Математические структуры и моделирование
1999. Вып. 4, с.104-117.

УДК 681.14

ГРАФОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУР РЕШЕНИЙ СЮЖЕТНЫХ ЗАДАЧ

Н.А. Жигачева, Н.Г. Рыженко

The article deals with theoretical foundations for building the patterns to solve text problems, and it gives the classification of problems according to their solving complexity.

1. Введение

Метод математического моделирования широко используется во всех областях человеческой деятельности, в том числе и в учебной. Знакомство учащихся с элементами математического моделирования способствует формированию у них не только научного мировоззрения, но и делает их учебную деятельность более осмысленной и продуктивной.

Термин «модель» довольно часто используется в педагогических исследованиях и в школьной практике. В качестве моделей выступают: всевозможные структурно-логические схемы, выполненные с разной степенью подробности; таблицы, рисунки, диаграммы, графы, уравнения, системы уравнений и другие. В них наглядно представлены величины, связи и отношения между ними, задачные ситуации. В реальном процессе решения задачи строится не одна модель, а последовательность. Одни из них (таблицы, рисунки, графы) применяются как вспомогательные для построения решающей модели (по терминологии Л.М.Фридмана) [1, с.91] – уравнения или системы уравнений. Необходимо конкретизировать понятия «модель», в частности – «модель решения» сюжетной задачи, «отношения», «связь». Несмотря на то, что решение задач имеет опыт нескольких столетий и методика решения задач выделилась в специальную дисциплину, само понятие «задача», классификация задач имеют различные трактовки и различные подходы. Очевидно, что вообще вряд ли возможно дать общее определение задачи, которое охватывало бы существенные особенности всех имеющихся в настоящее время определений. Более плодотворным является подход выявления основных характеристических свойств понятия «задача». Применение любого подхода предполагает еще и одновременное использование определенного набора приемов и процедур, служащих инструментом осуществления этого подхода. Именно таковым инструментом и является системный анализ.

Омский государственный педагогический университет

2. Системный анализ понятий «задача», «модель», «отношение», «связь»

Условно процесс системного анализа Ю.А.Конаржевский [2, с.54-55] делит на отдельные аспекты. Первый аспект системного анализа – принять анализируемый объект за систему.

Можно считать общепризнанным, что в психолого-педагогических исследованиях задача рассматривается как некая реальная система. Так, Л.М.Фридман, проводя логико-психологический анализ задачи, приходит к выводу, что когда «мы хотим сделать задачи объектом специального изучения, предполагающего рассмотрение задач как особых систем, имеющих определенную структуру» [1, с.13]. При этом задача рассматривается независимо от субъекта, решающего ее. В.И.Крупнич, придерживающийся аналогичной точки зрения на задачу, отмечает: «Каждая задача как сложный объект (система) имеет свое внешнее и внутреннее строение (устройство). Внешнее, то есть смысловое, сюжетное строение задачи назовем информационной структурой задачи. Внутреннее устройство задачи, как системы, называют структурой, то есть то, что остается относительно неизменным при любых преобразованиях задачи в процессе поиска ее решения» [3, с.86]. Заметим, что в дальнейшем мы будем исследовать только структуру решения задачи, которая отлична от структуры задачи.

Отправным пунктом дальнейшего исследования становится понятие *системы.* Существует немало способов классификаций систем и их определений [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Проведя анализ многочисленных определений систем, А.И. Уемов предложил следующее определение: «Вещи m образуют систему относительно заданного свойства P, если в этих вещах имеет место отношение, обладающее свойством P» [7, с.80]. Здесь важно отметить, что свойством P обладают не вещи m, а именно отношения между ними. И как отмечает В.И.Крупич: «... *под системой понимается непустое множество элементов (объектов), на котором реализовано заранее данное отношение R с фиксированным свойством P*» [3, с.42-43].

Следующий аспект системного анализа – декомпозировать систему, выделить элементы, ее составляющие, дать им количественную и качественную характеристику и классифицировать связи и отношения между ними. В философской литературе можно выявить различные подходы к определению содержания категорий: «связь» и «отношение». Анализ этих подходов подробно дан в [2, 8]. Будем исходить из трактовки этих категорий, предложенных А.И.Уемовым, который рассматривает категорию «связь» как частный случай отношений между явлениями. Характеризуя основные признаки целостной системы, Ю.А.Конаржевский пишет: «... что она (система) не является каким-то механическим конгломератом элементов, а *состоит из совокупности взаимосвязанных, взаимодействующих элементов*». Способ же, при помощи которого эти элементы связаны между собой, характер их связи, называют *структурой* [2, с.19-21]. Понятие структуры (лат. structura – строение, связь) равнозначно понятию *упорядоченности* [9, с.182].

Таким образом, в любой системе (задаче) следует различать *состав* и *структуру.* Состав – это множество элементов, структура же – способ связи, упорядоченности этих элементов. Наиболее наглядно структура объектов проявляется при построении моделей этих объектов. В литературе хорошо освещены типы математических моделей и этапы математического моделирования, которые достаточно подробно проанализированы С.Ю.Поляковой [10, с.86-97; с.110-122].

«Термин «модель» используется в связи с определенным отношением между объектами. В этом случае это отношение является отношением подобия, определенным на множестве объектов. В каждом частном случае отношения один из объектов является оригиналом, а другой или другие моделями, то есть объектами, подобными оригиналу по некоторым свойствам» [11, с.124]. В теории интеллектуальных систем широкое применение находят *концептуальные модели.* Понятие «концептуальная модель» образуется из двух понятий: «модель» – смысл этого понятия разъяснен в приведенной выше цитате и концепт (лат. conceptus – понятие). Тогда: «*система в виде совокупности понятий (концептов), определяющих моделируемый объект, и отношений между понятиями (концептами) называется концептуальной моделью*» [11, с.126].

Эти модели обладают рядом специфических черт:

1. В концептуальных моделях объекты представляются не в количественном (метрическом), а в качественном виде в совокупности их существенных отличительных признаков. В этом смысле концептуальные модели как модели отношений являются условиями построения количественных математических моделей.

2. Концептуальная модель представляет собой абстрактный каркас объекта из наиболее существенных для исследовательской задачи его признаков. Поскольку в этом каркасе элементы как понятия, как абстракции отделены от предметных содержаний, то возникает возможность работать с моделью независимо от объектов, исследуя и выявляя законы, присущие собственно модели. Часто оказывается, что различные по своей природе объекты в концептуальном плане представляются одной и той же структурой, именуемой в концептуальном моделировании *конструктом.*

3. В рамках концептуального моделирования рассматривается некоторый аспект объекта – *предмет исследования* (или при большом количестве учитываемых аспектов – *предметная область*).

4. Конструированию модели может быть сопоставлена только часть предметной области, которая и является *содержанием* концептуальной модели, а процесс сопоставления является процессом *интерпретации* [11, с.126-129].

Использование некоторых понятий из теории интеллектуальных систем можно аргументировать тем, что, как при построении систем, так и при их применении учитываются механизмы обучения человека.

При построении моделей систем нужно учитывать то важное обстоятельство, что, будучи аналогом системы, модель не может достигнуть степени сложности оригинала. В модели стремятся отразить специфические отношения данной системы, специально выделенные для исследования. Моделирование по своей логической структуре напоминает умозаключение по аналогии. Современная же формальная логика признает лишь эвристическую ценность выводов по аналогии, ведущих к созданию гипотез. Поэтому должны существовать некоторые правила переноса знаний с модели на оригинал. Они, в то же время, могли бы служить правилами экстраполяции (логико-методологическая процедура, состоящая в переносе качественных или количественных характеристик с одной предметной области на другую).

А.И.Уемов установил, что элементы системы могут быть связаны как *внутренними*, так и *внешними* отношениями. Вывод по аналогии о некоторых свойствах модели может быть экстраполирован на оригинал только в том случае, если отношения являются внутренними. Он же сформулировал некоторые принципы определения внутренних отношений.

Если отношение определяется исключительно самими элементами системы, то такое отношение будет обязательно внутренним, а сама система называется замкнутой, или полной.

Примерами внутренних отношений могут служить: логическое отношение следования, родо-видовые отношения и другие.

Отношение может быть внутренним, если система не является замкнутой. Это возможно, если выполняется принцип размерности. На практике принцип размерности осуществляется проверкой свойств, по которым устанавливаются данные отношения. Так, например, отношение между числами (отношение равенства) может быть установлено по разным свойствам:

$a \cdot b = c$ – по мультипликативным свойствам,

$a + b = c$ – по аддитивным свойствам.

Итак, можно дефинировать: *математической моделью решения задачи является кортеж* $< M;\ R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_m >$, где М – множество концептов, а $R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_m$ – внутренние отношения на этом множестве (не обязательно бинарные).

3. Графовое моделирование отношений

Понятия (концепты) в математической модели могут быть представлены с помощью различных искусственных языков (диаграмм, графов и других). Очень наглядным и широко используемым в математике является «язык графов». Графы являются одним из важных способов задания бинарных отношений на конечных множествах.

Пусть $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Выделим из этого множества подмножество R пар $< x; y >$, в которых $x < y$, $R = \{< 1; 2 >; < 2; 3 >; < 3; 4 >; < 1; 3 >; < 1; 4 >; < 2; 4 >\}$ и дадим геометрическое изображение отношения R (рис.1).

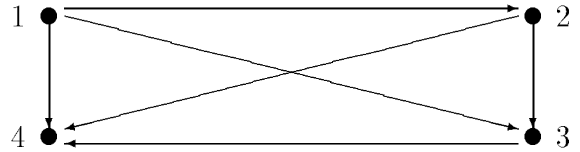

Рис.1

Полученная фигура называется ориентированным графом, или просто графом, а сами точки – вершинами графа. Направленные отрезки, соединяющие вершины графа, – ребра графа (дуги). Граф является моделью $< M; <>$ с одним (бинарным) отношением строгого порядка $<$. Это отношение строгого порядка можно интерпретировать и другим графом, который называется *деревом* (рис.2). Дерево получается путем «расслоения» графа. Начинаем с вершины 4, которую располагаем на 1 ярусе. Так как в вершину 4 входят три дуги от вершин 1, 2 и 3, то эти вершины располагаем на 2 ярусе, и так далее. Вершины, в которые не входит ни одна дуга, называются висячими (вершина 1 на 2 ярусе и вершины 1, 2, 1 на 3 ярусе). В множестве M наибольшим элементом является $x_0 = 4$, он называется *корнем* дерева. Вершины 2 яруса образуют окрестность x_0, аналогично вершины 3 яруса образуют окрестность вершин 2 яруса. Характерно, что в дереве от каждого элемента к верхнему ярусу идет ровно одна дуга.

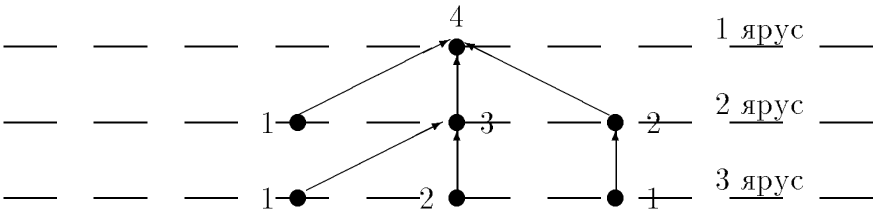

Рис.2

Дерево является моделью бинарного отношения R *строгого порядка.* Отличительной особенностью дерева является то, что:

1) в нем существует наибольший элемент;

2) из того, что $x < y$ и $x < z$, следует, что y и z сравнимы ($y < z$ или $y = z$, или $z < y$).

Поэтому отношения строгого порядка $<$ на множестве M, удовлетворяющие перечисленным выше двум условиям, называют *отношением древесного порядка* (или древесным порядком).

Для дерева существует несколько числовых характеристик, одна из них характеризует *сложность* конечного дерева. Нахождение сложности дерева покажем на конкретном примере. На рисунке 3 изображены деревья, имеющие одинаковое число вершин.

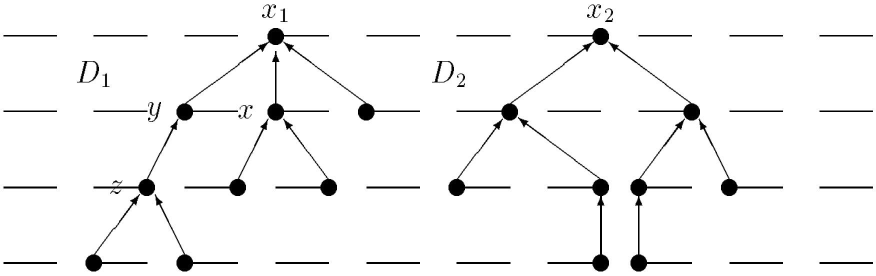

Рис.3

Сложность вершины $\sigma(x_1) = 3 \cdot 9$, где 3 – число дуг, входящих в x_1; 9 – число всех вершин, включая и саму вершину x_1. Аналогично, $\sigma(y) = 1 \cdot 4$; $\sigma(x) = 2 \cdot 3$; $\sigma(z) = 2 \cdot 3$. Суммарная сложность всех вершин и дает сложность дерева: $\sigma(D_1) = 3{\cdot}9+1{\cdot}4+2{\cdot}2{\cdot}3 = 43$, соответственно: $\sigma(D_2) = 2{\cdot}9+2{\cdot}4+1{\cdot}2+2{\cdot}4+1{\cdot}2 = 38$.

Более подробно с этими и другими понятиями в теории графов можно ознакомиться в [12, 13].

Заметим, что в дальнейшем сложность дерева будем отождествлять со сложностью решения задачи.

4. Семантические графы структур решений сюжетных задач

Для уточнения понятия структурного элемента решения задачи, отношений между элементами и свойства отношений рассмотрим следующие задачи.

1.1 Автомобиль движется равномерно, со скоростью a км/ч. Какой путь он пройдет за b ч?

1.2 Книга стоит a рублей. Сколько денег заплатила библиотека за покупку b книг?

1.3 Производительность бригады a деталей в час. Сколько деталей изготовит бригада за b часов?

Предметная область каждой задачи состоит из трех величин и их значений: c – путь, стоимость, объем выполненной работы; a – скорость, цена, производительность; b – время, количество. Эти три величины связаны тернарным отношением равенства $c = a \cdot b$, которое установлено по мультипликативному свойству. Деревом моделируются только бинарные отношения, в задаче же в основном отношения тернарные. Для моделирования тернарных отношений введем понятие *семантического дерева*, которое отличается от понятия дерева тем, что в каждую вершину привнесена некоторая семантическая информация – одно из значений величин предметной области задачи. В дереве отмечается свойство, по которому установлено отношение равенства (рис.4).

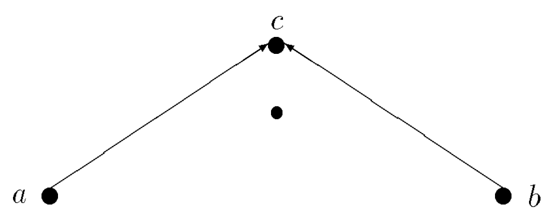

Рис.4

Из трех элементов предметной области один элемент c является неизвестным, при этом он является и искомым, а два других элемента a и b являются известными.

Назовем этот семантический граф (в дальнейшем просто граф) *графом зависимостью*: $c = a \cdot b$. В силу обратимости операций умножения и деления, этот граф является моделью и взаимно обратных задач: $a = c/b$ или $b = c/a$. Сложность графа: $\sigma = 2 \cdot 3 = 6$.

Граф является моделью структур решений задач 1.1 – 1.3 со сложностью решения $\sigma = 6$ (структурные элементы – значения величин; отношение – тернарное отношение равенства, заданное по мультипликативному свойству).

Эта модель удовлетворяет еще одному аспекту системного анализа. Она является интеграционной моделью для решения задач различных сюжетов и решения взаимнообратных задач.

Для выявления других отношений в задачах ограничимся только сюжетными задачами на движение.

Задача 2. Скорость велосипедиста a_1 км/ч, а скорость мотоциклиста на d км/ч больше (в d раз больше). Найти скорость мотоциклиста.

Предметная область задачи состоит из одной основной величины – скорости и двух ее значений: одно значение известно – скорость велосипедиста; другое значение – скорость мотоциклиста неизвестно и является искомым. Кроме основной величины – скорости, в задаче заданы: 1) значение разностного отношения двух значений основной величины (на d км/ч больше), 2) значение кратного отношения между значениями основной величины (в d раз больше). Моделью структуры решения задачи является граф (рис.5).

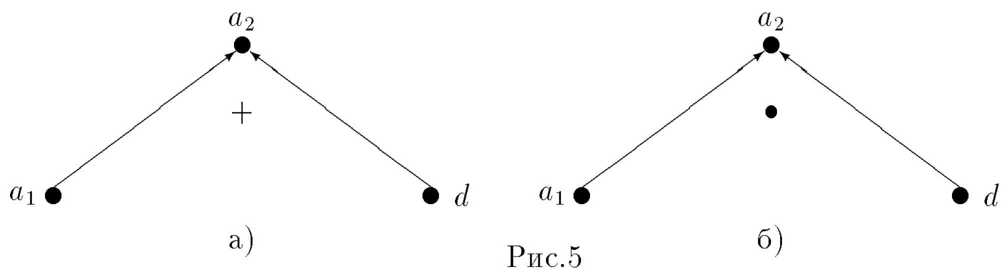

Рис.5

Граф (рис.5а)) назовем *графом разностного сравнения*, а граф (рис.5б)) – *графом кратного сравнения*. Сложность решения задачи: $\sigma = 2 \cdot 3 = 6$. Эти графы являются моделями решений задач: 1) с соотношением равенства $a_2 = a_1 + d$, заданному по аддитивному свойству, а также взаимно обратных задач: $a_1 = a_2 - d$ или $d = a_2 - a_1$, 2) с соотношением равенства $a_2 = a_1 \cdot d$, заданному по мультипликативному свойству, а также взаимно обратных задач: $a_1 = a_2/d$ или $d = a_2/a_1$.

Задача 3. Из двух пунктов навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Найти их относительную скорость, если скорость первого a_1 км/ч, а скорость второго a_2 км/ч.

Модель структуры решения представлена на рисунке 6а.

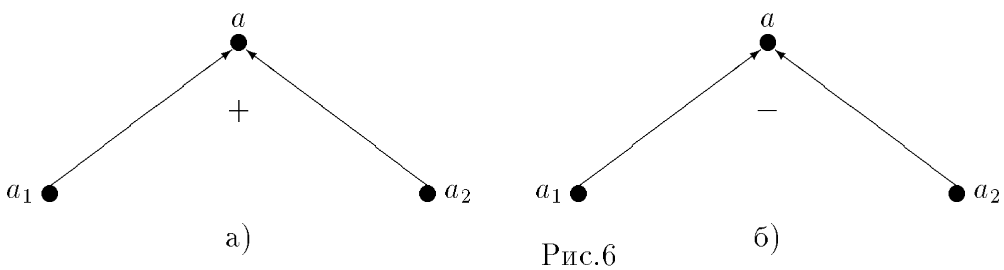

Рис.6

Предметная область задачи состоит из одной величины – скорости. Два значения a_1 и a_2 известны, а третье значение a – относительная скорость – неизвестно и является искомым. Моделируется структура решения задачи с отношением равенства $a = a_1 + a_2$. Назовем граф (рис.6а)) *графом суммирования.* В задачах может быть не только отношение соединения (суммирования), но и отнимания: $a = a_1 - a_2$ (рис.6б)). Такой граф назовем *графом отнимания.* Сложность решения задачи: $\sigma = 2 \cdot 3 = 6$.

Рассмотренные графы являются моделями внутренних отношений решений сюжетных задач. Назовем их графами I порядка сложности. Структурными элементами решения задачи (концептами) являются значения величин и результаты разностного или кратного сравнений значений двух значений одной и той же величины.

Модели решений более сложных задач строятся с использованием графов I порядка сложности.

Задача 4. Велосипедист, двигаясь со скоростью 12 км/ч, проехал 24 км. Какое расстояние проедет за это время мотоциклист, скорость которого 36 км/ч? (рис.7)

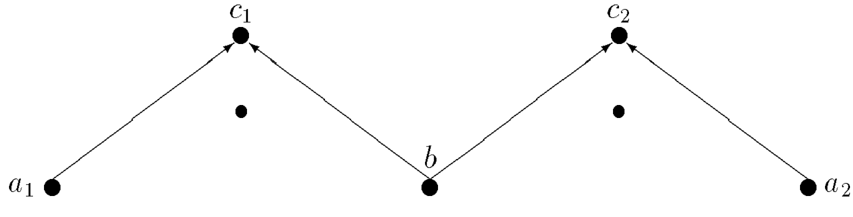

Рис.7

Этот граф не является деревом. Структурный элемент b является общим для двух задачных ситуаций: 1) равномерное движение велосипедиста и 2) равномерное движение мотоциклиста. Расслоим этот граф путем «раздвоения» вершины b (рис.8) в два дерева.

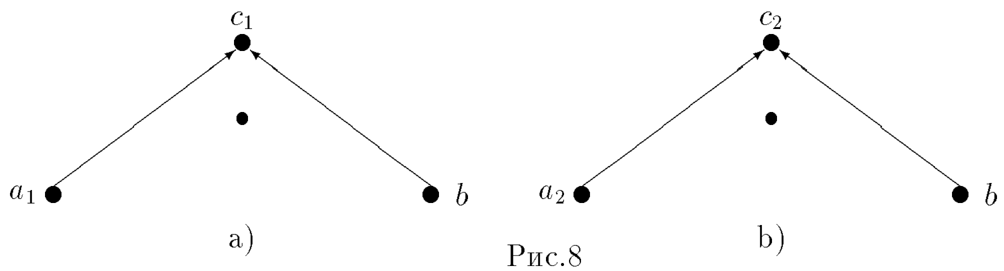

Рис.8

Каждое дерево моделирует одну из задачных ситуаций. Совокупность деревьев образует *лес*. Сложность леса будем характеризовать как суммарную сложность деревьев его составляющих: $\sigma = \sigma(c_1) + \sigma(c_2) = 6 + 6 = 12$.

1. $c_1 = a_1 \cdot b$, $b = c_1/a_1$.

2. $c_2 = a_2 \cdot b$, $c_2 = a_2 \cdot c_1/a_1 = (36 \cdot 24)/12 = 72$ км.

Задача 5. Из двух пунктов, расстояние между которыми 96 км, одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист со скоростью 12 км/ч и мотоциклист, скорость которого 36 км/ч. Через сколько часов они встретятся?

Структура решения характеризуется графом (рис.9).

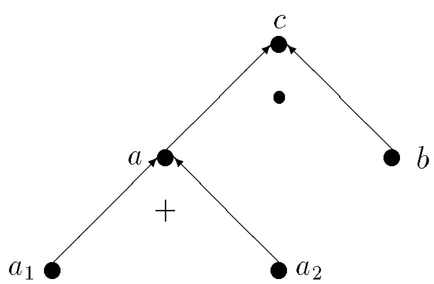

Рис.9

1. $c = a \cdot b$,

2. $a = a_1 + a_2$,

3. $c = (a_1 + a_2) \cdot b$, $b = c/(a_1 + a_2)$, $b = 96/(36 + 12) = 2$ч,

$\sigma = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 16$,

где c км – расстояние, a км/ч – относительная скорость, a_1 км/ч – скорость велосипедиста, a_2 км/ч – скорость мотоциклиста, b ч – время.

Задача 6. Расстояние между двумя пунктами велосипедист проезжает за 8 ч. Мотоциклист, скорость которого на 20 км/ч больше скорости велосипедиста, проезжает это же расстояние за 3 ч. Найти расстояние между пунктами.

Структура решения задачи – лес (рис.10).

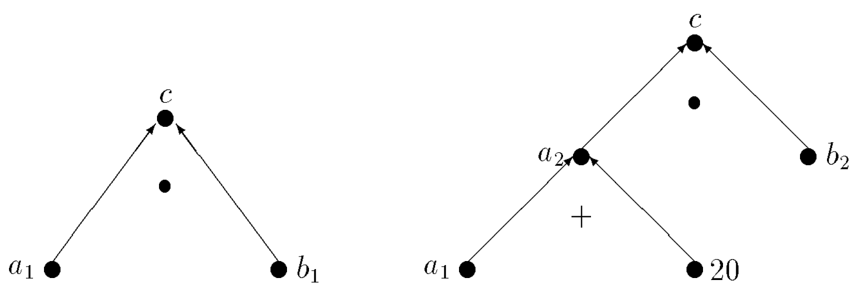

Рис.10

1. $c = a_1 \cdot b_1$,
2. $c = a_2 \cdot b_2$,
3. $a_2 = a_1 + 20$, $c = (a_1 + 20) \cdot b_2$,
4. $a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot b_2 + 20 \cdot b_2$, $a_1 = 20 \cdot b_2/(b_1 - b_2) = (20 \cdot 3)/(8 - 3) = 12$ч.

$\sigma = 6 + 16 = 22$.

Задача 7. Велосипедист проезжает 36 км за 3 ч, а мотоциклист 180 км за 5 ч. Какое расстояние проедут велосипедист и мотоциклист вместе за 6 ч? (рис.11)

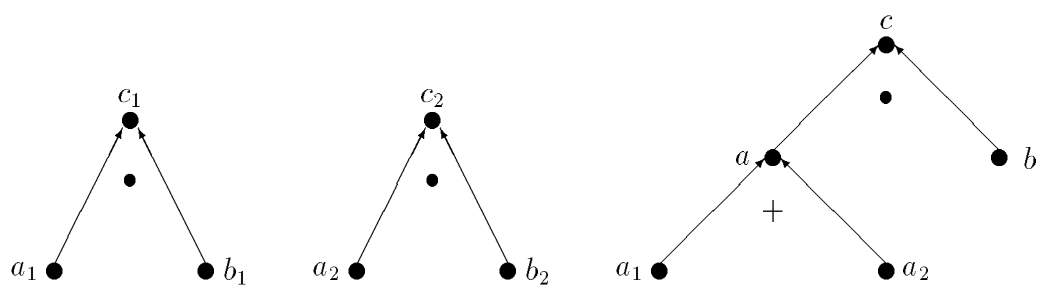

Рис.11

1. $c_1 = a_1 \cdot b_1$, $a_1 = c_1/b_1$,
2. $c_2 = a_2 \cdot b_2$, $a_2 = c_2/b_2$,
3. $c = a \cdot b$,
4. $a = a_1 + a_2$,
5. $c = (c_1/b_1 + c_2/b_2) \cdot b$, $c = (36/3 + 180/5) \cdot 6 = 288$км.

$\sigma = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 28$.

Количественная оценка сложности решения задачи является объективной основой для систематизации задач в систему, которая в практике преподавания осуществляется интуитивно. Проиллюстрируем это на примере двух задач, взятых из учебника алгебры для 7 класса (Ш.А. Алимов и другие).

Задача 8 (127*). Расстояние между двумя поселками равно 9 км. Дорога имеет подъем, равномерный участок и спуск. Скорость пешехода на подъеме равна 4 км/ч, на равнинном участке – 5 км/ч, на спуске – 6 км/ч. Сколько километров составляет равнинный участок, если пешеход проходит расстояние от одного поселка до другого и обратно за 3 часа и 11 минут?

Модель структуры решения задачи представлена на рисунке 12,

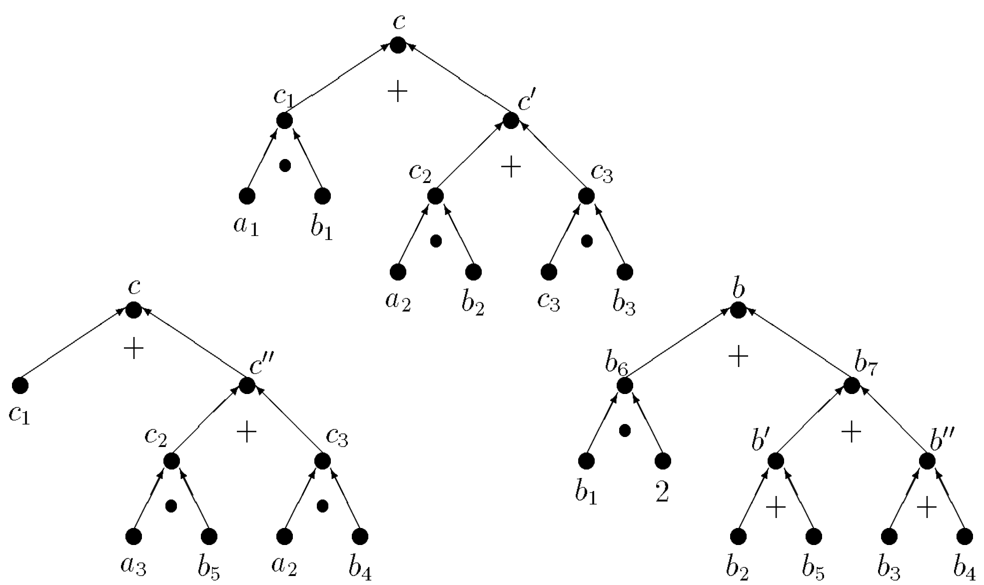

Рис.12

c км – расстояние между поселками,

c_1 км – длина равнинного участка,

a_1 км/ч – скорость пешехода на равнинном участке,

b_1 ч – время пешехода на равнинном участке.

Соответственно:

c_2, a_2, b_2 – значения величин на подъеме,

c_3, a_3, b_3 – значения величин на спуске,

$c' = c_2 + c_3$ – расстояние, пройденное пешеходом на подъеме и спуске.

c_3, a_2, b_4 – значения величин на подъеме, когда пешеход двигался в обратном направлении,

c_2, a_3, b_5 – значения величин при спуске.

b ч – время, затраченное пешеходом для прохождения пути от одного поселка до другого и обратно,

b_1 ч – время на равнинном участке,

$b' = b_2 + b_5$ – суммарное время, затраченное на подъеме, а затем на спуске для прохождения одного и того же участка. Аналогично:

$b'' = b_3 + b_4$.

$\sigma = (2 \cdot 11 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 2 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 152.$

Задача 9 (754**). Для содержания лошадей был сделан запас сена на некоторое время. Если бы лошадей было на 2 меньше, то этого запаса хватило бы еще на 10 дней; если бы лошадей было на 2 больше, то запаса не хватило бы на 6 дней. Сколько было лошадей и на сколько дней был сделан запас сена? (Рис.13)

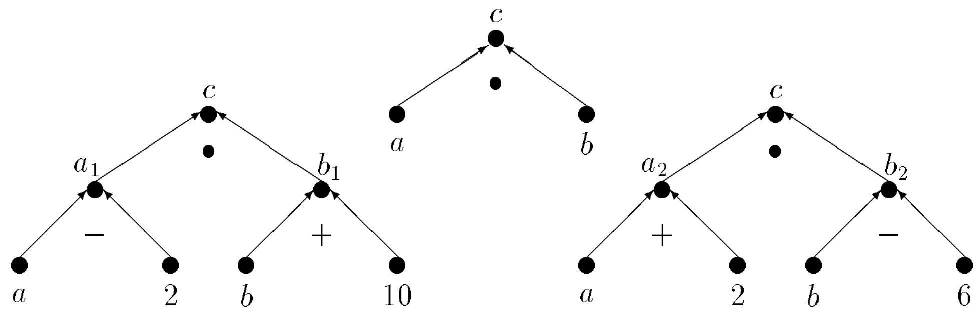

Рис.13

c – запас сена,

a – количество лошадей,

b – количество дней.

$\sigma = 2 \cdot (2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3) + 2 \cdot 3 = 58.$

Обучение учащихся моделированию структур решений сюжетных задач позволяет включать их в деятельность по созданию моделей и решению задач одинаковой структуры, но различных сюжетов.

Задача 10. Зоина бабушка развела гусей и кроликов, у которых 25 голов и 54 лапки. Сколько гусей и сколько кроликов у бабушки?

Задача 11. У мальчика было 370 рублей пятирублевыми и двадцатирублевыми монетами; всего 26 монет. Сколько пятирублевых и сколько двадцатирублевых монет у него было?

Задача 12. У причала находилось 6 лодок, часть из которых была двухместными, а часть трехместными. Всего в эти лодки может поместиться 14 человек. Сколько двухместных и сколько трехместных лодок было у причала?

Структуры решения этих задач одинаковы. Их модели будут изоморфны модели, приведенной на рисунке 14.

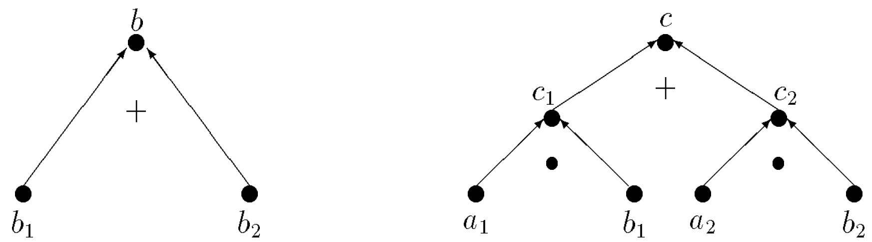

Рис.14

$\sigma = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 32.$

Результаты собственного опыта по обучению учащихся моделированию структур решений сюжетных задач начиная с 5 класса позволяют утверждать, что к концу учебного года учащиеся могут решать задачи сложности $\sigma = 32$, а сильные учащиеся – и более сложные задачи.

5. Заключение

В работе изложен один из возможных подходов к моделированию структур решений сюжетных задач и нахождение сложности их решения. При этом:

1. Графовая модель решения задачи выражает программу, создаваемую в процессе анализа задачи, где четко указана последовательность выполняемых действий.

2. Граф служит сохранению информации, предупреждает от блужданий, связанных с повторением уже рассмотренных комбинаций.

3. Один и тот же граф является моделью структуры решения не одной сюжетной задачи, а множества, имеющих одно и то же количество отношений, связанных между собой по одним и тем же свойствам.

4. Структура решения задачи – объективная ее характеристика, а ее количественная оценка является основой для систематизации задач в систему по нарастающей сложности их решения. Структурный анализ решения задач в учебниках 7 класса показал, что наибольшая сложность решения $\sigma = 152$, а наибольшее число задач приходится на сложность $\sigma = 32$.

Литература

1. Фридман Л.М. *Логико-психологический анализ школьных учебных задач.* М.: Педагогика, 1977.

2. Конаржевский Ю.А. *Система. Урок. Анализ.* Псков: ПОИПКРО, 1996.

3. Крупич В.И. *Структура и логика процесса обучения математике в средней школе: Метод. разработки по спецкурсу для слушателей ФПК.* М., 1985.

4. Колягин Ю.М. *Задачи в обучении математике.* Ч.1; ч.2. М.: Просвещение, 1977.

5. Колягин Ю.М. *Общее понятия задачи в кибернетическом и системно-психологическом аспекте и его приложения в педагогике математики// Роль и место задач в обучении математике* / Под ред. Ю. М. Колягина. М., 1973.

6. Ильина Т.А. *Системно-структурный подход к исследованию педагогических явлений* // Результаты новых исследований в педагогике. М., 1977.

7. Уемов А.И. *Системы и системные исследования* // Проблемы методологии системного исследования. М., 1972.

8. Ждан Н.А. *Реализация содержательно-деятельных связей в обучении химии как средство повышения системности и осознанности знаний учащихся*: / Дисс... канд. пед. наук (13.00.02). Омск, 1998.

9. Эткинс П. *Порядок и беспорядок в природ* / Пер. с англ. М.: Мир, 1987.

10. Полякова С.Ю. *Некоторые вопросы математического моделирования общественных процессов* // Математические структуры и моделирование. Вып.1. Омск: ОмГУ, 1998.

11. Ладенко И.С., Разумов В.И., Теслинов А.Г. *Концептуальные основы теории интеллектуальных систем (Систематизация методологических основ интеллектики)* / Со РАН Ин-т Философии и Права. Отв. ред. И.С. Ладенко. Новосибирск, 1994.

12. Шрейдер Ю.А. *Равенство, сходство, порядок.* М.: Наука, 1971.

13. Березина Л.Ю. *Графы и их применение.* М., 1979.