

НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ И ГРАВИТАЦИОННЫЕ АНАЛОГИИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГИДРАВЛИКИ

Н.Ф. Жихалкина

The calculation of the oil pipeline optimum work is discussed in this paper. The reduction of this problem to the continuous model allows to use the gravitational optimization algorithm.

В качестве исходной проблемы рассматривается задача гидравлического расчета оптимальных режимов работы разветвленного нефтепровода, представляющая собой задачу целочисленного программирования. Сведение ее к непрерывной модели позволяет использовать менее трудоемкие оптимизационные алгоритмы, в частности, рассматривается одно из возможных практических приложений гравитационного метода оптимизации.

Содержательная постановка задачи: на каждой ветке разветвленного нефтепровода (рис. 1) имеется до 20 насосных станций. В свою очередь, на станции



Рис. 1. Две ветки нефтепровода

установлено от 4 до 8 насосов из 30-ти возможных типов, каждый из которых имеет свою характеристику: зависимость напора и КПД от расхода (рис. 2).

Эти насосы могут подключаться различным образом: параллельно, последовательно, параллельно-последовательно (рис. 3). Естественно, что в зависимости от включения, вырабатываемый напор будет различным. Кроме того имеется ряд существенных технических ограничений: геодезические высоты, перевальные точки и т.д. Таким образом, задается карта возможных реализуемых напоров на каждой станции (рис. 4). Задача состоит в нахождении такого

© 1999 Н.Ф. Жихалкина

E-mail: zhihal@univer.omsk.su

Омский государственный университет

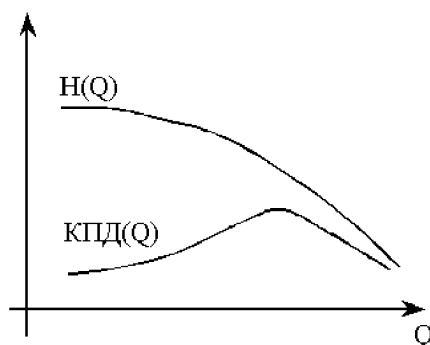
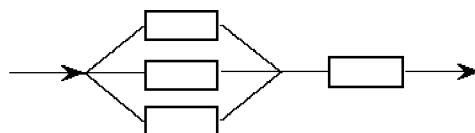
Рис. 2. График зависимости напора H и $KПД$ от расхода Q 

Рис. 3. Параллельно-последовательное соединение насосов

включения насосов, чтобы при постоянном суммарном напоре на всей трассе ($\sum_{i=1}^{N_k} H_i = const_1$, где N_k – число станций, H_i – напор, вырабатываемый на i -й станции), $\sum_{i=1}^{N_k} H_i C_i / \nu_i$ была бы минимальна, где C_i – стоимость электроэнергии и ν_i – КПД насосов на i -й станции.

Переход от дискретной модели к непрерывной позволяет (в некотором приближении) заменить суммы на определенный интеграл. Тем самым исходная задача индуцируется к задаче поиска функции $H(x)$, для которой величина $1 / \int_0^1 (HC(H) / \nu(H)) dx$ максимальна:

$$\sum_{i=1}^{N_k} H_i = const_1 \implies \int_0^1 H dx \approx const_1 \Delta x \approx const,$$

$$\sum_{i=1}^{N_k} \frac{H_i C_i}{\nu_i} \rightarrow min \implies \frac{1}{\int_0^1 \frac{HC(H)}{\nu(H)} dx} \rightarrow max.$$

Далее возникает вопрос о выборе метода оптимизации. В настоящее время для решения практических задач поиска экстремума (максимума) функции все чаще применяются оптимизационные алгоритмы, использующие естественные и механические аналогии. Более подробно остановимся на гравитационном алгоритме [1]. В зависимости от постановки задачи и начальных данных существуют различные варианты расчетных формул данного метода. Но все они основаны на том, что вместо одного текущего приближения рассматривается некоторая популяция точек, и на каждой итерации алгоритма суммарный шаг происходит в направлении к наиболее "тяжелым частицам", т.е. к тем точкам, в которых значение целевой функции максимально на данной аппроксимационной сетке.

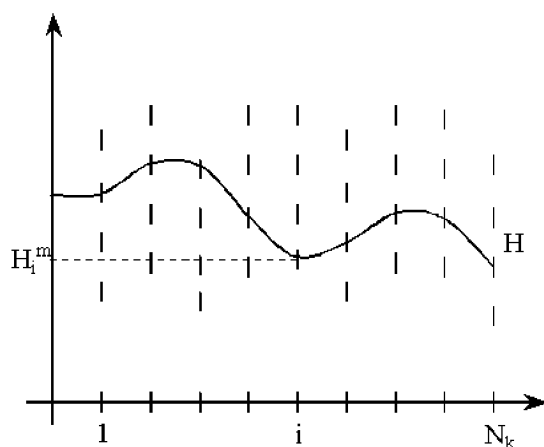


Рис. 4. Карта реализуемых напоров

Если рассматривать график функции $H(x)$ как материальную точку в некотором бесконечномерном пространстве, то расстояние между двумя такими «частицами» H^i и H^j определяется при помощи нормы в пространстве L_2 :

$$\|H^i - H^j\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 |H^i - H^j|^2 dx}.$$

Материальной точке H ставится в соответствие ее масса:

$$M(H) = \frac{1}{\int_0^1 (HC(H)/\nu(H)) dx}.$$

После того, как исходная задача представлена в терминах гравитационного алгоритма, обратимся к одной из реализаций предложенного метода оптимизации (рис. 5). Областью оптимизации является ε -окрестность функ-

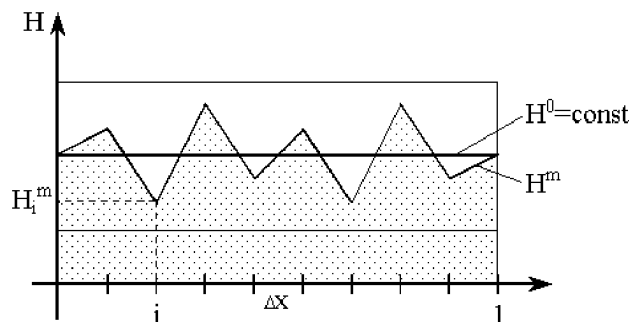


Рис. 5. H^m – представитель текущей популяции точек в L_2

ции $H^0 = const$ на отрезке $[0, 1]$. В качестве начальной популяции рассматривается конечное число функций H^m , представляющих собой ломаные, для которых $\int_0^1 H^m dx = const$ и значение функции в i -й точке разбиения отрезка

$[0, 1]$ ($i = 1 \dots N_k$) равно вырабатываемому на i -й станции напору при одном из возможных включений насосов.

Оптимизационная процедура заключается в корректировке функции H^m на шаге $t + 1$ в зависимости от ее «массы» и «массы» так называемой усредненной функции H^{av} на шаге t :

$$H^m(t + 1) = \alpha H^m(t) + \beta H^{av}(t, m),$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{M^m(t)}{M^m(t) + M^{av}(t, m)} \\ \beta = \frac{M^{av}(t, m)}{M^m(t) + M^{av}(t, m)} \end{cases}$$

и в выборе лучшей с точки зрения критерия оптимизации «частицы». Функция $H^{av}(t, m)$ вычисляется как среднее среди $H^j(t)$, где j принимает все возможные значения от 1 до N_k , либо функции $H^j(t)$ выбираются из некоторой окрестности $H^m(t)$ в соответствии с радиусом взаимодействия [1].

Пусть в первом приближении $\frac{HC(H)}{\nu(H)} = \underbrace{H * \dots * H}_N$. Без ограничения общности можно считать, что функция H четная и на отрезке $[0, 1]$ представима в виде ряда Фурье:

$$H(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x).$$

Теоретические расчеты позволяют сделать следующие выводы:

1) $N = 2$, т.к.

$$\int_0^1 \cos(k\pi x) \cos(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{1}{2}, & k = n, \end{cases}$$

то

$$\int_0^1 F_k dx = \int_0^1 (C_0 + \sum_{n=1}^k C_n \cos(n\pi x))^2 dx = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k C_n^2.$$

Таким образом, $\int_0^1 F_k dx$ не убывает при $k \rightarrow \infty$, следовательно, $\max(M_k) = M_0$, где M_k – «масса», отвечающая функции H^k . Иными словами, целевая функция максимальна на константе.

2) $N = 3$, т.к.

$$\int_0^1 \cos(k\pi x) \cos^2(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq 2n \\ \frac{1}{4}, & k = 2n, \end{cases}$$

то, например,

$$\int_0^1 F_3 dx = \int_0^1 (C_0 + \sum_{n=1}^3 C_n \cos(n\pi x))^3 dx = C_0^3 + \frac{3}{4} C_1^2 (2C_0 + C_2) + \frac{3}{4} C_2^2 (2C_0 + C_1).$$

Нетрудно заметить, что при некоторых очевидных ограничениях на коэффициенты разложения (данные ограничения могут следовать и из физического смысла функции H : неотрицательность, ограниченность и т.д.) получаем те же результаты, что и для $N = 2$.

3) Естественно предположить, что и в общем случае при полиномиальной зависимости $\frac{HC(H)}{\nu(H)}$ от H максимум целевой функции будет достигаться на $H = const$. Но вследствие технических ограничений (максимально и минимально допустимые давления на входе в станцию, максимально допустимое давление на входе в коллектор, на выходе из станции, геодезические высоты и т.д.) такой режим обычно не реализуем на практике. Следовательно, оптимальной стратегией является поиск такого допустимого распределения реализуемых напоров, при котором работающие станции как бы «размазаны» по всей ветке.

Применение гравитационного алгоритма для квадратичной и кубической зависимостей дает аналогичные результаты. В ходе численных экспериментов найдены некоторые ограничения на основные параметры алгоритма: радиус взаимодействия должен быть достаточно велик, обязательна зависимость α и β от «массы», в некоторых случаях фиксация наиболее «тяжелых» частиц позволяет находить лучшие решения.

Следующим шагом является рассмотрение более реалистичной задачи, когда не удастся выявить зависимость критерия оптимизации от функции H . В этом случае также представляется возможным использование гравитационного алгоритма, что, в свою очередь, позволит находить допустимое распределение реализуемых напоров, отвечающее критерию оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жихалкина Н. Ф., Файзуллин Р. Т. *Гравитационные аналогии в задаче оптимизации* // Математические структуры и моделирование. 1999. Омск: ОмГУ. Вып. 2.