Математические
структуры и моделирование
1999. Вып. 4, с.52-62.

УДК 519.1

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ФАСЕТНОСТИ ГРЕБНЕВЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ МНОГОГРАННИКА СВЯЗНЫХ $2k$-ФАКТОРОВ

В.А. Мищенко

In this paper a polytope — convex hull of connected k-factors, where k is even, is considered. A necessary condition are derived, under which a comb inequality defines a facet of the polytope. It restrict the number of combs, which pretend to induce a facet.

1. Введение

В последние годы рядом авторов активно развивается полиэдральный подход к решению задач дискретной оптимизации (ДО), согласно которому с задачей ассоциируется выпуклая оболочка векторов инциденций допустимых решений [5]. При этом вершины получающегося многогранника и допустимые решения задачи находятся во взаимно-однозначном соответствии, что позволяет применять для ее решения методы линейного программирования (ЛП) и целочисленного линейного программирования. Однако, как правило, задача построения полного линейного описания выпуклой оболочки достаточно сложна как с теоретической, так и с алгоритмической точки зрения. Но даже если такое описание имеется, применение аппарата ЛП существенно затрудняется большим количеством ограничений. Поэтому ограничения, участвующие в линейном описании многогранника, целесообразно использовать в качестве отсекающих плоскостей, отталкиваясь от того или иного релаксационного множества. В связи с этим полезным является даже частичное линейное описание. Особую роль при этом играют опорные неравенства, порождающие грани максимальной размерности (фасеты) многогранника задачи. Важность таких фасетных неравенств объясняется следующими соображениями: во-первых, эти неравенства (с точностью до эквивалентности) входят в каждую линейную систему,

E-mail: mishenko@univer.omsk.su
Омский государственный университет

описывающую многогранник; во-вторых, они являются в известном смысле «достаточно сильными» отсечениями, что подтверждается результатами, полученными в последние годы при решении дискретных экстремальных задач [9].

В данной работе рассматривается многогранник связных k-факторов полного графа. Под k-фактором полного n-вершинного графа ($k < n$, kn – четно) понимается его остовный однородный степени k подграф. Заметим, что при $k = 2$ этот многогранник является многогранником гамильтоновых циклов симметричной задачи коммивояжера, и поэтому его можно рассматривать как обобщение последнего.

Эдмондсом и Джонсоном в [8] было дано линейное описание выпуклой оболочки k-факторов для произвольного k (без условия связности).

В настоящее время известно большое количество классов фасетных неравенств для многогранника связных 2-факторов [11, 12], хотя его полное линейное описание не найдено. Условие связности оказалось довольно трудным препятствием на этом пути.

Важный класс полупространств,опорных к многограннику, ассоциированному с задачей ДО, образуют такие, нормали которых суть векторы инциденций различных подграфов полного графа. Неравенства, порождающие такие полупространства, называются ранговыми. Характерной особенностью ранговых неравенств является то, что они образуют множества всех опорных неравенств с коэффициентами 0 и 1 в левой части. Для многогранника связных k-факторов при $k = 2$ М.Гретшелем и В.Паллейбланком в [12] полностью описан класс фасетных ранговых неравенств. Этот класс, содержащий, в частности, широко известные неравенства 2-сочетаний (введенные Эдмондсом в [7]), совпадают с множеством простых деревьев клик [12]. При $k > 2$ вопрос о полной характеризации ранговых неравенств, порождающих фасеты многогранника связных k-факторов, остается открытым.

В [4] получены достаточные и ряд необходимых условий фасетности ранговых неравенств для этого многогранника, с помощью которых выделены три класса фасетных неравенств. Структура левых частей последних позволяет говорить, что полученные результаты являются обобщающими по отношению к случаю $k = 2$. Этими классами являются так называемые тривиальные фасеты, совпадающие с ограничениями единичного куба, неравенства, порожденные кликами, и неравенства, порожденные графами Эдмондса [7] (при некоторых дополнительных условиях).

В данной работе рассматриваются ранговые неравенства, порожденные так называемыми простыми гребнями, которые являются обобщением графов Эдмондса. В [10] показано, что при $k = 2$ гребневые неравенства порождают фасеты многогранника симметричной задачи коммивояжера. Для этих неравенств в [3] получены необходимые условия фасетности относительно многогранников связных 3-факторов и 4-факторов. Представленная ниже теорема обобщает случай 4-факторов до произвольного четного фактора.

2. Основные понятия и факты

Пусть $K_n = (V, E)$ – полный неориентированный n-вершинный граф без петель и кратных ребер. Для любого подграфа, отличного от K_n, через VG и EG будем соответственно обозначать множества его вершин и ребер. Граф G_1 называется подграфом графа G_2 (обозначение $G_1 \subseteq G_2$), если $VG_1 \subseteq VG_2$ и $EG_1 \subseteq EG_2$. Для ребра $e \in E$ будем также использовать запись uv, где u, v – вершины из V, инцидентные ребру e.

Каждое множество $R \subset E$ индуцирует некоторый подграф T, в котором $ET = R$ и VT – совокупность вершин из V, инцидентных ребрам из R. Граф, индуцированный множеством ребер R, иногда будем обозначать через R. Для подграфов G, F из K_n положим $G \cup F = (VG \cup VF, EG \cup EF)$, $G \cap F = EG \cap EF$, и если $F \subseteq G$, то $G \backslash F = (VG, EG \backslash EF)$.

Кликой будем называть произвольный полный подграф графа K_n.

Степень вершины $u \in V$ относительно графа $G \subset K_n$, т.е. количество ребер графа G, инцидентных вершине u, будем обозначать через $d_G(u)$. Если $G = K_n$, то в обозначении $d_G(u)$ символ G будем опускать.

Степенной последовательностью графа называется список степеней его вершин. Последовательность $d = (d_1, d_2, \ldots, d_m)$ целых неотрицательных чисел ниже называется m-последовательностью; m-последовательность d называется графической, если существует граф, степенная последовательность которого с точностью до упорядочения совпадает с d. Этот граф называется реализацией m-последовательности d.

Назовем m-последовательность правильной, если $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ – четное число.

При этом ясно, что согласно «леммы о рукопожатиях» всякая графическая последовательность является правильной.

Для последовательностей будем также использовать запись $d = (c_1^{k_1}, c_2^{k_2}, \ldots, c_p^{k_p})$, где числа c_i попарно различны, а показатель k_i означает количество повторений числа c_i в последовательности d.

С графом K_n свяжем евклидово пространство R^E размерности $(n^2 - n)/2$, взаимно-однозначно поставив в соответствие каждому ребру ось координат в R^E. Это пространство может рассматриваться как множество вектор-столбцов x, компоненты которых индексируются элементами из E. Если $x \in R^E$ и $R \subset E$, то через $x(R)$ обозначим линейную форму $\sum\limits_{e \in R} x_e$.

Вектором инциденций произвольного подграфа $G \subseteq K_n$ называется вектор $x^G \in R^E$ с компонентами $x_e^G = 1$ при $e \in EG$, $x_e^G = 0$ при $e \notin EG$. Последнее правило, очевидно, задает взаимно однозначное соответствие между множеством подграфов графа K_n и множеством вершин единичного куба в пространстве R^E. На основании этого соответствия там, где это не вызовет недоразумений, (0,1)-вектор x мы будем также называть подграфом графа K_n.

Множество $P \subset R^E$ называется многогранником, если P является выпуклой оболочкой конечного числа точек. Под размерностью $dimP$ многогранника P будем понимать уменьшенную на 1 мощность максимального аффинно независимого семейства его точек. Линейное неравенство $a^T x \leq a_0$

$(a, x \in R^E, a \neq 0, a_0 \in R^1)$ называется опорным относительно многогранника P, если существуют такие $x', x'' \in P$, что $a^T x' = a_0$ и $a^T x'' < a_0$. Всякое опорное к P неравенство порождает множество $\{x \in P | a^T x = a_0\}$, которое называется гранью многогранника P. Опорное к P неравенство называется фасетным, если оно порождает фасету многогранника P. Множество всех вершин многогранника P будем обозначать через $vertP$. Наконец, опорные к P неравенства $a^T x \leq a_0$ и $c^T x \leq c_0$ называются эквивалентные (относительно P), если они порождают одну и ту же грань.

Как уже говорилось, фасетные неравенства играют особую роль для многогранника, так как каждое из них (с точностью до эквивалентности) присутствует в любой системе линейных уравнений и неравенств, описывающих этот многогранник.

Обозначим через $\tau_{k,n}$ множество всех связных k-факторов в K_n. Многогранником связных k-факторов является множество

$$P_{k,n} = conv\{x^H \in R^E | H \in \tau_{k,n}\}.$$

Так как $\tau_{1,n} = \emptyset$, $\tau_{n-1,n} = \{K_n\}$ и случаи $n \leq 4$ тривиальны с точки зрения построения линейного описания многогранника $P_{k,n}$, ниже мы будем всюду полагать, что $2 \leq k \leq n-2$, и $n \geq 5$.

Пусть $G \subset K_n$. Ранг $r_r(G)$ подграфа G относительно $\tau_{k,n}$ определим так:

$$r_k(G) = \max\{|EG \cap EH|, \text{при условии, что } H \in \tau_{k,n}\}.$$

Ранговым неравенством, индуцированным графом G, называется линейное неравенство вида

$$x(EG) \leq r_k(G). \tag{1}$$

Как уже говорилось, ранговые неравенства в силу определения величины $r_k(G)$ образуют класс всех опорных к $P_{k,n}$ неравенств с коэффициентами 0 и 1 в левой части. Кроме того, нормаль порождаемой неравенством (1) гиперплоскости в R^E определяется подграфом G (является его вектором инциденций). Поэтому представляет интерес следующий вопрос: существуют ли среди ранговых неравенств фасетные неравенства и если существуют, то какими графами они индуцируются?

В [4] доказано следующее необходимое условие фасетности рангового неравенства относительно $p_{k,n}$ при $k \geq 2$.

Теорема 1. *Пусть неравенство $a^T x \leq a_0, a \neq 0$ опорно к $P_{k,n}$, $\{x^1, x^2, \dots, x^t\}$ — множество вершин порождаемой им грани. Если $\left|\bigcap\limits_{i=1}^{t} Ex^i\right| \geq 2$ или $\left|E \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{t} Ex^i\right)\right| \geq 2$, то неравенство $a^T x \leq a_0$ не является фасетным.* ■

Определение . Пусть $P, D_1, D_2, \dots, D_q \subset K_n$ — семейство клик, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|VP| = p, |VD_i| = d_i, i = 1, \dots, q;$

2) $VD_i \cap VD_j = \emptyset$;

3) $|VD_i \cap VP| = 1$.

Тогда граф $F = P \cup D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_q$ называется простым гребнем. При этом P будем называть ручкой простого гребня F, или просто ручкой, а D_i — зубом простого гребня F или просто зубом.

Кроме того, пусть в дальнейшем $P_0 \subset K_n$ — клика порядка p_0, такая, что $VP_0 = VK_n \backslash VF$. Из вышесказанного следует, что $p + q(d-1) + p_0 = n$.

Следующие параграфы посвящены поиску необходимых условий на величины p, q, d_i, p_0, при которых ранговое неравенство, порожденное простым гребнем F:

$$x(EF) \le r_{2k}(F).$$

может быть фасетным для многогранника связных $2k$-факторов.

3. Необходимое условие фасетности гребневых неравенств

В дальнейшем будем рассматривать только графы без петель и кратных ребер.

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть G_n — связный граф, в котором ровно n вершин степени $2k$, $k \ge 2$, тогда, если $n \ge 2k-1$, то существует связный граф с $n+1$ вершиной степени $2k$ и таким же набором степеней остальных вершин.*

Доказательство. Докажем, что в G_n существует k попарно несмежных ребер.

Предположим, что не существует k попарно несмежных ребер, тогда пусть $H \subseteq G_n$ — максимальное паросочетание. По предположению $|EH| \le k-1$, то есть $|VH| \le 2k-2$. Отсюда следует, что по крайней мере одна вершина степени $2k$ не принадлежит VH. Пусть $u \in VG_n \backslash VH$. Так как $d_G(u) = 2k$, то u инцидентна $2k$ вершинам, а поскольку $|VH| \le 2k-2$, то существует $v \in VG \backslash VH$, инцидентная u. Ребро uv не является смежным ни для какого ребра из EH, значит, $EH \cup \{uv\}$ – совокупность попарно несмежных ребер, и $|EH| < |EH \cup \{uv\}|$, что противоречит максимальности H. Отсюда следует, что в G_n существует k попарно несмежных ребер.

Построим G_{n+1}. Добавим к VG_n вершину w, то есть $VG_{n+1} = VG_n \cup \{w\}$. Пусть $e_i = u_i v_i$, $i = 1 \ldots k$ – совокупность попарно несмежных ребер из G_n. Тогда $EG_{n+1} = (EG_n \backslash (\cup_{i=1}^k e_i)) \cup (\cup_{i=1}^k u_i w) \cup (\cup_{i=1}^k v_i w)$.

Из построения видно, что $d_{G_{n+1}}(w) = 2k$, а степени вершин G_n не изменились. Следовательно, G_{n+1} имеет ровно $n+1$ вершину степени $2k$ и такой же, как у G_n, набор степеней остальных вершин. ■

Из леммы 1 очевидно следует существование связных $2k$-факторов при $k \ge 2$.

Лемма 2. *При $n \geq 2k+2$ n-последовательность $(2k^{n-1}, 2)$ может быть реализована связным графом.*

Доказательство. Докажем по индукции. Пусть G_n – граф, реализующий n-последовательность $(2k^{n-1}, 2)$. Построим G_{2k+2}. Для этого возьмем $VG_{2k+2} = VK_{2k+1} \cup \{u\}$. Выберем ребро $v_1v_2 \in K_{2k+1}$, тогда $EG_{2k+2} = (EK_{2k+1} \backslash \{v_1v_2\}) \cup \{uv_1, uv_2\}$. Легко видеть, что $d_{G_{2k+2}}(u) = 2$, а $\forall v \in VK_{2k+1}$ $d_{G_{2k+2}}(v) = 2k$. Таким образом, база индукции у нас есть.

Предположим, что граф G_{n_0} $n_0 \geq 2k+2$ существует. В G_{n_0} ровно $n_0 - 1$ вершин степени $2k$, и так как $n_0 - 1 \geq 2k+2-1 \geq 2k-1$, то по лемме 1 существует G_{n_0+1}. По принципу математической индукции G_n существует при $n \geq 2k+2$. ■

Лемма 3. *При $n \geq 2k+3, 1 \leq l \leq n$ n-последовательность $((2k)^{n-l}, (2k-2)^l)$ может быть реализована связным графом.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $l = 1$ и $l = 2$. Построим связные графы G_1 и G_2, реализующие соответственно $(2k+3)$-последовательности $((2k)^{2k+2}, (2k-2)^1)$ и $((2k)^{2k+1}, (2k-2)^2)$. Пусть G – такой граф, что $VG = VK_{2k+1} \cup \{w\}$. Так как K_{2k+1} состоит из $2k+1$ вершины степени $2k$, то из доказательства леммы 1 следует, что существуют попарно несмежные ребра $e_1, e_2, \ldots, e_k \in EK_{2k+1}$. Пусть $e_i = u_iv_i$, где $i = 1 \ldots (k-1)$. Тогда $EG = (EK_{2k+1} \backslash (\cup_{i=1}^{k-1} e_i)) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} u_iw) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} v_iw)$. Граф G реализует $(2k+2)$-последовательность $((2k)^{2k+1}, (2k-2)^1)$. Из существования G по лемме 1 следует существование связного графа G_1.

Теперь построим G_2. Пусть $VG_2 = VG \cup \{w\}$. Так как G содержит $2k+1$ вершину степени $2k$, то из доказательства леммы 1 следует, что существуют попарно несмежные $e_1, e_2, \ldots, e_k \in EK_{2k+1}$. Пусть $e_i = u_iv_i$, где $i = 1 \ldots (k-1)$. Тогда $EG_2 = (EG \backslash (\cup_{i=1}^{k-1} e_i)) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} u_iw) \cup (\cup_{i=1}^{k-1} v_iw)$. Из построения видно, что граф G_2 реализует $(2k+3)$-последовательность $((2k)^{2k+1}, (2k-2)^2)$, также из построения следует его связность.

Докажем существование связных реализаций n-последовательностей $((2k)^{n-1}, (2k-2)^1)$ и $((2k)^{n-2}, (2k-2)^2)$ индукцией по n. При $n = 2k+3$ графы G_1 и G_2 являются реализациями соответствующих последовательностей. Они и станут базой индукции. Предположим, что существуют связные графы, реализующие n_0-последовательности $((2k)^{n_0-1}, (2k-2)^1)$ и $((2k)^{n_0-2}, (2k-2)^2)$, при $n_0 \geq 2k+3$. В этих графах вершин степени $2k$ не менее, чем $2k-1$, следовательно, по лемме 1 существуют связные графы, реализующие (n_0+1)-последовательности $((2k)^{n_0}, (2k-2)^1)$ и $((2k)^{n_0-1}, (2k-2)^2)$. По принципу математической индукции для любого $n \geq 2k+3$ существуют связные реализации n-последовательностей $((2k)^{n-1}, (2k-2)^1)$ и $((2k)^{n-2}, (2k-2)^2)$.

Докажем случай $3 \leq l \leq n$. Если $3 \leq l \leq (2k+1)$, то возьмем граф K_{2k+1} и выберем в нем цикл C длины l. В силу полноты K_{2k+1} такой цикл существует. Тогда пусть граф G_l, такой, что $VG_l = VK_{2k+1}$, а $EG_l = EK_{2k+1} \backslash EC$. Очевидно, что граф G_l связный и реализует $(2k+1)$-последовательность $((2k)^{2k+1-l}, (2k-2)^l)$. Он будет базой индукции. В случае $(2k+1) < l \leq n$ в качестве базы индукции G_l возьмем $(2k-2)$-фактор на l вершинах. Существование такого графа следует из леммы 1. Таким образом, при $3 \leq l \leq n$ база индукции есть.

Предположим, что существует граф G_{l,n_0}, реализующий n_0-последовательность $((2k)^{n_0-l}, (2k-2)^l)$. Докажем, что в нем существует k попарно несмежных ребер. Предположим что это не так. Пусть $H \subseteq G_{l,n_0}$ — максимальное паросочетание. По предположению $|EH| \leq k-1$, то есть $|VH| \leq 2k-2$. Пусть существует вершина u степени $2k$, не принадлежащая VH, тогда в силу того, что $|VH| \leq 2k-2$, существует $v \in VG_{l,n_0} \backslash VH$, инцидентная u. Ребро uv не является смежным ни для какого ребра из EH, значит, $EH \cup \{uv\}$ — совокупность попарно несмежных ребер и $|EH| < |EH \cup \{uv\}|$, что противоречит максимальности H. Отсюда следует, что в G_{l,n_0} существует k попарно несмежных ребер.

Пусть все вершины из $VG_{l,n_0} \backslash VH$ имеют степень $2k-2$, тогда в силу того, что $|VH| \leq 2k-2$, а $|VG_{l,n_0}| \geq 2k+1$, существуют две вершины $u, v \in VG_{l,n_0} \backslash VH$ степени $2k-2$. Из максимальности H следует, что u и v инцидентны всем вершинам из H. Пусть $u_0v_0 \in EH$. Ребра u_0u и v_0v существуют и не являются смежными ни для какого ребра H, кроме u_0v_0. Тогда пусть H_1 такой, что $VH_1 = VH \cup \{u, v\}$, а $EH_1 = (EH \backslash u_0v_0) \cup \{u_0u, v_0v\}$. По построению H_1 является паросочетанием, и $|EH_1| > |EH|$, что противоречит максимальности H. Таким образом, существование в G_{l,n_0} k попарно несмежных ребер доказано. Построим G_{l,n_0+1}. Добавим к VG_{l,n_0} вершину w, то есть $VG_{l,n_0+1} = VG_{l,n_0} \cup \{w\}$. Пусть $e_i = u_iv_i$, $i = 1 \ldots k$ – совокупность попарно несмежных ребер из G_n. Тогда $EG_{l,n_0+1} = (EG_{l,n_0} \backslash (\cup_{i=1}^k e_i)) \cup (\cup_{i=1}^k u_iw) \cup (\cup_{i=1}^k v_iw)$. Из построения видно, что $d_{G_{l,n_0+1}}(w) = 2k$, а степени вершин G_{l,n_0} не изменились. Следовательно, G_{l,n_0+1} реализует (n_0+1)-последовательность $((2k)^{n_0+1-l}, (2k-2)^l)$. По принципу математической индукции при $3 \leq l \leq n$ и $n \geq 2k+3$ существует связный граф, реализующий n-последовательность $((2k)^{n-l}, (2k-2)^l)$. ■

Теорема 2. *Пусть $F \subset K_n$ — простой гребень. Если выполняются следующие условия:*

a) $p_0 = 0$ или $p_0 \geq 2k+1$,

b) $d_i \geq 2k+2$, $i = 1 \ldots q$,

c) $p \geq 2k+3$,

то ранговое неравенство

$$x(EF) \leq r_{2k}(F)$$

не является фасетным к $P_{2k,n}$.

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) $p \geq 2k+3, q \leq p, d_i \geq 2k+2, p_0 = 0$; 2)$p \geq 2k+3, q \leq p, d_i \geq 2k+2, p_0 \geq 2k+1$ и покажем, что в этих случаях неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ не является фасетным.

1) Сначала рассмотрим случай $p_0 = 0$, то есть, когда $VF = VK_n$.

Из определения ранга следует, что $r_{2k}(F) \leq k|VF|$. Покажем, что $r_{2k}(F) = k|VF|$, для чего конструктивно построим граф H^*, на котором достигается оценка $|EH^* \cap EF| = k|VF|$.

Пусть H_1 — связная реализация p-последовательности $((2k)^{p-q}, (2k-2)^q)$ на множестве вершин VP. Поскольку $p \geq 2k+3$, то по лемме 3 такой граф существует. Так как P — клика, то $H_1 \subseteq P$. При этом можно так построить H_1, что вершины, в которых зубья присоединяются к ручке, будут иметь степень $2k-2$. Другими словами:

$d_{H_1}(u) = 2k-2, u \in VP \cap (\bigcup_{i=1}^{q} VD_i)$;

$d_{H_1}(u) = 2k, u \in VP \backslash (\bigcup_{i=1}^{q} VD_i)$.

Далее на множестве вершин VD_i построим граф H_{2i} — связную реализацию d_i-последовательности $((2k)^{d_i-1}, 2)$, для каждого $i = 1, \ldots, q$. Это возможно по лемме 2. Так как D_i — клика, то $H_{2i} \subseteq D_i$. Кроме того можно так построить H_{2i}, что вершина, в которой зуб присоединяется к ручке, будет иметь степень 2. Другими словами выполняются следующие равенства:

$d_{H_{2i}}(u) = 2, \{u\} = VD_i \cap VP, i = 1, \ldots, q$;

$d_{H_{2i}}(u) = 2k, u \in VD_i \backslash VP, i = 1, \ldots, q$.

Построим граф H^* из H_1 и H_{2i}, $i = 1, \ldots, q$ по следующей схеме $EH^* = EH_1 \cup (\bigcup_{i=1}^{q} EH_{2i})$. По построению H_1 и H_{2i}, $i = 1, \ldots, q$ справедливо равенство $VH^* = VF$ Так как $p_0 = 0$, то $VH^* = VK_n$.

Из построения H_1 и H_{2i} справедливо равенство

$d_{H^*}(u) = 2k$, $u \in VF \backslash (VP \cap (\bigcup_{i=1}^{q} VD_i))$. Для каждого $i = 1, \ldots, q$, если вершина $u \in VD_i \cap VP$, то $d_{H^*}(u) = d_{H_1}(u) + d_{H_{2i}}(u) = (2k-2) + 2 = 2k$, в силу того, что $|VP \cap VD_i| = 1$.

Таким образом, H^* – остовный однородный степени $2k$ подграф. Кроме того из связности H_1 и H_{2i} следует связность H^*, и значит, $H^* \in \tau_{2k,n}$. По построению $EH^* \subset EF$, значит, $|EH^* \cap EF| = |EH^*| = k|VF|$.

Рассмотрим ребро $e_0 = u_0 v_0 \notin EF$, $u_0, v_0 \in VF$. Такое ребро существует, например, пусть $u_0 \in VD_i \backslash VP$, $v_0 \in VP \backslash VD_i$, так как $d_i \geq 2k+2$ при $i = 1 \ldots q$, $p \geq 2k+3$ и $|VD_i \cap VP| = 1$, то такие вершины существуют. В этом случае $e_0 \notin EF$. По тем же соображениям существует еще одно ребро $e_1 = u_1 v_1 \notin EF$, $u_1, v_1 \in VF$, отличное от e_0.

Пусть $e_0 \in EH_0$, где $H_0 \in \tau_{2k,n}$. Покажем, что тогда

$$|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F).$$

Так как $H_0 \in \tau_{2k,n}$, то $d_{H_0 \cap F}(u) \leq 2k$, где $u \in VF$.

Поскольку $e_0 \notin EF$, следовательно $e_0 \notin E(H_0 \cap F)$, значит, верны неравенства $d_{H_0 \cap F}(u_0) \leq 2k-1$, $d_{H_0 \cap F}(v_0) \leq 2k-1$.

Заметим, что $V(H_0 \cap F) = VF = VK_n$. Тогда

$$|EH_0 \cap EF| = |E(H_0 \cap F)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF} d_{H_0 \cap F}(u) = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF \backslash \{u_0, v_0\}} d_{H_0 \cap F}(u) +$$

$$+ \frac{1}{2}(d_{H_0 \cap F}(u_0) + d_{H_0 \cap F}(v_0)) \leq \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (|VF| - 2) +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (2k-1+2k-1) = k|VF| - 2k + 2k - 1 = k|VF| - 1 < k|VF|.$$

Следовательно, $|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F)$, то есть $x^H(EF) < r_{2k}(F)$. В силу произвольности H_0, из того, что $x^H(EF) = r_{2k}(F)$, где $H \in \tau_{2k,n}$, следует, что $e_0 \notin EH$ и в силу равноправности e_0 и e_1, $e_1 \notin EH$.

Так как неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ опорно к многограннику $P_{2k,n}$ и для каждого $H \in \tau_{2k,n}$, для которого $x^H(EF) = r_{2k}(F)$, следует, что $e_0, e_1 \notin EH$, а значит

$$\left| E \backslash \left(\bigcup_{x^H(EF)=r_{2k}(F)} H \right) \right| \geq 2$$

и по теореме 1 неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ не является фасетным для многогранника связных $2k$-факторов.

2) Теперь рассмотрим случай $p_0 \geq 2k+1, p \geq 2k+3, d_i \geq 2k+2$ при $i = 1 \ldots q$, $q \leq p$.

Из определения ранга следует, что $r_{2k}(F) \leq k|VF|$. Докажем, что не существует связного $2k$-фактора H, для которого $|EH \cap EF| = k|VF|$.

Пусть H — произвольный связный $2k$-фактор. Так как H — остовный, то существует такое ребро $e = u^*v^* \in EH$, что $u^* \in VF, v^* \notin VF$. Ясно, что $V(H \cap F) = VF$.

Так как $e \notin VF, H \in \tau_{2k,n}$, то $d_{H \cap F}(u^*) \leq 2k-1$, $u^* \in V(H \cap F)$ и для любой вершины $u \in V(H \cap F)$, $d_{H \cap F}(u) \leq 2k$, так как $H \in \tau_{2k,n}$. Тогда

$$|EH \cap EF| = |E(H \cap F)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF} d_{H \cap F}(u) = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF \backslash \{u^*\}} d_{H \cap F}(u) +$$
$$+ \frac{1}{2} d_{H \cap F}(u^*) \leq \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (|VF| - 1) + \frac{1}{2} \cdot (2k-1) = \frac{2k|VF|}{2} - k + k - \frac{1}{2} =$$
$$= k|VF| - \frac{1}{2} < k|VF|.$$

Так как H – произволен, то $r_{2k}(F) = \max\{|EH \cap EH|, H \in \tau_{2k,n}\} < k|VF|$. Так как $r_{2k}(F)$ – целое число, то $r_{2k}(F) \leq k|VF| - 1$. Построим $2k$-фактор H^*, удовлетворяющий условию $|EH^* \cap EF| = k|VF| - 1$.

Пусть H_1 и H_{2i} такие же, как в случае $p_0 = 0$, и $H_3 = H_1 \cup (\bigcup_{i=1}^{q} H_{2i})$. Как и в предыдущем случае, H_3 связный однородный степени $2k$ подграф, но не остовный, так как существует остаток $VK_n \backslash VF$, $|VK_n \backslash VF| = p_0 \geq 2k+1$. Построим на вершинах $VK_n \backslash VF$ связный $2k$-фактор и удалим из него произвольное ребро. Получится граф H_4 — связная реализация p_0-последовательности $((2k)^{p_0-2}, (2k-1)^2)$.

Пусть w_1 и $w_2 \in VH_4$ — вершины степени $2k-1$. Выберем произвольное ребро $e_0 \in H_3, e_0 = u_0v_0$. Построим H^* по следующей схеме: $EH^* = (EH_3 \backslash \{e_0\}) \cup EH_4 \cup \{u_0w_1, v_0w_2\}$. По построению $VH^* = VK_n$, и $d_{H^*}(u) = 2k$ для любой вершины $u \in VK_n$. Кроме того H^* связный в силу связности H_3 и H_4, значит H^* является связным 2k-фактором. Заметим, что $EH^* \cap EF = (EH_3 \backslash e_0) \cap EF = (EH_3 \cap EF) \backslash e_0$, поэтому $|EH^* \cap EF| = |EH_3 \cap EF| - 1$, так как $e_0 \in EF$. По доказанному для случая $p_0 = 0$, имеем $|EH_3 \cap EF| = k|VF|$. Следовательно, $|EH^* \cap EF| = k|VF| - 1$, $r_{2k}(F) = k|VF| - 1$.

Возьмем пару ребер $e_0 = u_0v_0 \notin EF$, $u_0, v_0 \in VF$ и $e_1 = u_1v_1 \notin EF$, $u_1, v_1 \in VF$. Как было доказано выше, такие ребра существуют.

Пусть $e_0 \in EH_0$, где $H_0 \in \tau_{2k,n}$. Покажем, что тогда

$$|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F).$$

В силу связности и остовности H_0 существует такое ребро $e_2 = u_2v_2$, что $u_2 \in VF, v_2 \in VK_n \backslash VF$. Так как $u_0, v_0 \in VF$, то $e_2 \neq e_0$.

Если $u_2 \neq u_0, u_2 \neq v_0$, то $d_{H_0 \cap F}(u) \leq 2k$, где $u \in VF$. Так как $e_0, e_2 \notin EF$, следовательно, $e_0, e_2 \notin E(H_0 \cap F)$, а значит, $d_{H_0 \cap F}(u_0) \leq 2k-1$, $d_{H_0 \cap F}(v_0) \leq 2k-1$, $d_{H_0 \cap F}(u_2) \leq 2k-1$.

Заметим, что так как H_0 — остовный, то $V(H_0 \cap F) = VF$. Тогда

$$\begin{aligned}
|EH_0 \cap EF| = |E(H_0 \cap F)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF} d_{H_0 \cap F}(u) = \frac{1}{2} \sum_{u \in VF \backslash \{u_0, v_0, u_2\}} d_{H_0 \cap F}(u) + \\
+ \frac{1}{2}(d_{H_0 \cap F}(u_0) + d_{H_0 \cap F}(v_0) + d_{H_0 \cap F}(u_2)) \leq \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot (|VF| - 3) + \\
+ \frac{1}{2} \cdot (2k - 1 + 2k - 1 + 2k - 1) = \frac{2k|VF|}{2} - 3k + 3k - \frac{3}{2} = \\
= k|VF| - 1\frac{1}{2} < k|VF| - 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, $|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F)$, то есть $x^H(EF) < r_{2k}(F)$.

В случае $u_2 = u_0$, так как $e_0, e_2 \notin EF$, то $d_{H_0 \cap F}(u_o) \leq 2k - 2$ и $d_{H_0 \cap F}(v_o) \leq 2k - 1$.

Аналогично получаем, что $|EH_0 \cap EF| < r_{2k}(F)$, то же самое для случая $u_2 = v_0$.

В силу произвольности H_0, из равенства $x^H(EF) = r_{2k}(F)$, где $H \in \tau_{2k,n}$ следует $e_0 \notin EH$. Аналогичными рассуждениями получим $e_1 \notin EH$.

Так как неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ опорно к многограннику $P_{2k,n}$ и для любого $2k$-фактора H, удовлетворяющего уравнению $x^H(EF) = r_{2k}(F)$, имеем $e_0, e_1 \notin EH$, то

$$\left| E \backslash \left(\bigcup_{x^H(EF) = r_{2k}(F)} H \right) \right| \geq 2.$$

Отсюда по теореме 1 неравенство $x(EF) \leq r_{2k}(F)$ не является фасетным для многогранника связных $2k$-факторов. ∎

Литература

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация.* М: Наука, 1983. 335 с.

2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов.* М.: Наука, 1990. 383 с.

3. Мищенко В.А. *Необходимые условия фасетности гребневых неравенств для многогранников 3 и 4-факторов*: Дипломная работа. Омск, 1997. 33 с.

4. Симанчёв Р.Ю. *О ранговых неравенствах, порождающих фасеты многогранника связных k-факторов* // Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирск, 1996. Т. 3. N 3. С.84-110.

5. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования*: В 2 т. М.: Мир, 1991. 702 с.

6. Харари Ф. *Теория графов.* М.: Мир, 1973. 300 с.

7. Edmonds J. *Maximum matching and a polyhedron with 0,1- vertices* // Journal of Research of the National Bureau of Standarts B. 1965. P.125-130.

8. Edmonds J., Johnson E.L. *Matching: a well-solved class of integer linear programs* / Ed. by R.Guy, H.Hanani, N.Sauer and J.Schonheim. / Combinatorial structures and their applications. // Gordon and Breach, New York, 1970. P.89-92.

9. Grötschel M. Holland O. *Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems* // Mathematical Programming. 1991. N51. P.141-202.

10. Grötschel M. Padberg M.W. *On the symmetric travelling salesman problem II: lifting theorem and facets* // Mathematical Programming. 1979. N16. P.281-302.

11. Grötschel M. Padberg M.W. *Polyhedral theory* // Ed. by E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.N.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys, The Traveling Salesman Problem // John Wiley & Sons Ltd., 1985. P.251-305.

12. Grötschel M. Pulleyblank W.R. *Clique tree inequalities and the symmetric traveling salesman problem* // Math. of Operations Research. 1986. Vol. 11. N 4. P.537-569.