
13. Стройк Д.Я. *Краткий очерк истории математики:* Пер. с нем. 5-е изд., испр. М.: Наука, 1990. 256 с.
14. Бурова Н.А. *История математики:* Учебное пособие. Новосибирск: Изд. НГПУ, 1999. 168 с.
15. Глейзер Г.И. *История математики в школе.* М.: Просвещение, 1964.
16. Глейзер Г.И. *История математики в школе IV–VI кл.:* Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1981.

17. Глейзер Г.И. *История математики в школе VII–VIII кл.*: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982.
18. Глейзер Г.И. *История математики в школе: IX–X кл.*: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1983.
19. *Занимательно о физике и математике*. М.: Наука, 1987. (Б-чка «Квант». Вып.50.)

ОТ ПЕДАГОГИКИ АВТОРИТАРНОЙ К ПЕДАГОГИКЕ АВТОРИТЕТНОЙ

В.А. Далингер

The article analyses the peculiarities of the system of education that has been established in Russia by the end of the 20th century. Positive and negative aspects of teaching technology directed to the subject and personality are shown here. Factors of educational children desolation are also shown in the article and the ways of elimination of school disadaptation are pointed out. The analysis of different aspects of authoritarian and authoritative pedagogics is given in the article and in this connection the question of different types of educational process organization is examined in the article

Грань веков в истории человечества всегда была связана с осознанием тенденций движения и концентрации внимания на тех из них, которые обеспечат в новом столетии успешное развитие. Это касается всех сфер деятельности человека, но в большей степени — сферы образования, которая готовит к жизнедеятельности в грядущем XXI веке подрастающие поколения молодежи.

Сложившаяся к концу XX века система образования была ориентирована в основном на подготовку специалиста, владеющего ситуацией в узком диапазоне деятельности и способного в этих границах выполнять заранее определенную функцию, но, как показывает нарастающий динамизм общественного производства, социально-экономической и культурной жизни, специалист вынужден довольно часто менять свою профессиональную ориентацию синхронно динамике общественных изменений. Этот дискомфорт во взаимодействии государства и его граждан показывает, что имеет место несоответствие действующей системы образования, которая строилась на предметно-ориентированных (предметно-центристских) технологиях, общественно-личностным потребностям, удовлетворение которых побуждает ставить иные цели и искать новые формы, средства и содержание образования, которые базировались бы на лично ориентированных технологиях.

Сегодня, к сожалению, приходится констатировать, что в нашей стране огромное число учащихся, у которых наблюдается несбалансированность их возможностей и потребностей с социальными требованиями и ценностными

установками общества. Но это не вина, а беда этих детей, с которой учитель должен считаться. Есть масса результатов социологических, психологических и других исследований, подтверждающих неблагоприятное состояние физического, психологического и душевного здоровья детей. Например, Т. П. Калиновская [2, 3] приводит такие данные: 85% детей с недостатками развития и неблагоприятным состоянием здоровья среди новорожденных; более 65% детей до 7 лет относится к группе риска школьной, соматической и психофизической дезадаптации, за девять лет обучения здоровье детей ухудшается в 4–5 раз; более 30% детей подвергается физическому насилию в семьях и более 40% – в учебных заведениях; практически каждый ребенок подвергается психическому насилию в семье, в школе, в среде сверстников или взрослых.

Она отмечает, что «Эпоха техногенной цивилизации привела к тому, что число маргиналов возрастает темпами более резкими, чем совершенствование педагогических технологий, способов и средств социальной защиты людей» [3, с.3–4].

В основе педагогической запущенности детей ученые выделяют три ряда обуславливающих ее факторов:

- пробелы в учебно-практических и социально-этических знаниях, наличие искаженных знаний и отрицательного жизненного опыта;
- недостатки, ненормальности или дефекты в развитии черт и качеств личности;
- недостатки и аномальности во взаимоотношениях личности с окружающими.

Сегодня ведется много разговоров об элитных школах, хотя в итоговом документе Международного конгресса (Испания, 1996г.) справедливо отмечалось, что в XXI веке основные проблемы будут касаться массовых общеобразовательных школ, которые превратятся в адаптивные, где, как отмечает Е.А.Ямбург, «учебно-воспитательный процесс будет организован с учетом социокультурных особенностей региона, социальных запросов населения и требований государства к образовательным стандартам, по возможности гибко по отношению к психофизическим особенностям, способностям и склонностям детей» [9, с.5].

Вслед за Е.А.Ямбургом, мы утверждаем, что адаптивная школа — это и есть массовая общеобразовательная школа, где есть место каждому ребенку вне зависимости от его индивидуальных особенностей.

Первые попытки школьной адаптации у нас были связаны с созданием классов коррекции, выравнивания, компенсирующего обучения, реабилитации, адаптации, педагогической поддержки. Между тем, как бы мы не называли эти классы, отношение к учащимся этих классов содержится во фразе одной учительницы, которую она произнесла, собираясь на урок и прижимая к груди классный журнал: «Ну, я пошла к своим дуракам».

Нам никто других учеников не даст. Они такие, какие есть. В журнале «Смена» N 10 за 1988г. в статье «Цена знаний» сообщалось, что в 1987 году в первые классы школ СССР пришло 4,8 млн. учащихся, из которых по медицинским данным 1 млн. олигофренов. Не знаю, верить или нет этим данным, но они говорят о том, что проблема школьной адаптации стоит в настоящее время очень остро.

Анализ состава учащихся классов компенсирующего обучения показывает, что многие из них попали туда случайно. Педагогический консилиум, решая судьбы неблагополучных ребят, зачастую путает учебную одаренность с природной одаренностью и, вследствие этого в классах коррекции оказываются будущие великие художники, спортсмены, танцоры и т. д. По данным литературных источников в 70% случаев диагноз, поставленный ребенку, обучающемуся во вспомогательных специальных школах, оказывается ошибочным.

В названии статьи я использовал слово «авторитетный». Испокон веков считалось, что в паре «учитель-ученик» авторитетом наделен учитель. Конечно, главное воздействие на формирование личности обучающегося оказывает личность Учителя. Но, как верно замечает Н.А.Хохлов: «Иногда «везет» на Учителя, но очень редко. УЧИТЕЛЕЙ единицы, обучающихся большинство» [7, с.85].

В авторитарной педагогике и авторитетной педагогике позитивные и негативные стороны взаимодействия «учитель-ученик» являются нетождественными. Кто сказал, что ученик в учебно-воспитательном процессе обладает меньшим авторитетом, чем учитель? Уж коль мы сегодня в центр этого процесса поставили личность ученика и разрабатываем в связи с этим личностно ориентированные технологии обучения, то вполне закономерно говорить об авторитете ученика. В авторитетной педагогике будем это положение считать ведущим.

Единственно правильный путь для педагога в решении проблемы школьной адаптации — не примерять ученика к своей личности, а принимать его как индивидуальность.

Но не так легко учителю в современных социально-экономических условиях и потрясениях нашей страны быть адаптированным к этим условиям, а вслед за этим к своей профессиональной среде и к своим ученикам. Е.А.Ямбург по этому поводу отмечал: «Ведя сам трудное существование, являя собой пример неадаптированного невротика, потерявшего привычные ориентиры, способен ли такой учитель помочь кому-либо?» [9]. Такой учитель сам нуждается в социальной и психической поддержке.

Ребенок, который по тем или иным причинам стал вести себя неадекватно требованиям учителя, составляющих норму, вызывает у педагога скорее не сочувствие и желание разобраться в причинах таких перемен, а раздражение, и объясняется это прежде всего установками той тоталитарной системы, в которой долгое время функционировал учитель, вырабатывающий у себя авторитарный стиль общения с учащимися.

Авторитарной, массовой школе нужен прежде всего послушный ученик. Н.А.Хохлов, сравнивая характер взаимодействия учителя и ученика в разных социальных системах, отмечает:

«В развитых демократических системах это взаимодействие транслирует относительно равные партнерские отношения, в меньшей степени подавляющие личность ученика. Это отношения диалога, помогающие становлению личности обучающегося. В тоталитарных системах моделируются отношения подавления, где в принципе исключается диалог и на первое место выдвигаются санкции за невыученный урок, за не приготовленное задание. Учитель выступает в первую очередь как носитель абсолютного знания, которое надо выучить. Соответственно учитель и школа олицетворяют власть и силу, которую надо бояться. Обучение держится на жесткой дисциплине и страхе наказания. Естественно, что каких бы методов и педагогических технологий ни придерживался учитель в тоталитарных обществах, он не сможет преодолеть общую антиличностную установку системы» [7, с.85–86].

Учитель, который не сможет освободиться от авторитарного стиля, не только не способствует повышению адаптационного потенциала у учащегося, но и сам становится причиной его дезадаптации. В психологии такого рода ситуацию обозначают термином «дидакто- и дидаскалогения».

На пути гуманизации воспитательного процесса стоят очень мощные психологические барьеры: инерция привычки, страх перед новым, риск утраты авторитета, риск обнаружения собственной профессиональной некомпетентности и др.

В связи с рассматриваемой в этой статье проблемой, небезынтересным будет рассмотреть вопрос о различных типах организации педагогических процессов, к чему мы сейчас и перейдем.

С.Ю.Степанов и Е.З.Кремер [7] выделяют четыре типа педагогических процессов: репродуктивно-авторитарный, продуктивно-манипулятивный, инновационно-сотрудничающий, рефлексивно-творческий.

Дадим краткую характеристику каждого из них.

При репродуктивно-авторитарном способе организации общения и взаимодействия учителя и учащегося первый идентифицируется с субъектной позицией агента культуры, а второму вменяется объектная позиция – приемника передаваемой информации.

Продуктивно-манипулятивный тип взаимодействия рассматривает ученика уже не столько как «сосуд», который должен заполнить учитель, сколько как объект для технико-педагогических манипуляций. Учитель осуществляет трансформирование и доразвивание имеющегося частичного опыта ребенка.

При инновационно-сотрудничающем типе организации учебного процесса ученик рассматривается как равноправный субъект в рамках учебного взаимодействия. Педагог, демонстрируя свой способ работы, побуждает ученика к поиску своего пути освоения свернутого в культуре опыта мышления и жизнедеятельности. В ходе сотрудничества педагога и ребенка имитируется совместное «переоткрытие» наиболее значительных достижений культуры.

Рефлексивно-сотворческий тип организации учебного процесса предполагает вовлечение учителя в этот процесс как целостную личность. Благодаря

этому он воспримет ребенка как насущную себе, принципиально иную, самоценную и целостную личность. В данной ситуации сущность взаиморазвивающихся отношений может быть выражена как «субъектно-субъектная».

Покажем в таблице 1 преобладающие способы обратной связи и характерные формы фиксации образовательного результата при каждом из четырех типов организации взаимодействия в учебном процессе.

Таблица 1

N	Тип педагогического процесса	Тип взаимодействия		Тип обратной связи	Способ фиксации результата
		Педагог	Ученик		
1	Репродуктивно-авторитарный	Субъект	Объект	Контроль	Отметка
2	Продуктивно-манипулятивный	Субъект	Объект	Диагностика	Оценка
3	Инновационно-сотрудничающий	Субъект	Субъект	Экспертиза	Самооценка
4	Рефлексивно-сотворческий	Личность	Личность	Взаиморефлексия	Самоценность

В этой таблице, по существу, показан не революционный, а культурогенетический путь плавной смены авторитарной образовательной системы к инновационной, культурно-обусловленной системе.

Сегодня, на рубеже XX и XXI веков, актуальна стала разработка таких способов организации образовательного процесса, в которых акцент перенесен на уникальность и самобытность личности.

Не будет излишне еще раз подчеркнуть, что центральная проблема состоит в том, чтобы сделать образование личности составной частью ее образа жизни в любом возрасте.

Итак, мы можем констатировать, что начиная со старта жизни, все возрастающее число людей нуждается в услугах реабилитационной (коррекционной, специальной) педагогики, располагающей возможностями индивидуального подхода к ребенку. (Позволю себе утверждать о тождественности терминов «реабилитационная педагогика» и «авторитетная педагогика».)

Реабилитационная педагогика — это комплексная дисциплина, базирующаяся на медицинских, психологических, дефектологических знаниях.

Н.П.Вайзман дает следующее определение реабилитационной педагогики — «педагогическое воздействие на больного или трудно-обучаемого и трудно-воспитуемого ребенка и подростка с целью корригирования его поведения, оптимизации эмоционального состояния, интеллектуальной деятельности, ликвидации педагогической запущенности» [1].

Существуют различные виды реабилитации. Так, Р.В.Овчарова [5] выделяет три вида реабилитации: психолого-педагогическая, социально-педагогическая, медико-педагогическая. Раскроем кратко смысл и содержание каждой из них.

Психолого-педагогическая реабилитация — это восстановление ребенка как субъекта ведущей деятельности и общения в условиях обучения и воспитания.

Социально-педагогическая реабилитация заключается в преодолении школьных и семейных репрессий в отношении запущенных детей и подростков, разрешении конфликтных ситуаций, коррекции их отношения и поведения, а также восстановлении их в статусе субъекта учебной деятельности, формирующей отношения ученика с окружающими.

Медико-педагогическая реабилитация предусматривает меры, направленные на восстановление утраченного здоровья, применяемые в процессе обучения и воспитания.

Ясно, что проблема дезадаптации — явление, препятствующее полноценному личностному развитию ученика и затрудняющее учебно-воспитательный процесс. Заметим, что дезадаптация обозначает нарушение процесса взаимодействия человека с окружающей средой.

Школьная дезадаптация, по определению Д. С. Шилова, есть невозможность адекватного школьного обучения соответственно природным способностям, а также адекватного взаимодействия ребенка с окружением в условиях индивидуальной микросоциальной среды, в которой он существует [8].

Анализ литературы (М.В.Вайзман, И.В.Дубровина, Ю.М.Забродин, Т.П.Калиновская, Г.Ф.Кумарина, А.К.Маркова, Н.М.Назарова, Л.В.Шibaева и др.) и школьной практики позволил выделить следующие пути устранения школьной дезадаптации:

1. Снятие причин, условий и факторов, которые вызывают те или иные отклонения в развитии.
2. Создание системы "класс внутри класса".
3. Позитивная педагогика в учреждениях образования.
4. Предварительная диагностика школьника.
5. Создание консультационных пунктов, центров в учреждениях образования.
6. Защита ребенка, его интересов, души, благополучия.
7. Изменение содержания программ, включение индивидуально-предпочтительных технологий обучения.
8. Перевод системы взаимодействия на толерантную педагогику.
9. Кардинальный пересмотр всей системы защиты личности ребенка в школе.
10. "Очеловечивание" общешкольных требований.
11. Реабилитационная педагогика для всех педагогов.
12. Социальная защита семьи.

13. Междисциплинарное взаимодействие педагогов при коррекции школьной дезадаптации.
14. Групповые формы психокоррекционной работы по типу социально-психологического тренинга.
15. Формирование альтернативных вариантов ассоциальным формам поведения и "деструктивным" способам разрешения конфликтных ситуаций.
16. Организация учительских бригад помощи учащимся.
17. Новая концепция оценивания результатов деятельности учащихся и др.

По поводу последнего заметим, что традиционная система оценки знаний, умений и навыков учащихся ориентирует учителя скорее на развитие у школьников памяти, а не мышления. Действующая сейчас в школе система оценок выясняет не то, что ученик знает, а то, что он не знает, и оценка выставляется путем вычитания из максимальной оценки неуспехов ученика вместо суммирования его успехов.

В реабилитационной деятельности важны как ее содержание, так и основные направления работы. Последние можно свести к следующим:

1. Диагностирование причин дезадаптации и форм ее проявления.
2. Оказание помощи в восстановлении статуса ученика, при переходе от негативного отношения к позитивному и в создании благоприятной, положительной сферы.
3. Создание условий, при которых ребенок поверил бы в свои силы, способности.
4. Повышение собственной активности.
5. Воспитание у детей социальной ответственности за свой успех в жизни, который возможен лишь в результате упорного труда.
6. Проведение диагностики внимания в динамике.
7. Создание условий для личностного развития школьников и психических преобразований, таких, как произвольность деятельности, рефлексия, внутренний план действий и т.д.
8. Выявление закономерностей процесса усвоения для каждого ребенка.
9. Акцент на положительные свойства в развитии, после их выявления.
10. Встраивание в учебный процесс различных видов терапий (живописетерапия, музыкотерапия, сказкотерапия, ароматерапия, трудотерапия и т. д.)
11. Отбор способов в оказании помощи ребенку при выработке выдержки, систематичности в процессе доведения дела до конца.

12. Отбор способов отвлечения ребенка от нежелательных интересов и др.

Подготовка учителя сегодня — это скорее подготовка специалиста-предметника, а не учителя-предметника. Преподаватели педвузов в основном обеспокоены повышением эрудиции студента в рамках специальных дисциплин. Главной ценностью сложившегося сегодня высшего образования, очевидно, является эрудиция или информированность в области определенных научных знаний. Но, как замечает Л.П.Дедерер: «Эрудиция — один из важнейших источников авторитета учителя и одно из орудий подавления ученика» [7, с.102].

Далее он отмечает: «В плане социального взаимодействия авторитет учителя по рангу, возможно, не уступает ценности эрудиции. Но в образовании, ориентированном преимущественно на эрудицию, процесс осуществляется не авторитетным, а авторитарным образом, то есть опирается на тоталитарный авторитет, он основан на отношении абсолютной зависимости ученика от учителя» [7, с.103].

Сегодня в педагогических вузах причины дезадаптации, формы ее проявления и пути устранения в основном изучаются студентами дефектологических факультетов, но настало время, когда в психолого-педагогическом блоке учебных планов педвузов на всех факультетах будет обязательно наличествовать специальный курс по адаптации, в рамках которого студенты не только получают теоретико-практические знания по решению проблемы школьной адаптации, но и будут проводить рефлексивный анализ собственных проблем адаптации, диагностику собственных индивидуальных личностных качеств, затрудняющих процесс адаптации.

Студент должен овладеть навыками прогнозирования и проектирования учебной деятельности, что поможет проводить саморефлексию и переконструирование хода учебной деятельности. Будущему учителю необходим диагностико-технологический уровень мышления. Овладение навыками научного управления учебно-воспитательным процессом на стадии подготовки к совместной деятельности учителя и ученика является основным путем индивидуализации обучения ребенка в связи с его возможностями.

Российская система образования, и система высшего образования в частности, несет на себе печать тоталитарного прошлого. С целью устранения негативных последствий такой системы в федеральной программе развития высшего образования Российской Федерации [6] заложены основные направления их преодоления, которыми являются:

1. Демократизация, гуманизация и деидеологизация отношений в системе высшего образования.
2. Усиление акцента в образовательном процессе на развитие интеллектуального, нравственного и культурного потенциала личности.
3. Интеграция гуманитарных, естественно-научных и технических составляющих в содержании образования.

4. Обеспечение свободы доступа к мировой литературе, к отечественным и зарубежным базам академических знаний.

Остается надеяться, что эти и другие меры позволят сформировать у будущего учителя новаторское отношение к ученику, которое сводится к тому, что ребенок в рамках учебного взаимодействия будет рассматриваться как равноправный субъект.

В заключение статьи приведем сравнения на уровне высказываний, которые показывают контрастные стороны авторитетной педагогики и авторитарной (таблица 2).

Таблица 2

Авторитетная	Авторитарная
1) Если ребенок растет в терпимости, он учится понимать других.	1) Если ребенка постоянно критиковать, то он учится ненавидеть.
2) Если ребенка подбадривают, он учится верить в себя.	2) Если ребенок растет во вражде, он учится агрессивности.
3) Если ребенка хвалят, он учится быть благородным.	3) Если ребенка высмеивают, он становится замкнутым.
4) Если ребенок растет в честности, он учится быть справедливым.	4) Если ребенок растет в упреках, он учится жить с чувством вины.
5) Цель: Обеспечить психологическую защищенность, психическое, физическое, социальное здоровье, развитие индивидуальности ребенка.	5) Цель: Обеспечить усвоение знаний,работку умений и навыков, понимание учебного материала.
6) Тактика: Сотрудничество.	6) Тактика: Диктат и опека.
7) Доминирующие формы: Организация системной учебно-познавательской деятельности ребенка, влияющей на его личностное развитие (игровые, нетрадиционные формы урока).	7) Доминирующие формы: Фронтальные занятия по типу школьного урока (классно-урочная система).
8) Роль учителя: Учитель-помощник, друг, советчик и соратник в поисках истины, в овладении мастерством.	8) Роль учителя: Учитель-всезнающий, распорядитель судьбой ученика.
9) Средства формирования учебной мотивации: формирование устойчивой учебной мотивации на фоне позитивной Я-концепции, устойчивой самооценки и низкого уровня школьной тревожности. Ощущение своего роста, совершенствования, приращения знаний.	9) Средства формирования учебной мотивации: угрозы, приказания, запрещения, наказания, отметки, соревнование с другими.

Список таких высказываний и положений можно продолжить, но уже этот показывает, какова существенная разница в двух подходах к организации взаимодействия учителя и учащегося в учебном процессе. Можно надеяться, что авторитетная педагогика позволит развить нравственные, душевные силы каждого члена ученического коллектива, а это много, ибо «нет ничего выше и могущественнее, — как отмечал русский писатель Александр Крон, — человеческого коллектива. И нет ничего гнуснее человеческого стада. В коллективе даже умерший продолжает жить, стадо способно затоптать живого».

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайзман Н.П. *Реабилитационная педагогика*. М.: Аграф, 1996. 159 с.
2. Калиновская Т.П. *Педагогика равных возможностей*: Методическое пособие для специалистов, работающих с детьми. Тюмень: ТОГИРРО, 1998. 94 с.
3. Калиновская Т.П. *Подготовка учителя в системе повышения квалификации к педагогической реабилитационной деятельности*: Автореф. дис. канд. пед. наук. Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999. 22 с.
4. *Концептуальные вопросы развития высшего образования* / Под ред. Б. Б. Косова и др. М.: НИИВО, 1991.
5. Овчарова Р.В. *Справочная книга школьного психолога*. М.: Просвещение, 1996.
6. *Развитие образования России: федеральная программа*. Раздел «Высшее образование». М., 1993.
7. *Человек, интеллект и образование*: Сборник научных статей. Новосибирск: Изд-во Института интеллектуальных инноваций и проблем консультирования, 1995. 187 с.
8. Шилов Д.С. *Об организации системы реабилитации детей и подростков со школьной дезадаптацией*. М., 1998.
9. Ямбург Е.А. *Школа для всех: Адаптивная модель (Теоретические основы и практическая реализация)*. М.: Новая школа, 1997. 352 с.