Математические структуры и моделирование
1999. Вып. 4, с.34-51.

УДК 513.81

ПРОСТРАНСТВА А.Д. АЛЕКСАНДРОВА ОГРАНИЧЕННОЙ СВЕРХУ КРИВИЗНЫ

Д.В. Лахин

In this paper the following problem is studied. Let $\pi : \tilde{M} \to M$ be a branched covering of smooth riemannian manifold M with metric d by manifold $\tilde{M}$. It is possible to draw the metric d from M into some metric $\tilde{d}$ on $\tilde{M}$. And there appears a question: what conditions about M and π can ensure the metric space $(\tilde{M}, \tilde{d}\,)$ to be an Alexandrov space of bounded curvature? This question is considered in given paper.

1. Введение

В последнее время в геометрии проявляется большой интерес к изучению вопросов, связанных с пространствами А.Д.Александрова ограниченной сверху кривизны. Эта работа посвящена следующей задаче. Пусть M – гладкое риманово многообразие и $\pi : \tilde{M} \to M$ – разветвленное накрытие M многообразием $\tilde{M}$. Определение разветвленного накрытия, а также все остальные, см. в пункте 2. Обозначим метрику на M через d. Метрика на M с помощью отображения π может быть поднята на $\tilde{M}$. Возникает вопрос, какие условия на M и π являются достаточными для того, чтобы многообразие $\tilde{M}$ превратилось в пространство А.Д.Александрова ограниченной сверху кривизны? Этот вопрос исследовался в [1].

В нашей работе многообразия M и $\tilde{M}$ мы считаем линейно связными, а отображение π непрерывным. Тогда метрику $\tilde{d}$ можно поднять на $\tilde{M}$, например, с помощью следующего определения.

Пусть $x, y \in \tilde{M}$. Тогда

$$\tilde{d}(x, y) = \inf_{xLy} s_d(\pi(L)), \tag{1}$$

где L – это всевозможные непрерывные пути на $\tilde{M}$, соединяющие x и y, а $s_d(\pi(L))$ - это длина пути $\pi(L)$ на M в метрике d.

В этой работе исследуется другой способ задания той же самой метрики, а именно, с помощью субметрии. Результатом является следующее предложение.

E-mail: guts@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Предложение 1. *Пусть $\pi : \tilde{M} \to M$ разветвленное накрытие гладкого риманова многообразия M компактным многообразием $\tilde{M}$. Многообразия $\tilde{M}$ и M линейно связны. Риманова метрика на M обозначается через d. Тогда на $\tilde{M}$ существует единственная внутренняя метрика ρ, такая, что отображение $\pi : (\tilde{M}, \rho) \to (M, d)$ является субметрией.* ■

В процессе доказательства мы получаем, что эта метрика совпадает с $\tilde{d}$.

Все дальнейшие результаты доказаны только для двумерных многообразий. На основании полученных в [1] результатов показана справедливость следующего предложения.

Предложение 2. *Пусть $\pi : \tilde{M} \to M$ – разветвленное накрытие гладкого двумерного риманова многообразия M двумерным многообразием $\tilde{M}$. Многообразия $\tilde{M}$ и M линейно связны. Риманова метрика на M обозначается через d. Гауссова кривизна M не превосходит χ. Тогда метрика $\tilde{d}$ на $\tilde{M}$, поднятая из метрики d на M с помощью отображения π, превращает $\tilde{M}$ в пространство кривизны $\leq \chi$ по А.Д.Александрову.* ■

Здесь $\tilde{d}$ определяется по формуле (1).

Далее исследуется следующий вопрос. Мы рассматриваем три частных случая разветвленного накрытия $\pi : \tilde{M} \to M$. В каждом из них в качестве M берется единичная сфера Римана S, реализованная как подмножество $\mathbf{E}^3$, т. е. риманово многообразие. Далее, в первом случае $\tilde{M}$ – это также сфера Римана, и она накрывает S с помощью рациональной функции. Во втором случае $\tilde{M}$ – это тор, накрывающий сферу S с помощью эллиптической функции. В третьем случае $\tilde{M}$ представляет собой сферу с g ручками, а отображение π будет построено ниже (в пункте 6). Для всех этих случаев из Предложения 1 и Предложения 2 мы получаем следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть сфера Римана $\tilde{S}$ отображается на сферу Римана S с помощью рациональной функции f. Тогда на $\tilde{S}$ существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение f является субметрией, и эта метрика превращает $\tilde{S}$ в пространство кривизны ≤ 1.* ■

Следствие 2. *Пусть тор $\tilde{T}$ отображается на сферу Римана S с помощью эллиптической функции v. Тогда на $\tilde{T}$ существует единственная внутренняя метрика, такая,, что отображение v является субметрией, и эта метрика превращает $\tilde{T}$ в пространство кривизны ≤ 1.* ■

Следствие 3. *Пусть многообразие $\tilde{N}$ – сфера с g ручками, $g > 0$, отображается на сферу Римана S с помощью отображения h (отображение h определяется в пункте 6). Тогда на $\tilde{N}$ существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение h является субметрией, и эта метрика превращает $\tilde{N}$ в пространство кривизны ≤ 1.* ■

В каждом случае мы получаем метрическое пространство $(\tilde{M}, \tilde{d}\ )$ кривизны ≤ 1. Далее, оказывается, что если отображение π задано явно, то метрику $\tilde{d}$

на $\tilde{M}$ можно вычислить. Для этого удобно воспользоваться римановой поверхностью R отображения π^{-1}, обратного к π. На римановой поверхности определена естественная метрика (см. 1.2), и отображение $\pi^{-1} : R \to \tilde{M}$ является изометрией. Таким образом, для вычисления $\tilde{d}$ достаточно построить риманову поверхность для π^{-1}. Основная часть работы как раз и посвящена этому вопросу. Результатом является алгоритм, позволяющий построить риманову поверхность для функции, обратной к произвольной рациональной или четной эллиптической.

2. Предварительные сведения

1.1. Опишем, как конкретно будут реализованы наши частные случаи разветвленного накрытия $\pi : \tilde{M} \to M$. Как уже говорилось, M представляет собой сферу Римана S, вложенную в $\mathbf{E}^3$ – трехмерное евклидово пространство. Она снабжается индуцированной римановой метрикой d. Как множество точек, S можно рассматривать в виде $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Далее, в первом случае $\tilde{M}$ также представляет собой сферу Римана, и мы также будем рассматривать $\tilde{M}$ в виде $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Таким образом, π в этом случае действует из $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. В качестве π мы берем все рациональные функции. Во втором случае $\tilde{M}$ – это тор, который мы представляем как результат факторизации $\mathbf{C}$ по действию группы, порожденной двумя сдвигами на векторы ω_1 и ω_2 ($\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C}$, $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbf{R}$). Поэтому отображение π в этом случае задано на параллелограмме, стороны которого – это векторы ω_1 и ω_2. В качестве π мы берем четные эллиптические функции с периодами ω_1 и ω_2. Реализация $\tilde{M}$ в виде сферы с g ручками для третьего случая описана в пункте 6. Для всех трех случаев χ из Предложения 1 равно единице, т. к. гауссова кривизна S равна 1.

1.2. Пусть мы находимся в рамках одного из трех частных случаев. Введем некоторые обозначения. Риманову поверхность для π^{-1} обозначим через R. Далее, многозначную функцию π^{-1} обычно считают заданной на R, но в таком случае это отображение не является обратным к π. Чтобы не произошло путаницы, мы введем обозначение $\overline{\pi}^{-1} : R \to \tilde{M}$. Под этим отображением будет пониматься то, что обычно понимается под π^{-1}. Таким образом, следующая диаграмма будет коммутативной:

$$
\begin{array}{ccc}
 & R & \\
{}^{\overline{\pi}^{-1}}\swarrow & & \downarrow^{\varphi} \\
\tilde{M} & \xrightarrow{\pi} & S
\end{array}
$$

Здесь φ – это естественная проекция римановой поверхности на сферу Римана, т. е. две точки проектируются в одну, если они имеют одно и то же положение на соответствующих сферах, из которых склеена риманова поверхность R. Отметим также существование отображения $\overline{\pi} : \tilde{M} \to R$, обратного к $\overline{\pi}^{-1}$, оно нам впоследствии понадобится.

На R существует естественная метрика, которая определяется как инфимум длин всех непрерывных кривых L, соединяющих точки, между которыми измеряется расстояние. Длина кривой L – это длина кривой $\varphi(L)$. Из этого определения, определения метрики $\tilde{d}$ по формуле (1) и коммутативности построенной выше диаграммы следует, что $\tilde{M}$ изометрично римановой поверхности R и отображения $\overline{\pi}^{-1} : R \to \tilde{M}$ или и $\overline{\pi} : \tilde{M} \to R$ являются изометриями. Таким образом, вместо метрического пространства $(\tilde{M}, \tilde{d}\ )$ можно исследовать риманову поверхность R с естественной метрикой, и если мы хотим вычислить метрику $\tilde{d}$ на $\tilde{M}$, то нужно всего лишь построить риманову поверхность для отображения π^{-1}.

3. Основные понятия и определения

Определение 1. Метрическое пространство (M, d) называется пространством с внутренней метрикой, если

$$\forall x, y \in M \quad d(x, y) = \inf_{xLy} s_d(L),$$

где L – это всевозможные непрерывные пути на M, соединяющие x и y, а $s_d(L)$ - это длина пути L в метрике d.

Определение 2. Кратчайшей метрического пространства называется кривая, длина которой равна расстоянию между ее концами.

Определение 3. Набор из трех точек $p, q, r \in M$ метрического пространства M и трех кратчайших pq, pr, qr называется треугольником в M и обозначается $\triangle pqr$.

Зафиксируем вещественное число k. Назовем k-плоскостью двумерное полное односвязное риманово многообразие кривизны k. Пусть M – пространство с внутренней метрикой. Тройке точек p, q, r из M сопоставим треугольник $\tilde{\triangle} pqr$ на k-плоскости с вершинами $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}$ и длинами сторон $|\tilde{p}\tilde{q}| = |pq|, |\tilde{p}\tilde{r}| = |pr|, |\tilde{q}\tilde{r}| = |qr|$. При $k \le 0$ такой треугольник всегда существует, а при $k > 0$ только в предположении, что периметр $\triangle pqr$ меньше $2\pi/\sqrt{k}$.

Определение 4. Пусть M – пространство с внутренней метрикой, в котором локально любые две точки соединимы кратчайшей. Тогда M называется пространством кривизны $\le k$ по А.Д.Александрову, если для любой точки $x \in M$ существует окрестность U_x, такая, что выполнено следующее:

Для любого треугольника $\triangle pqr$ с вершинами в U_x и любой точки s на стороне qr выполнено неравенство $|ps| \le |\tilde{p}\tilde{s}|$, где $\tilde{s}$ – точка на стороне $\tilde{q}\tilde{r}$ треугольника $\tilde{\triangle} pqr$, соответствующая s, т. е. такая, что $|qs| = |\tilde{q}\tilde{s}|$.

Определение 5. Пусть M, N – n-мерные многообразия, а $p : N \to M$ – непрерывное отображение. Отображение p называется разветвленным накрытием, если в M существует $(n-2)$-мерный полиэдр L, прообраз которого $p^{-1}(L)$

является $(n-2)$-мерным полиэдром, причем ограничение p на $N\backslash\pi^{-1}(L)$ является накрытием. Порядок этого накрытия есть также по определению и порядок разветвленного накрытия p. Полиэдр L называется множеством ветвления p. В случае двумерных многообразий L представляет собой конечное число точек, а $\pi^{-1}(L)$ дискретное множество. Тогда точки множества L называются точками ветвления разветвленного накрытия p.

Определение 6. Отображение p метрических пространств, такое, что $p : (N, \rho_N) \to (M, \rho_M)$, называется субметрией, если

$$\forall x \in M \quad \forall r \geq 0 \quad p(B_r[x]) = B_r[p(x)],$$

где $B_r[x]$ и $B_r[p(x)]$ – замкнутые шары радиусов r с центрами в точках x и $p(x)$ соответственно.

Определение 7. n-мерный орбифолд Q – это отделимое паракомпактное пространство Q_0, снабженное покрытием открытыми множествами $\{U_i\}$, замкнутым относительно взятия конечных пересечений. Каждому множеству U_i сопоставляется некоторая конечная группа G_i, некоторое действие группы G_i на открытом подмножестве $\tilde{U}_i$ в $\mathbf{R}^n$ и гомеоморфизм $\varphi_i : \tilde{U}_i/G_i \to U_i$. Если $U_i \subset U_j$, то должны существовать включение $f_{ij} : G_i \to G_j$ и эквивариантное по отношению к f_{ij} вложение $\tilde{\varphi}_{ij} : \tilde{U}_i \to \tilde{U}_j$, такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{U}_i & \to \tilde{U}_i/G_i & & \xrightarrow{\varphi_i} & U_i \\
{\scriptstyle \tilde{\varphi}_{ij}}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{ij}} & & & \downarrow{\scriptstyle id} \\
\tilde{U}_j \to & \tilde{U}_j/f_{ij}G_i & \to \tilde{U}_j/G_j & \xrightarrow{\varphi_j} & U_j
\end{array}$$

Пространство Q_0 называется подстилающим пространством.

Обозначим через ψ_i отображение $\tilde{U}_i \to U_i$, представляющее собой композицию отображений факторизации $\tilde{U}_i \to \tilde{U}_i/G_i$ и гомеоморфизма $\varphi_i : \tilde{U}_i/G_i \to U_i$. На дизьюнктном объединении $\coprod \tilde{U}_i$ определим отображение $\psi = \coprod \psi_i : \coprod \tilde{U}_i \to Q_0$. Рассмотрим псевдогруппу всевозможных локальных гомеоморфизмов $\coprod \tilde{U}_i$, эквивариантных относительно ψ.

Определение 8. Говорят, что на орбифолде Q задана метрика, если метрика задана на каждом $\tilde{U}_i$, и каждый элемент псевдогруппы является изометрией. Говорят, что орбифолд с этой метрикой имеет кривизну $\leq \chi$, если каждое множество $\tilde{U}_i$ является пространством, удовлетворяющим Определению 4 при $k = \chi$, но не для некоторой окрестности U_x, а глобально.

4. Римановы поверхности рациональных функций

Пусть $\tilde{S}$ и S – две сферы Римана, а $f : \tilde{S} \to S$ – рациональная функция, отображающая $\tilde{S}$ в S.

Общий вид рациональной функции:

$$f(z) = \frac{a_1 z^n + \cdots + a_n z + a_{n+1}}{b_1 z^m + \cdots + b_m z + b_{m+1}} = \frac{a(z)}{b(z)},$$

$$a_i, b_j \in \mathbf{C},\ a_1 \neq 0, b_1 \neq 0.$$

Можно считать, что числитель и знаменатель $f(z)$ не имеют одинаковых корней.

Отображение f представляет собой разветвленное накрытие, и, как уже говорилось выше, нам нужно узнать строение римановой поверхности многозначной функции $f^{-1}(z)$.

Пусть R – это и есть та самая риманова поверхность. Построение ее проводится следующим образом. Берется несколько сфер Римана, а именно, столько, каков порядок разветвленного накрытия f. Далее все эти сферы Римана определенным образом склеиваются (см. ниже). В результате мы получаем поверхность, у которой некоторое конечное число точек имеет следующую особенность. Во-первых, в каждой такой точке склеивается несколько сфер Римана, а во-вторых, всякая ее достаточно малая окрестность получается при склеивании нескольких окрестностей с этих сфер, причем каждая из них является окрестностью прообраза этой точки при отображении склейки. Такие особые точки называются точками ветвления римановой поверхности. Порядком точки ветвления называется число сфер Римана, которые в ней склеиваются. Эти точки ветвления поверхности R следует отличать от точек ветвления разветвленного накрытия f (см. Определение 5), хотя они и имеют к ним определенное отношение:

Пусть $r \in R$ – точка ветвления R. Тогда образ $s = \varphi(r)$ при отображении точки r с помощью φ будет точкой ветвления f, где $\varphi : R \to S$ – это естественная проекция (см. 1.2). Также верно, что для любой $s \in S$ – точки ветвления f, существует $r \in R$ – точка ветвления R (не обязательно единственная), такая, что $\varphi(r) = s$. Кроме того, если $s \in S$ – произвольная точка ветвления и U – ее достаточно малая окрестность, то можно установить взаимно однозначное соответствие между точками ветвления R, принадлежащими прообразу $\varphi^{-1}(s)$, и теми компонентами связности $\tilde{U}_j$ множества $f^{-1}(U)$, для которых выполняется следующее условие:

Отображение $f\ |_{\tilde{U}_j \backslash \{x\}}$: $\tilde{U}_j \backslash \{x\} \to U \backslash \{s\}$, где точка x – это единственная точка из прообраза $f^{-1}(s)$, лежащая в $\tilde{U}_j$, является обычным (неразветвленным) накрытием порядка $p_j > 1$. При этом компонента $\tilde{U}_j$ с порядком накрытия p_j соответствует точке ветвления на R, также имеющей порядок p_j.

Во всех этих рассуждениях не использовалось особого вида многообразия S или разветвленного накрытия f, поэтому они также годятся и для общего случая.

Через l обозначим $\max\{n, m\}$. Утверждается, что R склеена в точности из l сфер Римана. Для этого достаточно показать, что уравнение $f(z) = \omega$, разрешенное относительно z, имеет ровно l различных корней (здесь $\omega \in S$ - не точка ветвления f). Это действительно так, потому что уравнение $f(z) = \omega$, домноженное на знаменатель $b(z)$ рациональной функции f, представляет собой многочлен степени l относительно z.

Наша задача – понять строение римановой поверхности R.

4.1. Нахождение точек ветвления и определение их порядка

Рассмотрим случай точки ветвления f, имеющей конечный прообраз. Эта точка может быть и бесконечностью. Берем производную функции $f(z)$:

$$f'(z) = \frac{a'(z)b(z) - a(z)b'(z)}{b^2(z)}.$$

Не сокращая получившейся дроби, приравниваем к нулю числитель. Пусть $z_1, \ldots, z_q$ - это его корни с кратностями $p_1, \ldots, p_q$ соответственно ($z_i \neq z_j, i \neq j$). Тогда точка $s = f(z_i)$ будет точкой ветвления разветвленного накрытия f, и ее прообраз $\varphi^{-1}(s) \in R$ будет содержать точку ветвления $r \in R$ порядка $p_i + 1$, причем будет выполнено $\overline{f}(z_i) = r$ (про $\overline{f}$ см. 1.2).

Чтобы разобраться с точкой, имеющей прообразом бесконечность, нужно сделать замену $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Функция $g(z)$ также является рациональной. Приравняем к нулю числитель $g'(z)$. Мы получаем какое-то уравнение, и пусть у этого уравнения есть корень 0 кратности p. Тогда точка $g(0)$ будет точкой ветвления разветвленного накрытия f, и в прообразе $\varphi^{-1}(g(0))$ будет точка ветвления римановой поверхности R порядка $p + 1$.

Пусть у нас имеется k точек $z_1, \ldots, z_k$, таких, что $f'(z_i) = 0,\ i = 1, \ldots, k$. Тогда точки $f(z_1), \ldots, f(z_k)$, как уже было сказано, будут точками ветвления для разветвленного накрытия f, а точки $\overline{f}(z_1), \ldots, \overline{f}(z_k)$ будут точками ветвления на R, причем все они будут различны, в отличие от $f(z_1), \ldots, f(z_k)$, которые могут и совпадать. Следовательно, на R у нас есть k точек ветвления, и пусть $p_1, \ldots, p_k$ - их порядки. Можно показать, что выполняется соотношение

$$p_1 + \ldots + p_k - k = 2l - 2.$$

Эта формула представляет собой частный случай формулы Римана-Гурвица для разветвленных накрытий, и она может быть получена из следующей формулы Гаусса-Бонне:

$$\int\limits_{\tilde{S}\setminus\{z_1,\ldots,z_k\}} K\ ds + \sum_{i=1}^{k}(2\pi - 2\pi p_i) = 2\pi\chi(\tilde{S}).$$

Здесь K – кривизна $\tilde{S}$ во всех точках, кроме $\{z_1, \ldots, z_k\}$, и она равна 1, т. к. метрика у нас перенесена с единичной сферы S с помощью локально изометричного отображения. Поэтому $\int\limits_{\tilde{S}\setminus\{z_1,\ldots,z_k\}} K\ ds =$ площади $\tilde{S} =$ площади $R = 4\pi l$, т. к. риманова поверхность R склеена из l сфер Римана. Через $\chi(\tilde{S})$ обозначена эйлерова характеристика сферы $\tilde{S}$, т. е. $\chi(\tilde{S}) = 2$. Эта формула может использоваться и в более общем случае, достаточно заменить $\tilde{S}$ на $\tilde{M}$ и S на M.

4.2. Построение римановой поверхности

Для построения римановой поверхности нужно взять l сфер Римана. Далее на этих сферах нужно разместить точки ветвления и провести между ними разрезы. По этим разрезам сферы Римана следует склеить между собой. Утверждается, что все это можно сделать с помощью следующей процедуры. Берется одна сфера Римана, и на ней отмечаются точки, имеющие те же координаты, что и $f(z_i),\ i = 1, \ldots, k$. Далее эти точки определенным образом разбиваются на $(l-1)$ пару, причем одна и та же точка может попасть в разные пары, и не исключен случай, когда пару составляет дважды взятая одна и та же точка. Зафиксируем одну пару. Между точками этой пары опять же определенным образом проводится разрез. Затем мы берем еще одну сферу Римана, отмечаем на ней точки, имеющие те же координаты, что и точки данной пары, и проводим между ними точно такой же разрез. Эти два разреза склеиваем между собой, причем каждый край разреза склеивается с ему противоположным. Далее та же процедура проводится для второй пары и т. д. Таким образом, нам остается научиться разбивать точки на пары и проводить разрезы.

Опишем процедуру составления пар. Пусть $\omega \in S$ – произвольная точка - не точка ветвления f. Решаем уравнение $f(\zeta) = \omega$. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_l \in \tilde{S}$ – его корни. Пусть $c_i,\ i = 1, \ldots, k$ – это путь на $\tilde{S}$, который представляет собой петлю, начинающуюся и заканчивающуюся в точке ζ_1. Кроме того, эта петля должна из всех точек $z_1, \ldots, z_k$ на $\tilde{S}$ обойти только вокруг точки z_i, причем один раз. Пусть также $d_j,\ j = 1, \ldots, l$ – это путь на $\tilde{S}$, соединяющий точку ζ_1 с точкой ζ_j. Зафиксируем j. Рассмотрим некоторое множество путей. Во-первых, в это множество включаем d_j, а кроме него, также пути, которые получаются следующим образом. Сначала проводится петля c_{i_1}, затем $c_{i_2}, c_{i_3}, ..., c_{i_q}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq k,\ q = 1, \ldots, k$. В конце проводится путь d_j. Образ каждого пути из этого множества при отображении f представляет собой петлю на S, начинающуюся и заканчивающуюся в точке ω. Все эти петли обходят одну или несколько точек $f(z_i),\ i = 1, \ldots, k$. Но только два из них обходят по одной точке. Пусть это будут точки $f(z_{i_1})$ и $f(z_{i_2})$. Тогда мы объединяем их в одну пару, и между ними будет проводиться разрез. Затем мы фиксируем другое j и т. д.

Пусть точки $f(z_{i_1})$ и $f(z_{i_2})$ попали в одну пару. Теперь надо провести разрез, соединяющий эти точки. Пусть $g_i,\ i = 1, \ldots, k$ – это путь на $\tilde{S}$, соединяющий точку ζ_1 с точкой z_i. Будем также считать, что ζ_1 и z_i – начало и конец g_i, не принадлежат g_i, и g_i не содержит также никакой другой точки $z_j,\ j \neq i$. Разрез между $f(z_{i_1})$ и $f(z_{i_2})$ представляет собой путь, соединяющий эти точки и, кроме того, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Считаем, что начальная и конечная точки такого пути – $f(z_{i_1})$ и $f(z_{i_2})$, ему не принадлежат.

2. Этот путь не пересекает ни один из путей $f(g_i),\ i = 1, \ldots, k,\ i \neq i_1, i \neq i_2$, нечетное число раз.

3. Этот путь не пересекает ни один из уже проведенных разрезов.

Нужно учесть, что «касание» двух путей не следует считать пересечением.

В случае гладких путей «касание» означает, что один путь лежит локально по одну сторону от касательной к другому пути в точке, общей для них. Мы можем ограничиться только гладкими путями. Оказывается, что всегда существуют разрезы, удовлетворяющие поставленным условиям.

Далее мы берем сферу Римана, отмечаем на ней все точки $f(z_1), \ldots, f(z_k)$, соединяем их соответствующими разрезами и, как описано выше, к каждому разрезу подклеиваем свою сферу Римана.

В результате мы получим риманову поверхность для многозначной функции $f^{-1}(z)$.

Для вычисления метрики $\tilde{d}$ на $\tilde{S}$ гораздо удобнее, если разрезы проведены по дугам больших окружностей. Но в результате нашего построения римановой поверхности разрезы могут оказаться самого произвольного вида, и, если мы хотим вычислять метрику, эти разрезы надо «выпрямить». Опишем этот процесс. Предположим, что на какой-то сфере у нас есть две точки и соединяющий их разрез. Проведем дугу большой окружности, соединяющую эти точки, и рассмотрим преобразование, представляющее собой гомотопию с закрепленными концами нашего разреза в эту дугу. Так как при склеивании римановой поверхности у нас есть две сферы с одинаковыми точками ветвления и тем же разрезом, преобразования на одной из сфер нужно проводить одновременно с преобразованиями на другой сфере. При гомотопии на любой из сфер наш разрез может «заметать» какие-то точки ветвления или части каких-то других разрезов. В этом случае «заметенная» часть переносится в те же самые точки, но на другую сферу, а именно на ту, на которой в данной момент также производится гомотопия. То есть наши две сферы как бы обмениваются «заметенными» кусками. В результате мы получаем разрез в виде дуги большой окружности. Затем те же самые действия могут быть применены к другому разрезу, но может так оказаться, что этот разрез будет начинаться на одной сфере, а продолжаться на другой. В таком случае нужно будет вести гомотопию сразу обоих частей разреза, причем каждого куска на двух сферах, т. е. одновременно придется рассматривать четыре сферы. Возможно также, что разрез будет проходить больше чем по двум сферам, и в таком случае их число еще увеличивается. Но в результате этих операций мы получим, что все наши разрезы будут дугами больших окружностей, и мы сможем вычислить метрику $\tilde{d}$.

Приведем пример вычисления метрики.

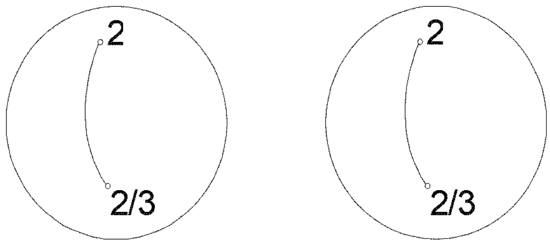
Пример 1. В этом примере вычисляется метрика на сфере $\tilde{S}$, перенесенная со сферы S с помощью рациональной функции

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z^2+z+1}.$$

Отображение f представляет собой двулистное разветвленное накрытие. Найдем точки, в которых производная $f'(z)$ зануляется. Для этого решаем уравнение:

$$(z^2+1)'(z^2+z+1)-(z^2+1)(z^2+z+1)'=0.$$

Проведя элементарные преобразования, мы получим, что корнями будут точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$. Следовательно, точки ветвления отображения f – это точки $f(-1) = 2$ и $f(1) = 2/3$ на сфере S. Поэтому риманова поверхность R многозначной функции $f^{-1}(z)$ представляет собой две сферы, склеенные по разрезу, соединяющему точки 2 и 2/3 (см. рисунок).



Разрезы проведены по кратчайшей, соединяющей точки ветвления.

Вычисляя метрику на R, мы тем самым вычисляем ее и на $\tilde{S}$, т. к. эти пространства можно отождествить с помощью изометрии $\overline{f} : \tilde{S} \to R$ (см. 1.2). Пусть нужно определить расстояние между точками $x_1, x_2 \in R$. Возможны два случая:

1. Точки x_1 и x_2 лежат на какой-то одной сфере. Мы считаем, что эта сфера пока еще не разрезана для склейки, хотя путь, по которому будет делаться разрез, уже проведен. Проведем также путь, соединяющий x_1 и x_2 и представляющий собой кратчайшую данной сферы. Предположим, что этот путь не имеет общей точки с внутренностью пути-разреза. Тогда расстояние между точками x_1 и x_2 будет равно длине этого пути. В противном случае мы от каждой из этих точек проводим по две кратчайших до концов разреза. В результате мы получим две ломаных, соединяющих точки x_1 и x_2. Выберем ту из них, которая будет не длиннее другой. Ее длина как раз и будет равна расстоянию от точки x_1 до x_2.

2. Точки x_1 и x_2 принадлежат разным сферам. В этом случае отметим на сфере, на которой лежит x_1, точку $\tilde{x}_2$, имеющую то же самое положение, что и точка x_2 на другой сфере. Так же, как и первом случае, проведем кратчайшую, соединяющую точки x_1 и $\tilde{x}_2$. Но сейчас, если эта кратчайшая имеет общую точку с путем-разрезом, то ее длина и будет равняться расстоянию между x_1 и x_2. В противном случае, как и прежде, проводим по две кратчайших от каждой из точек x_1 и $\tilde{x}_2$ до концов разреза. Мы опять получаем две ломаных, соединяющих x_1 с $\tilde{x}_2$. Длина той из них, которая будет не длиннее другой, и равна расстоянию между точками x_1 и x_2.

Если какая-нибудь из точек x_1 и x_2 лежит непосредственно на разрезе, то можно считать, что она принадлежит любой из сфер.

Таким образом, мы вычислили метрику на римановой поверхности R, а, следовательно, и на $\tilde{S}$.

Далее мы будем рассматривать римановы поверхности для четных эллиптических функций.

5. Римановы поверхности четных эллиптических функций

Определение 9. Мероморфная функция $v(u), u \in \mathbf{C}$ называется эллиптической, если она имеет периоды ω_1 и ω_2, отношение которых ω_1/ω_2 не является действительным числом.

Из определения видно, что эллиптическую функцию можно считать заданной на торе.

В дальнейших рассуждениях предполагаем периоды ω_1 и ω_2 фиксированными.

В теории эллиптических функций существует своего рода основная эллиптическая функция – функция Вейерштрасса $\wp(u)$, определяемая рядом

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum \left(\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

где суммирование ведется по всем $\omega \neq 0$ вида $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, m_1 и m_2 - произвольные целые числа (не равные одновременно нулю).

Известна следующая теорема (см. [3, с. 192]):

Любую эллиптическую функцию $v(u)$ с периодами ω_1 и ω_2 можно представить в виде:

$$v(u) = P(\wp(u)) + \wp'(u)P_1(\wp(u)),$$

где $P(z)$ и $P_1(z)$ – некоторые рациональные функции, а функция $\wp(u)$ построена по периодам ω_1 и ω_2.

В этой работе мы будем рассматривать построение римановых поверхностей только для четных эллиптических функций. Они могут быть представлены в виде $v(u) = P(\wp(u))$, где $P(z)$ – рациональная функция.

Риманова поверхность для функции $\wp^{-1}(u)$ имеет четыре точки ветвления, причем каждая второго порядка. Одна точка всегда ∞, а остальные три обозначаются e_1, e_2, e_3 и определяются периодами ω_1 и ω_2. При изменении ω_1, ω_2 мы будем получать различные точки e_1, e_2, e_3, но всегда будет выполнено условие $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Риманова поверхность состоит из двух сфер, на каждой из которых проведены по три разреза, каждый от точки e_i, $i = 1, 2, 3$ до ∞. Сферы склеиваются по этим разрезам.

Опишем, как строить риманову поверхность для функции $(P(\wp(u)))^{-1}$, если известна риманова поверхность для рациональной $P(z)$. Нужно взять сферу Римана, на которой проведены разрезы от точек e_i, $i = 1, 2, 3$ до точки ∞. Затем применим отображение $\overline{P}$ (про $\overline{P}$ см. 1.2), переводящее эту сферу в риманову поверхность многозначной функции $P^{-1}(z)$. Разрезы на сфере при этом перейдут в какие-то разрезы на римановой поверхности. Возьмем второй экземпляр этой римановой поверхности с такими же разрезами и склеим его по этим разрезам с первым экземпляром. Понятно, что склеивать между собой следует одинаковые разрезы. В результате мы получим риманову поверхность для $(P(\wp(u)))^{-1}$.

Рассмотрим пример, связанный с переносом метрики с помощью функции Вейерштрасса.

Пример 2. Мы посмотрим, какой диаметр может иметь тор, снабженный метрикой, перенесенной со сферы S с помощью функции Вейерштрасса $\wp(u)$. При вариации $\wp(u)$, обусловленной тем, что мы можем брать функции Вейерштрасса с различными периодами ω_1 и ω_2, мы найдем inf и sup всех возможных диаметров.

Будем представлять себе нашу метрику заданной на римановой поверхности многозначной функции $\wp^{-1}(u)$. Очевидно, что диаметр всякой поверхности, склеенной из двух сфер, не может превышать 2π и быть меньше π. Как раз эти числа и являются искомыми sup и inf соответственно.

sup получается, когда мы устремляем точки e_1, e_2, e_3 к точке ∞. Условие $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ нам не мешает. Расстояние от точки 0 на одной сфере до точки 0 на другой сфере стремится к 2π.

inf получается, когда мы устремляем точки e_1, e_2, e_3 к точке 0. Расстояние между двумя точками, расположенными на одной сфере, очевидно, не превосходит π. В случае, если точки расположены на разных сферах, между ними можно провести путь либо через ∞, если его длина меньше π, либо через одну из точек e_i. Так как $e_i \to 0$, мы получаем, что длина такого пути будет $\leq \pi$.

Теперь опишем эквивалентные способы переноса метрики с M на $\tilde{M}$.

6. Перенос метрики

Кроме способа переноса метрики с M на $\tilde{M}$, описанного во введении, можно использовать и следующие два способа. Первый годится для общего случая, а второй только для частных случаев из Следствий 1 и 2, когда отображение π дифференцируемо:

1. Пусть ρ - это метрика на M. Определим на $\tilde{M}$ сначала полуметрику ρ_1:

$$\rho_1(x, y) = \rho(\pi(x), \pi(y)).$$

Затем уже определяем метрику ρ':

$$\rho'(x, y) = \inf_{xLy} s_{\rho_1}(L),$$

где L - это всевозможные непрерывные пути на $\tilde{M}$, соединяющие x и y, а $s_{\rho_1}(L)$ - это длина пути L в полуметрике ρ_1.

2. Так как π сейчас – дифференцируемое отображение, то ρ' можно задать так:

$$\rho'(x, y) = \inf_{xLy} \int\limits_0^1 |T\pi(\dot{L}(t))| dt,$$

где L - это всевозможные кусочно гладкие пути на $\tilde{M}$, определенные на $[0,1]$ и соединяющие точки x и y.

Легко можно показать, что каждый из способов дает одну и ту же метрику, которая совпадает с метрикой $\tilde{d}$, определенной по формуле (1).

7. Еще один частный случай

Опишем еще один частный случай разветвленного накрытия, при котором можно вычислять перенесенную метрику.

Пусть многообразие $\tilde{N}$ – это сфера с g ручками, $g > 0$. Предполагаем, что $\tilde{N}$ вложено в $\mathbf{R}^3$. Вложение осуществляется так, чтобы ось OZ протыкала это многообразие «вдоль» и имела с ним $2g+2$ общие точки. В каждом случае ось OZ должна быть осью симметрии для многообразия $\tilde{N}$.

Далее, пусть h – это отображение, которое отождествляет точки $\tilde{N}$, симметричные относительно оси OZ. Очевидно, что в результате этого отождествления мы получаем сферу. Обозначим ее через S. Видно также, что отображение h является разветвленным накрытием, причем точки ветвления h – это точки сферы S, общие с осью OZ. Это те самые $2g+2$ точки, по которым OZ пересекается с $\tilde{N}$. Все они имеют второй порядок ветвления.

Описанная конструкция является построением на топологическом уровне. Если же мы хотим, чтобы сфера S была снабжена метрикой, эту же самую ситуацию можно представить следующим образом. Сфера S рассматривается как единичная сфера, стандартно вложенная в $\mathbf{E}^3$, т. е. с центром в 0. Она является римановым многообразием. Многообразие $\tilde{N}$, сферу с g ручками, мы строим по следующему алгоритму. Сначала берем единичную сферу и отмечаем на ней $2g+2$ различные точки. Затем разбиваем эти точки на пары и обе точки каждой пары соединяем между собой разрезами. Разрезы не должны пересекаться друг с другом. Далее берем второй экземпляр сферы с такими же разрезами и по этим разрезам подклеиваем одну сферу к другой. В результате мы получаем пространство, гомеоморфное сфере с g ручками. Это и будет $\tilde{N}$. Если мы хотим, чтобы будущая метрика на $\tilde{N}$ хорошо вычислялась, надо так выбирать точки и составлять пары, чтобы в качестве разрезов можно было брать дуги больших окружностей. В общем случае это может не получиться, так как такие разрезы будут пересекаться. Отображение $h : \tilde{N} \to S$ представляем в виде проекции двух наших сфер на сферу S, т. е. ограничение h на каждую из сфер – это тождественное отображение.

Вся эта конструкция представляет собой частный случай Предложения 2, и мы можем переносить метрику со сферы S на сферу с g ручками $\tilde{N}$, получая при этом пространство кривизны ≤ 1 по А.Д.Александрову. Если при построении $\tilde{N}$ проводить «хорошие» разрезы, т. е. разрезы по дугам больших окружностей, то эту метрику можно эффективно вычислять.

8. Доказательство Предложения 1

Пусть $\pi : \tilde{M} \to M$ – разветвленное накрытие гладкого риманова многообразия M компактным многообразием $\tilde{M}$. Многообразия $\tilde{M}$ и M предполагаются линейно связными. Риманова метрика на M обозначается через d.

Сначала докажем две леммы.

Лемма 1. *На компактном топологическом пространстве X нельзя задать метрику $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$, которая индуцировала бы топологию слабее, чем исходная.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть такая метрика ρ существует. Тогда на X найдется такая точка x и ее открытая окрестность U в исходной топологии, что никакой открытый шар $B_r(x)$ с центром в точке x радиуса $r > 0$, взятый в метрике ρ, не содержится целиком в этой окрестности U. Пусть $B_{1/n}(x)$ – открытый шар радиуса $1/n$ с центром в точке x и пусть x_n – это точка из $B_{1/n}(x)$, такая, что $x_n \notin U$. Так как X – компактное пространство, то у последовательности $\{x_n\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим ее предел через x_0. Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Метрика ρ непрерывна на $X \times X$, поэтому $\rho(x_0, x) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, x) = 0$. Но $x_0 \neq x$, так как $x_0 \notin U$. Противоречие. ■

Лемма 2. *Пусть на $\tilde{M}$ задана метрика ρ, превращающая отображение π в субметрию. Тогда для любой точки $x \in \tilde{M}$, такой, что $\pi(x)$ не принадлежит множеству ветвления π, существует окрестность U в исходной топологии, такая, что отображение $U \xrightarrow{\pi} \pi(U)$ является изометрией.*

Доказательство. Сначала покажем, что топология, индуцированная метрикой ρ, совпадает с исходной топологией многообразия $\tilde{M}$. Пусть $B_r[x], r > 0$ – шаровая окрестность точки x в топологии метрики ρ. Тогда $\pi(B_r[x]) = B_r[\pi(x)]$, так как π – субметрия. Если в M взять достаточно малую окрестность U' точки $y = \pi(x)$, то каждая компонента связности из прообраза $\pi^{-1}(U')$ будет взаимно однозначно соответствовать содержащейся в ней единственной точке из прообраза $\pi^{-1}(y)$. Возьмем именно такую окрестность U' и, кроме того, потребуем, чтобы $U' \subset B_r[\pi(x)]$. Тогда компонента связности из прообраза $\pi^{-1}(U')$, содержащая точку x, будет окрестностью в исходной топологии $\tilde{M}$ и будет содержаться в $B_r[x]$. Мы показали, что топология метрики ρ не сильнее исходной. Применяя Лемму 1, мы получим, что она совпадает с ней.

Пусть точка $x \in \tilde{M}$ такая, что $\pi(x)$ не принадлежит множеству ветвления отображения π. Пусть $\tilde{U}$ – такая окрестность точки x, что $\tilde{U} \xrightarrow{\pi} \pi(\tilde{U})$ – гомеоморфизм. Пусть также $B_r[x]$ – это шар радиуса r в точке x, такой, что $B_r[x] \subset \tilde{U}$. Тогда окрестность $U = B_{r/3}[x]$ будет искомой окрестностью, т. е. отображение $U \xrightarrow{\pi} \pi(U)$ будет изометрией. Это действительно так. Предположим, что $x_1, x_2 \in U$ и $\rho(x_1, x_2) = s$. Возьмем шар $B_s[x_1]$ радиуса s с центром в точке x_1. Ясно, что $B_s[x_1] \subset B_r[x]$. Точка x_2 принадлежит границе этого шара. Так как π субметрия, $\pi(B_s[x_1]) = B_s[\pi(x_1)]$, а так как ограничение π на

$B_s[x_1]$ еще и гомеоморфизм, $\pi(x_2)$ принадлежит границе шара $B_s[\pi(x_1)]$, т. е. $d(\pi(x_1), \pi(x_2)) = s$, что и требовалось доказать. ■

Теперь докажем предложение.

Предложение 1. *Пусть $\pi : \tilde{M} \to M$ – разветвленное накрытие гладкого риманова многообразия M компактным многообразием $\tilde{M}$. Многообразия $\tilde{M}$ и M линейно связны. Риманова метрика на M обозначается через d. Тогда на $\tilde{M}$ существует единственная внутренняя метрика ρ, такая, что отображение $\pi : (\tilde{M}, \rho) \to (M, d)$ является субметрией.*

Доказательство. Сначала докажем существование. Для этого явно построим метрику $\tilde{d}$ и покажем, что отображение $\pi : (\tilde{M}, \tilde{d}\ ) \to (M, d)$ превращается при этом в субметрию. После этого докажем, что метрика $\tilde{d}$ – внутренняя. Метрика $\tilde{d}$ определяется следующим образом.

Пусть $x, y \in \tilde{M}$. Тогда

$$\tilde{d}(x, y) = \inf_{xLy} s_d(\pi(L)),$$

где L – это всевозможные непрерывные пути на $\tilde{M}$, соединяющие x и y, а $s_d(\pi(L))$ – это длина пути $\pi(L)$ на M в метрике d.

Пусть $B_r[x]$ – шар радиуса r с центром в точке x. Покажем, что $\pi(B_r[x]) \subset B_r[\pi(x)]$. Пусть $y \in B_r[x]$. Тогда существует последовательность кривых $c'_1, \ldots, c'_n, \ldots$, соединяющих точки x и y, такая, что $\tilde{d}(x, y) = \inf_i s_d(\pi(c'_i)) \le r$. Но поскольку метрика d на M внутренняя, а каждая из кривых $\pi(c'_i)$ представляет собой непрерывную кривую, соединяющую точки $\pi(x)$ и $\pi(y)$, мы получаем, что $d(\pi(x), \pi(y)) \le \inf_i s_d(\pi(c'_i)) \le r$, т. е. $\pi(y) \in B_r[\pi(x)]$, что и требовалось доказать.

Покажем, что $B_r[\pi(x)] \subset \pi(B_r[x])$. Пусть $z' \in B_r[\pi(x)]$. Тогда существует последовательность кривых $c_1, \ldots, c_n, \ldots$, соединяющих точки $\pi(x)$ и z', такая, что $d(\pi(x), z') = \inf_i s_d(c_i) \le r$. Без ограничения общности можно считать, что поднятие $\tilde{c}_i$ каждой кривой c_i, начинающееся в точке x, оканчивается в одной и той же точке. Обозначим эту точку через z. Понятно, что $\pi(z) = z'$. Для $\tilde{d}(x, z)$ в соответствии с определением имеем неравенство $\tilde{d}(x, z) \le \inf_i s_d(\pi(\tilde{c}_i)) \le r$, т. е. $z \in B_r[x]$, что и требовалось доказать.

Покажем, что метрика $\tilde{d}$ внутренняя. Так как отображение π представляет собой субметрию, то применяя Лемму 2, мы получаем, что $\pi : (\tilde{M}, \tilde{d}\ ) \to (M, d)$ будет локальной изометрией, если с $\tilde{M}$ выбросить дискретное множество точек и с M их образы. Отсюда, в силу определения длины кривой, напрямую следует, что длина любой кривой L на $\tilde{M}$ в метрике $\tilde{d}$ совпадает с длиной кривой $\pi(L)$ на M в метрике d. Поэтому из определения $\tilde{d}$ мы получаем, что

$$\tilde{d}(x, y) = \inf_{xLy} s_{\tilde{d}}(L),$$

где L – это всевозможные непрерывные пути на $\tilde{M}$, соединяющие x и y, а $s_{\tilde{d}}(L)$ – это длина пути L на $\tilde{M}$ в метрике $\tilde{d}$. Это в точности и означает, что метрика $\tilde{d}$ – внутренняя.

Пусть теперь на $\tilde{M}$ существует внутренняя метрика ρ, превращающая отображение $\pi : (\tilde{M}, \rho) \to (M, d)$ в субметрию. Покажем, что она совпадает с $\tilde{d}$. Тем самым мы докажем единственность ρ. Пусть $x, y \in \tilde{M}$. Так как ρ – внутренняя метрика, $\rho(x, y) = \inf\limits_{xLy} s_\rho(L)$, где L – это всевозможные непрерывные пути на $\tilde{M}$, соединяющие x и y. Но так как $\pi : (\tilde{M}, \rho) \to (M, d)$ субметрия, применяя Лемму 2, мы получаем, что $s_\rho(L) = s_d(\pi(L))$, и, следовательно, $\rho(x, y) = \inf\limits_{xLy} s_d(\pi(L))$, что и требовалось доказать.

Предложение доказано. ■

9. Доказательство Предложения 2

В этом пункте мы рассматриваем только двумерные многообразия. Метрика $\tilde{d}$, поднимаемая из метрики d на M с помощью отображения π, определяется по формуле (1) из введения.

Предложение 2. *Пусть $\pi : \tilde{M} \to M$ разветвленное накрытие гладкого двумерного риманова многообразия M двумерным многообразием $\tilde{M}$. Многообразия $\tilde{M}$ и M линейно связны. Риманова метрика на M обозначается через d. Гауссова кривизна M не превосходит χ. Тогда метрика $\tilde{d}$ на $\tilde{M}$, поднятая из метрики d на M с помощью отображения π, превращает $\tilde{M}$ в пространство кривизны $\leq \chi$ по А.Д.Александрову.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ – открытое покрытие M, замкнутое относительно конечного числа пересечений. Обозначим через $\{\tilde{U}_{ij}\}$, $1 \leq j \leq n_i$ компоненты связности прообраза $\pi^{-1}(U_i)$. Если U_i не содержит точек ветвления и при этом достаточно мала, что можно было обеспечить при выборе покрытия, то n_i равно порядку разветвленного накрытия π, и для каждой компоненты $\{\tilde{U}_{ij}\}$ отображение $\pi \mid_{\tilde{U}_{ij}}: \tilde{U}_{ij} \to U_i$ является гомеоморфизмом. Можно также рассматривать все эти отображения как накрытия порядка $k_j = 1$.

Пусть теперь U_i содержит точку ветвления y. Будем считать U_i достаточно малой окрестностью, а именно, настолько малой, чтобы U_i не содержало других точек ветвления, отличных от y, и чтобы каждая компонента $\tilde{U}_{ij}$, $1 \leq j \leq n_i$ содержала только одну точку x_j из прообраза $\{x_1, \ldots, x_{n_i}\} = \pi^{-1}(y)$. Если это условие выполнено, то каждое из отображений

$$\pi \mid_{\tilde{U}_{ij} \setminus \{x_j\}}: \tilde{U}_{ij} \setminus \{x_j\} \to U_i \setminus \{y\},\ 1 \leq j \leq n_i,$$

является накрытием некоторого порядка k_j (возможно что $k_j = 1$).

Теперь опять рассмотрим все U_i. Для каждого U_i из покрытия $\{U_i\}$ многообразия M выберем только одну компоненту связности $\tilde{U}_{ij}$. Зафиксируем этот выбор. Тогда этот выбор определит некоторый орбифолд O следующим образом. M будет подстилающим пространством этого орбифолда, $\{U_i\}$ – требуемым покрытием M (см. Определение 7), а в качестве $\tilde{U}_i$ для каждого множества U_i берем выбранную компоненту $\tilde{U}_{ij}$ (если U_i достаточно малая окрестность, то $\tilde{U}_{ij}$ гомеоморфна $\mathbf{R}^2$). U_i ставится в соответствие группа $\mathbf{Z}_{k_j}$ – циклическая группа порядка k_j. Эта группа действует на $\tilde{U}_i = \mathbf{R}^2$ как группа поворотов вокруг начала координат на углы, кратные π/k_j.

На каждом из этих орбифолдов задана метрика, так как метрики на каждом из множеств $\tilde{U}_{ij}$, индуцированные метрикой на $\tilde{M}$, удовлетворяют Определению 8 (см. пункт 2). Таким образом, можно говорить о кривизне орбифолдов.

Утверждение о том, что $\tilde{M}$ является пространством А.Д.Александрова кривизны $\le \chi$, эквивалентно утверждению о том, что все наши орбифолды имеют кривизну $\le \chi$. Покажем, что это требование выполняется. Применим теорему 5.3 из [1], утверждающую следующее:

Пусть Q – это орбифолд с метрикой, индуцированной гладкой римановой метрикой его подстилающего пространства Q_0. Следующие условия необходимы и достаточны, чтобы кривизна Q была $\le \chi$.

(1) Секционная кривизна Q_0 не превосходит χ.

(2) Локально замыкание каждой линейно связной компоненты каждого слоя является выпуклым множеством в Q_0.

(3) Для каждой точки $x \in Q_0$ кусочно-сферический полиэдр $\tilde{S}_x$ удовлетворяет условию $CAT(1)$.

В нашем случае подстилающее пространство Q_0 – это многообразие M, его секционная кривизна совпадает с гауссовой и не превосходит χ, линейно-связные компоненты каждого слоя – конечное множество точек на M (это в точности точки ветвления разветвленного накрытия π), $\tilde{S}_x$ – это окружность длины $2\pi k_j$, а Q – наш орбифолд O. Условие $CAT(k)$, наложенное на метрическое пространство, означает, что это пространство удовлетворяет Определению 4 (см. пункт 2), но не локально, для некоторой окрестности U_x, а глобально. Очевидно, что все условия теоремы выполнены, и пространство $\tilde{M}$ имеет кривизну $\le \chi$ по А.Д.Александрову.

Предложение доказано. ■

Из Предложений 1 и 2 для наших частных случаев вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть сфера Римана $\tilde{S}$ отображается на сферу Римана S с помощью рациональной функции f. Тогда на $\tilde{S}$ существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение f является субметрией, и эта метрика превращает $\tilde{S}$ в пространство кривизны ≤ 1.* ■

Следствие 2. *Пусть тор $\tilde{T}$ отображается на сферу Римана S с помощью эллиптической функции v. Тогда на $\tilde{T}$ существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение v является субметрией, и эта метрика превращает $\tilde{T}$ в пространство кривизны ≤ 1.* ■

Следствие 3. *Пусть многообразие $\tilde{N}$ – сфера с g ручками, $g > 0$, отображается на сферу Римана S с помощью отображения h (отображение h определяется в пункте 6). Тогда на $\tilde{N}$ существует единственная внутренняя метрика, такая, что отображение h является субметрией, и эта метрика превращает $\tilde{N}$ в пространство кривизны ≤ 1.* ■

Литература

1. Charney R., Davis M. *Singular metrics of nonpositive curvature on branched covers of riemannian manifolds* // American Journal of Mathematics 115 (1993). P.929-1009.

2. Бураго Ю., Громов М., Перельман Г. *Пространства А.Д.Александрова с ограниченными снизу кривизнами* // УМН. 1992. N 2. С.16.

3. Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций.* М.: Наука, 1986.