Математические
структуры и моделирование
1999. Вып. 4, с.63-68.

УДК 513.81

ХРОНОЛОГИЯ И ЛОРЕНЦЕВА ФУНКЦИЯ РАССТОЯНИЯ

А.Н. Романов

The global hyperbolicity of distinguishing space-time with finite Lorentz function of distance is proved. The chronological maps of such causal space-times are studied

В данной работе рассматриваются лоренцевы многообразия, которые в отличие от римановых имеют метрики сигнатуры $(-++...+)$. Приложения лоренцевой геометрии, рассматривающей лоренцевы многообразия, используются в разделах теоретической физики, изучающих свойства пространства-времени.

Далее будут рассматриваться лоренцевы многообразия, в которых условие конечности лоренцевой функции расстояния является инвариантом относительно конформных преобразований метрики (терминология взята из [1]).

В дальнейшем будем использовать следующее утверждение:

Лемма 1. *Пространство-время* (M,g) *глобально гиперболично тогда и только тогда, когда когда оно сильно причинно и* (M,g') *удовлетворяет условию конечности расстояния для всех* $g' \in C(M,g)$.

Доказательство. См. [1], теорема 3.30. ∎

Здесь через $C(M,g)$ обозначен класс лоренцевых метрик на многообразии M, глобально конформных метрике $g : g' \in C(M,g) \Leftrightarrow g' = \Omega g$ для некоторой гладкой функции $\Omega : M \to (0,\infty)$.

Разделим лоренцевы многообразия на два непересекающихся класса: A и B. Класс B характеризуется следующим свойством. Пусть между точками $p, s \in M$ выполнены следующие соотношения: $s \in cl(J_p^+)$, но $s \notin J_p^+$. Таким образом, любую окрестность U_s точки $s \in M$ можно достичь направленной в будущее причинной кривой γ, выходящей из p, однако сама точка s остается недостижимой. Допустим теперь, что имеет место следующая ситуация: существует настолько малая окрестность U_s точки s, что для того, чтобы достичь ее направленной в будущее причинной кривой, выходящей из p, необходимо,

E-mail: romanow@univer.omsk.su
Омский государственный университет

чтобы, во-первых, эта кривая γ целиком находилась бы в некотором (фиксримáнованном) компактном множестве K, а, во-вторых, ее риманова длина (измеренная в любой заранее выбранной римановой метрике), была бы больше любого наперёд заданного положительного числа N. Другими словами, чтобы «подойти» достаточно близко к точке s, причинная кривая γ должна совершить достаточно большое количество «оборотов» во множестве K.

Если такая ситуация имеет место в некотором многообразии (M, g), то будем относить его к классу B, в противном случае будем считать данное лоренцево многообразие относящимся к классу A.

В качестве гипотезы можно выдвинуть предположение, что к классу B относятся лишь многообразия, не являющиеся причинными, то есть содержащие замкнутые причинные кривые. Однако это утверждение требует отдельного доказательства. В дальнейшем же будут приведены результаты, касающиеся только лоренцевых многообразий, принадлежащих классу A (даже если это не будет отдельно оговорено).

Следующее утверждение позволяет делать некоторые выводы о топологии лоренцева многообразия, исходя из его причинной структуры.

Лемма 2. *Пусть пространство-время (M, g) принадлежит классу A. Если для некоторых точек $p, s \in M$, множество $J_p^+ \cap J_s^-$ не замкнуто в M, а $I_p^+ \cap I_s^- \neq \emptyset$, то тогда (замкнутое) множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ не является компактным.*

Доказательство.

Допустим, что множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ компактно. Так как множество $J_p^+ \cap J_s^-$ не замкнуто, то существует точка $q \in cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ такая, что $q \notin J_p^+ \cap J_s^-$. В этом случае $q \notin J_p^+$ (случай $q \notin J_s^-$ доказывается аналогично).

Рассмотрим последовательность точек $q_n \subset J_p^+ \cap J_s^-$ такую, что $q_n \to q$, т.е. сходящуюся к q (сходимость в исходной топологии многообразия M).

Таким образом, имеем:

$$q_n : p \leq q_n, q_n \to q.$$

Так как $p \leq q_n$, то $\forall n$ существует причинная кривая γ_n, идущая из p в q_n. Продолжим γ_n до непродолжаемой причинной кривой. Любая окрестность точки q содержит все точки q_n, начиная с некоторого n. А так как $q_n \in \gamma_n$, то q является точкой накопления последовательности причинных непродолжаемых кривых γ_n. Отсюда следует (см. [1], предложение 2.18), что существует причинная непродолжаемая кривая γ, являющаяся предельной для последовательности γ_n и такая, что $q \in \gamma$. Выберем параметризацию γ так, что $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ и $\gamma(0) = q$, причем уменьшение параметра t кривой γ соответствует движению по ней в прошлое.

Рассмотрим часть кривой γ, идущую в прошлое от точки $q :\ \gamma(-\infty, 0]$. Заметим, что для любой точки $a \in \gamma(-\infty, 0]$ выполняется соотношение: $a \in cl(J_p^+)$ Действительно, т.к. γ – предельная кривая последовательности γ_n, то существует подпоследовательность $\gamma_m \subset \gamma_n$ такая, что для любой точки $a \in \gamma$ каждая ее окрестность U_a пересекает все, за исключением конечного числа, кривые из γ_m. Взяв точки r_m такие, что $r_m \in \gamma_m, r_m \in U_a$, получим сходящуюся к a последовательность $r_m : r_m \to a$. Если выполнено еще соотношение $r_m \in J_p^+$, то получим, что $a \in cl(J_p^+)$. В данном случае включение $r_m \in J_p^+$ выполняется всегда. В самом деле, если $r_m \notin J_p^+$ то это означает, что кривая γ (вместе с кривыми γ_m) покинула область $cl(J_p^+)$. Однако выйти из $cl(J_p^+)$ γ может лишь через точку p, так как все γ_m «фокусируются» в p (по их определению), а γ – предельная кривая для последовательности γ_m. Но такого быть не может, так как это означало бы существование отрезка (лежащего на кривой γ), соединяющего точки p и q и являющегося частью причинной кривой (γ – причинна), что противоречит выбору точки $q : q \notin J_p^+$.

Таким образом, мы показали, что $\forall a \in \gamma(-\infty, 0]$, $a \in cl(J_p^+)$ Ясно, что выполнено также включение $a \in cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ (т.к. из $a \leq q, q << r \Rightarrow, a << r$, т.е. $a \in int\, J_s^-$) В результате имеем: часть кривой γ, идущая в прошлое от точки q, целиком находится во множестве $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$, которое по сделанному предположению является компактным.

По построению кривой γ (см. [1], предложение 2.18), последовательность γ_m сходится к γ равномерно на любом компактном множестве из $\mathbf{R}$ в случае, если кривые γ и γ_m параметризованы длиной дуги, вычисленной относительно (полной) римановой метрики.

Так как ни для какого значения параметра $t \leq 0$ кривая γ не покидает множества $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$, а последовательность γ_m сходится к γ равномерно на любом компактном множестве из $\mathbf{R}$ (то есть кривые γ_m «повторяют» движение γ), то получаем следующую ситуацию: если взять достаточно малую окрестность U_q точки q, то длины кривых γ_m, достигающих этой окрестности, с необходимостью должны быть больше любого наперёд заданного положительного числа N. Однако это означает, что пространство-время (M, g) принадлежит классу B, в то время как по условию (M, g) принадлежит классу A.

Полученное противоречие опровергает сделанное предположение о том, что множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ компактно и тем самым доказывает лемму.

■

Следующее утверждение взято из [1].

Лемма 3. *Пусть (M, g) – пространство-время. Если для некоторых точек $p, s \in M$, множество $cl(J_p^+ \cap J_s^-)$ не является компактным, то существует лоренцева метрика $g' \in C(M, g)$, глобально конформная метрике g такая, что $d(a, b) = \infty$ для некоторых точек $a, b \in M$.* ■

Теперь применим полученные результаты к исследованию причинной структуры пространства-времени (M, g), для которого условие конечности расстояния является инвариантом при конформных преобразованиях метрики g.

Теорема 1. *Пусть (M, g) – различающее пространство-время. Если пространство-время (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$, то пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим.*

Доказательство.

Покажем сначала, что (M, g) является причинно простым, (т.е различающим с дополнительным условием, что множества J_p^+ и J_p^- замкнуты для всех $p \in M$).

Покажем, что множество J_p^+ замкнуто для любой точки $p \in M$ (замкнутость J_p^- доказывается аналогично).

Допустим обратное: $\exists$ точка $q \in cl(J_p^+) \setminus J_p^+$. Возьмем в I_q^+ произвольную точку r. Покажем, что множество $J_p^+ \cap J_r^-$ не пусто. Так как $q \in cl(J_p^+)$, то $\exists$ последовательность точек $q_n \subset J_p^+$, сходящаяся к q (сходимость в исходной топологии многообразия M). Так как $q \in I_r^-$ а множество I_r^- открыто (см. [1], лемма 2.5), то для достаточно больших $n\, q_n \in I_r^-$, т.е. $q_n << r$. Тогда из соотношений $p \leq q_n, q_n << r$ получаем: $p << q_n$ т.е. $r \in I_p^+$. Таким образом, имеем: множество $I_p^+ \cap I_r^-$ не пусто.

Получаем: $J_p^+ \cap J_r^- \neq \emptyset$ (т.к. $I_p^+ \subset J_p^+, I_r^- \subset J_r^-, I_p^+ \cap I_r^-$.)

Множество $J_p^+ \cap J_r^-$ не замкнуто в M $(q \in I_r^- = int J_r^-)$:

$$(q \in I_r^- = int J_r^-) : q \in int(J_r^-)\,,\ q \in cl(J_p^+),\ q \notin J_p^+ \ \Rightarrow\ q \in cl(J_p^+ \cap J_r^-) \setminus (J_p^+ \cap J_r^-).$$

Тогда, по лемме 2, получаем, что множество $cl(J_p^+ \cap J_r^-)$ не компактно. Следуя лемме 3, можно найти метрику $g' \in C(M, g)$ такую, что пространство-время (M, g') не удовлетворяет условию конечности лоренцева расстояния, что противоречит условию теоремы.

Таким образом, множества J_p^+ и J_p^- замкнуты и пространство-время (M, g) является причинно простым. Причинная простота пространства-времени (M, g) автоматически влечет за собой его сильную причинность. Теперь, по лемме 1 сразу получаем желаемый результат: Пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим.

■

Приведем следствие теоремы 1:

Следствие 1. *Пусть (M, g) – пространство-время. Если пространство-время (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$, то множества J_s^+ и J_p^+ замкнуты в M.* ■

Теорема 1 утверждает, что для пространств с конечной лоренцевой функцией расстояния условия различаемости и глобальной гиперболичности эквивалентны. Следующее утверждение усиливает этот результат.

Теорема 2. *Причинное пространство-время (M, g) является глобально гиперболическим тогда и только тогда, когда (M, g') удовлетворяет условию конечности расстояния для всех $g' \in C(M, g)$.*

Доказательство.

1) Пусть (M, g) – глобально гиперболическое пространство-время. Так как конформный множитель не меняет структуру пространства-времени, то тогда весь класс лоренцевых метрик $g' \in C(M, g)$ допускает лишь конечные лоренцевы расстояния (см [1], следствие 3.7). Причинность пространства-времени (M, g) следует непосредственно из его глобальной гиперболичности.

2) Пусть (M,g) – причинное пространство-время и условие конечности расстояния выполнено для всех метрик $g' \in C(M,g)$. Покажем,что (M,g) – различающее пространство-время. Допустим обратное: (M,g)– не различающее. Тогда существуют по крайней мере две точки p и s такие что $p \neq s$ и $I_p^+ = I_s^+$ (или $I_p^- = I_s^-$), т.е. имеющие одинаковое хронологическое будущее (или прошлое).

Итак, $I_p^+ = I_s^+$. Пусть α – направленная в будущее времениподобная кривая, выходящая из p. Тогда все точки кривой α, отличные от p, принадлежат множеству I_p^+. Рассмотрим последовательность точек q_n, ни одна из которых не совпадает с p, такую, что $q_n \in \alpha$, $q_n \to p$. Вследствие равенства $I_p^+ = I_s^+$ и того, что все q_n лежат в I_p^+, получаем:$q_n \in I_s^+ \forall n \in \mathbf{N}$. Из соотношений $q_n \to p$, $q_n \in I_s^+$, получаем: $p \in cl(I_s^+) = cl(J_s^+)$. Меняя в приведенных рассуждениях местами точки p и s,получаем: $s \in cl(I_p^+) = cl(J_p^+)$. Так как по условию для любой метрики $g' \in C(M,g)$, пространство-время (M,g') удовлетворяет условию конечности расстояния, то (см. следствие 1), множества J_s^+ и J_p^+ замкнуты в M. Вместе с приведенными выше включениями это даёт:

$$s \in cl(J_p^+) = J_p^+ \, , \, p \in cl(J_s^+) = J_s^+ .$$

Тогда существует направленная в будущее причинная кривая γ_1, идущая из s в p, и направленная в будущее причинная кривая γ_2, идущая из p в s. Объединение этих двух кривых даёт замкнутую причинную кривую $\gamma_1 + \gamma_2$. Однако вследствие причинности (M,g) замкнутых причинных кривых в нём быть не может. Полученное противоречие доказывает, что (M,g) – различающее. Вспоминая, что для любой метрики $g' \in C(M,g)$, пространство-время (M,g') удовлетворяет условию конечности расстояния, то по теореме 1 получаем требуемое утверждение: пространство-время (M,g) является глобально гиперболическим.

■

Применим теперь полученные результаты для сравнения структур гладкости двух пространств, имеющих в некотором смысле одинаковую хронологию.

Гомеоморфизм двух многообразий $f : M \to M'$ будем называть хронологическим, если $f(I_x^+) = I_{f(x)}^+$ для любой точки $x \in M$. Два пространства-времени в случае существования такого гомеоморфизма называются хронологически гомеоморфными.

Следующий результат взят из [3]:

Лемма 4. *Пусть (M,g) и (M',g') – два различающих пространства-времени, и $f : M \to M'$ – хронологический гомеоморфизм. Тогда f является гладким конформным преобразованием.* ■

Для более узкого класса многообразий данное утверждение можно усилить:

Теорема 3. *Пусть (M,g) и (M',g') – два причинных пространства-времени, удовлетворяющих условию конечности расстояния для всех метрик, глобально конформных данным. Тогда, если $f : M \to M'$ – хронологический гомеоморфизм, то f является гладким конформным преобразованием.*

Доказательство.

Из теоремы 2 следует, что оба пространства-времени глобально гиперболические, а следовательно, и различающие. Далее, по лемме 4, получаем требуемый результат.

■

Таким образом, в классе пространств с конечным лоренцевым расстоянием хронологическая гомеоморфность эквивалентна диффеоморфности.

Литература

1. Бим Дж., Эрлих П. *Глобальная лоренцева геометрия.* М.: Мир, 1985.
2. Пенроуз Р. *Структура пространства-времени.* М.: Мир, 1972.
3. Malament D.B. *The class of continuous timelike curves determines the topology of spasetime.* J.Math.Phys. 1977. Vol.18. N 7. P.1399-1404.